ACTAS DEL XI CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2011)
2012, Páginas 83–97

EVOLUCIÓN GEOMÉTRICA DE CURVAS Y MÉTRICAS

JORGE LAURET

RESUMEN. Se explorarán en este trabajo las intrigantes analogías que existen entre dos ecuaciones de evolución geométricas: el sofisticado flujo de Ricci, famoso por su aplicación a la prueba de la Conjetura de Poincaré de Hamilton–Perelman, y el elemental flujo de acortamiento de curvas, cuya presentación no requiere más que la noción de derivada parcial de una función real.

1. INTRODUCCIÓN

Corría el año 1900 cuando Henri Poincaré (1854-1912) propuso una conjetura en el artículo [27], que en términos modernos decía:

> Toda variedad compacta de dimensión 3 con la misma homología de la esfera S^3, debe ser homeomorfa a S^3.

Hoy se puede ver en un curso básico de Topología Algebraica que esto es claramente falso. Fue el mismo Poincaré el primero en encontrar un contraejemplo, haciendo uso del grupo fundamental, introducido también por él en 1895. El contraejemplo dado fue el cociente $\mathrm{SO}(3)/I_{60}$, donde $\mathrm{SO}(3)$ es el grupo de matrices ortogonales 3×3 de determinante 1 e I_{60} es el subgrupo (finito) de $\mathrm{SO}(3)$ formado por todas las rotaciones de un icosaedro (o dodecaedro). Dicho cociente tiene la homología de S^3, pero también un hermoso grupo fundamental de 120 elementos. Esto fue publicado en [28], donde Poincaré, esta vez más cauteloso, concluye la discusión con el siguiente problema en forma de pregunta, no de conjetura:

> ¿Es toda variedad compacta, simplemente conexa y de dimensión 3, necesariamente homeomorfa a S^3?

Esta pregunta es la que pasó a conocerse con el tiempo como la *Conjetura de Poincaré*, y sobre la cual durante casi un siglo nadie logró encontrar ni contraejemplo ni prueba, hasta que en 2002-2003, Grigori Perelman (1966-) publicó en el sitio de internet *arXiv.org* tres artículos con su completa resolución, detalles más, detalles menos…

Vierta ahora un poco de agua en una sartén plana bien caliente, observe la evolución que experimenta el contorno de la mancha de agua mientras se evapora, y pregúntese qué tendrá que ver esto con la Conjetura de Poincaré. Es precisamente el objeto del presente artículo mostrar que tiene mucho que ver.

La herramienta principal en la prueba de Perelman es la siguiente ecuación de evolución para una familia g_t de métricas riemannianas sobre una misma variedad diferenciable M:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2\,\mathrm{Rc}(g_t),$$

donde $\mathrm{Rc}(g_t)$ denota el tensor de Ricci de la métrica g_t. Esta ecuación, llamada *flujo de Ricci*, fue introducida en 1982 por Richard Hamilton (1943-) en el trabajo pionero [17], quien además elaboró un plan para demostrar la Conjetura de Poincaré basado, a grandes rasgos,

Palabras clave. Curve shortening flow; Ricci flow; Ricci soliton.

en el estudio de las singularidades que pueden ocurrir cuando uno considera una solución g_t al flujo de Ricci partiendo de una métrica inicial g_0 cualquiera sobre una variedad compacta de dimensión 3. Resultados de gran peso relevantes a dicho plan fueron aportados por una gran cantidad de matemáticos aparte de Hamilton durante dos décadas, hasta su conlcusión por Perelman. De todas maneras, es quizá injusto mostrar a Perelman como el mero terminador de un plan, teniendo en cuenta que sus aportes son considerados extremadamente originales y potentes, al nivel de verdaderas genialidades. Ya existen en la literatura cuatro libros que explican y desarrollan en más detalle los artículos del *arXiv* de Perelman (ver [3], [6], [21], [26]).

Es así como el problema más famoso de la Topología fue resuelto desde la Geometría Riemanniana y el relativamente nuevo campo del Análisis Geométrico.

El antecesor más simple del flujo de Ricci, como así también del flujo de curvatura media para subvariedades, es la evolución de una curva en el plano según su curvatura. Dicha evolución es llamada *flujo de acortamiento de curvas* (*curve shortening flow* o *heat shrinking curve equation*), y está definida por la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales para una familia $\gamma_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de curvas:

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma(s,t) = k(s,t)N(s,t),$$

donde $\gamma(s,t) := \gamma_t(s)$, y $k(s,t)$, $N(s,t)$ denotan respectivamente la curvatura y la normal de la curva γ_t en el punto $\gamma_t(s)$. Esto nos conecta finalmente con la mancha de agua en la sartén caliente, pues se sabe que su contorno evoluciona de acuerdo a este flujo.

Se intentará mostrar en este trabajo que la mayoría de las ideas, problemas y métodos más relevantes de la teoría del flujo de Ricci, se encuentran en realidad presentes en el estudio del flujo de acortamiento de curvas, y en términos tan elementales que permiten su entendimiento y apreciación a cualquier persona que sepa derivar funciones reales. Dedicaremos toda la Sección 2 al flujo de acortamiento de curvas, presentando el tema de una forma elemental y auto-contenida, para luego en la Sección 3 desarrollar los aspectos básicos de la teoría ya bien consolidada del flujo de Ricci, insistiendo constantemente en los paralelismos existentes entre las dos ecuaciones de evolución.

El autor desea mencionar que mientras preparaba el presente trabajo, encontró en internet el artículo [25], donde también se plantean algunas de las analogías entre los dos flujos estudiadas aquí, y en un nivel mucho mayor de detalle e incluyendo varias demostraciones auto-contenidas. Cabe aclarar que las soluciones auto-similares (o solitones) y las antiguas no son consideradas en [25].

2. El flujo de acortamiento de curvas

En esta sección estudiaremos la evolución más natural a la que se puede someter a una curva en el plano, es decir, 'según su curvatura'. Referimos a los libros [7], [10, Section 5] y a los artículos mencionados durante el desarrollo para más información sobre esta ecuación de evolución, desde diversos puntos de vista.

Sea γ una curva diferenciable en el plano (parametrizada),

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(s) = (x(s), y(s)),$$

la cual asumiremos *inmersa* en todo el artículo, i. e. $\gamma'(s) \neq 0$ para todo s. La *curvatura* de γ en s está definida por

$$k(s) := \frac{x_s y_{ss} - y_s x_{ss}}{(x_s^2 + y_s^2)^{3/2}}, \tag{1}$$

donde x_s y x_{ss} denotarán siempre la derivada y la derivada segunda en s de una función a valores reales $x(s)$, respectivamente, y se entenderá que son derivadas parciales en el caso en que x sea de más de una variable. La *normal unitaria* a la curva γ en $\gamma(s)$ se obtiene al rotar noventa grados a la izquierda el vector velocidad $\gamma'(s)$ normalizado, es decir, usando la identificación natural $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$,

$$N(s) := \mathtt{i}\frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}.$$

En el caso en que γ está parametrizada por longitud de arco (i. e. $\|\gamma'\| \equiv 1$), se tiene que $\gamma'(s) \perp \gamma''(s)$ y por lo tanto

$$\gamma''(s) = k(s)N(s), \qquad N(s) := \mathtt{i}\gamma'(s) = (-y_s, x_s).$$

De la observación trivial que $\gamma''(s) = \frac{d}{ds}\gamma'(s)$, se deduce que el módulo del número $k(s)$ está midiendo cuán 'curvada' está γ en el punto $\gamma(s)$, y su signo nos dice hacia dónde se está curvando: $k(s) > 0$ indica 'hacia adentro', $k(s) < 0$ 'hacia afuera'. Una excelente referencia sobre curvas planares es [4, Sections 1.3-1.5], donde se brinda un punto de vista coloquial y especialmente intuitivo, junto a una gran cantidad de otras referencias.

Supongamos ahora que tenemos γ_t, $t \in I$, una familia de curvas parametrizada por algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ de la forma $I = [0,T)$, y asumamos que es diferenciable, en el sentido de que

$$\gamma_t(s) = \gamma(s,t) = (x(s,t), y(s,t)), \qquad \text{con}\gamma : \mathbb{R}\times I \longrightarrow \mathbb{R}^2\text{diferenciable}.$$

Se podría decir informalmente que γ_t es una 'curva de curvas' partiendo de la curva γ_0. Cabe aclarar que en algunas situaciones, el intervalo I puede adquirir formas distintas a $[0,T)$.

La siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales es llamada el *flujo de acortamiento de curvas* (en inglés, *curve shortening flow*, usualmente abreviado como *CSF*, y a veces llamada también *heat shrinking curve equation*),

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma(s,t) = k(s,t)N(s,t), \tag{2}$$

donde $k(s,t)$ y $N(s,t)$ denotan respectivamente la curvatura y la normal de la curva γ_t en el punto $\gamma_t(s)$. Esta ecuación describe entonces la evolución de la familia de curvas γ_t de acuerdo a su curvatura, pues en cada punto $\gamma_t(s)$ recibe en el instante de tiempo t un impulso en la dirección de su normal, en el sentido de su curvatura y de la magnitud de la misma (se pueden encontrar fácilmente en internet diversas animaciones de esta evolución).

Dada una curva inicial γ_0, tanto la existencia de una solución γ_t a la ecuación (2) en algún intervalo $I = [0,T)$ como su unicidad, están garantizadas por la propiedad de ser uniformemente parabólica, la cual sigue de escribir la ecuación (2) como el correspondiente sistema de ecuaciones para x, y, dado por

$$\begin{cases} x_t = \frac{-(x_s y_{ss} - y_s x_{ss})y_s}{(x_s^2+y_s^2)^2}, \\ y_t = \frac{(x_s y_{ss} - y_s x_{ss})x_s}{(x_s^2+y_s^2)^2}, \end{cases} \qquad \text{y si } s \text{ es la longitud de arco, simplemente por} \qquad \begin{cases} x_t = x_{ss}, \\ y_t = y_{ss}. \end{cases}$$

Ejemplo 1. *Una recta $\gamma(s) = s(x_1,y_1) + (x_0,y_0)$ tiene curvatura $k(s) \equiv 0$ y representa entonces un punto fijo del flujo de acortamiento, i. e. $\gamma_t \equiv \gamma$, $t \in (-\infty,\infty)$, es solución de la ecuación (2). Notar que, recíprocamente, todo punto fijo es una recta o parte de ella.*

Ejemplo 2. *Observando con cuidado la ecuación (2), se puede adivinar que una familia de círculos concéntricos contrayéndose debería ser una solución; la pregunta es a qué velocidad. Propongamos entonces como solución al flujo de acortamiento la familia de* *círculos* $\gamma_t(s) = (r(t)\cos s, r(t)\sin s)$*, con* $r(0) = 1$*. Como la curvatura y la normal están dadas por* $k(s,t) = \frac{1}{r(t)}$ *y* $N(s,t) = -(\cos s, \sin s)$*, se obtiene que la ecuación (2) para* $\gamma(s,t)$ *es equivalente a la ecuación ordinaria para* r *dada por*

$$r_t = -\frac{1}{r}, \qquad \text{y en consecuencia} \qquad r(t) = \sqrt{1-2t}, \qquad t \in (-\infty, \tfrac{1}{2}).$$

La solución entonces se contrae desde círculos tan grandes y desde tiempos tan remotos como uno desee, hasta colapsar en un punto en $T = \frac{1}{2}$*. Veremos más adelante que este comportamiento, lejos de ser propio solo de los círculos, se manifiesta en realidad para toda curva simple.*

De acuerdo a su intervalo máximo de existencia, las soluciones al flujo de acortamiento (y de muchas otras ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico, como por ejemplo el flujo de Ricci) han sido bautizadas en la literatura con nombres muy poéticos en los siguientes casos especiales:

- $t \in (T, \infty)$: *inmortal*,
- $t \in (-\infty, T)$: *antigua*,
- $t \in (-\infty, \infty)$: *eterna*.

En particular, las rectas son eternas y los círculos antiguos. El tiempo máximo de existencia T se llama *singularidad* y se produce cuando γ_t deja de ser diferenciable o inmersa.

Recordemos que una curva en el plano $\gamma(s)$ está en realidad determinada salvo movimiento rígido por su función curvatura $k(s)$. La evolución de la curvatura $k(s,t)$ de acuerdo al flujo de acortamiento es en consecuencia no solo crucial sino incluso equivalente a la evolución de la curva, y está dada por la impecable ecuación de tipo calórica

$$k_t = k_{ss} + k^3.$$

La aparición del calor en esta ecuación no es coincidencia, y representa la clave matemática para demostrar el hecho físico mencionado en la Introducción sobre la evolución del agua en una plancha caliente.

No es muy difícil probar que si la curva inicial γ_0 además de inmersa es *incrustada*, i. e. su trazo $\gamma_0(\mathbb{R})$ con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ (en particular no se corta), entonces γ_t es incrustada para todo $t \geq 0$.

2.1. Curvas cerradas. Una curva γ se dice *cerrada* si es periódica, es decir si se la puede definir como una función diferenciable $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Es sencillo ver que si la curva inicial γ_0 es cerrada, entonces la solución γ_t al flujo de acortamiento (2) es cerrada para todo $t \geq 0$. Las siguientes observaciones también se prueban de manera relativamente elemental:

- Consideremos la longitud de la curva γ_t definida por $L(\gamma_t) := \int_{S^1} \|\gamma_t'(s)\|\, ds$. Entonces,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(\gamma_t) = -\int_{S^1} k(s,t)^2\, ds,$$
lo cual indica que la longitud decrece estrictamente con el tiempo y de paso explica el nombre dado a este flujo. Más aún, se tiene que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \gamma_t = -\operatorname{grad}(L)_{\gamma_t},$$
es decir el flujo de acortamiento de curvas es precisamente el flujo gradiente de la funcional longitud en el espacio de curvas munido de la métrica riemanniana L^2. Recordemos que los puntos críticos de dicha funcional son precisamente las geodésicas, lo cual ha motivado aplicaciones del flujo de acortamiento de curvas en otras superficies diferentes a $\mathbb{R}^2$, e.g. en el problema de existencia de geodésicas cerradas.

- Si γ_0 además de cerrada es *simple*, i. e. es inyectiva salvo periodicidad (o dicho de manera informal, γ_0 'no se corta' a sí misma), entonces γ_t es simple para todo $t \geq 0$.
- Si $A(t)$ denota el área encerrada por una solución simple γ_t, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A = -2\pi, \qquad \text{y por lo tanto} \qquad A(t) = -2\pi t + A(0), \quad \forall t \in I.$$

  Esto implica que la solución γ_t encontrará irremediablemente una singularidad en tiempo finito; más precisamente, podrá estar definida a lo sumo para $t < \frac{A(0)}{2\pi}$, pues en dicho tiempo necesariamente colapsaría. En particular, no existen soluciones simples inmortales. Notar que esto no asegura que no pueda aparecer una singularidad antes, para un $T < \frac{A(0)}{2\pi}$.

Estas observaciones sobre la longitud y el área presentan un claro ejemplo de cómo se puede obtener valiosa información sobre el comportamiento de una solución a una ecuación diferencial sabiendo prácticamente nada sobre la solución en sí, y solo mediante el estudio de la evolución de algunas cantidades relevantes asociadas a esta.

Una curva simple se dice *convexa* si la región acotada que encierra es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1. (Gage-Hamilton 1986 [14]) *Si γ_0 es una curva convexa, entonces*

- *γ_t es convexa para todo $t \geq 0$.*
- *La solución γ_t está definida para todo $t \in \left[0, \frac{A(0)}{2\pi}\right)$.*
- *Cuando $t \to \frac{A(0)}{2\pi}$, la curva γ_t se contrae a un punto mientras converge asintóticamente a un círculo.*

La propiedad mencionada en el tercer ítem del teorema es a veces llamada en la literatura 'convergencia a un punto redondo', en el sentido de que si se la normaliza, por ejemplo de tal forma que encierre siempre la misma área, entonces converge en efecto a un círculo. Dicha normalización será desarrollada en la Sección 2.3.

Otra forma de mostrar que las curvas convexas convergen a un círculo a medida que se contraen, es considerando la evolución de ciertas cantidades geométricas asociadas a una curva que alcanzan su valor extremo precisamente en los círculos. Veamos algunos ejemplos:

- El *radio isoperimétrico* $\frac{L^2}{A}$, el cual se sabe por la clásica desigualdad isoperimétrica que es $\geq 4\pi$ para toda curva cerrada, con igualdad solo en el caso de círculos, satisface

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{L^2}{A} = -2\frac{L}{A}\left(\int_{S^1} k^2\, ds - \frac{\pi L}{A}\right),$$

  y como es sabido que la cantidad entre paréntesis es ≥ 0, se obtiene que el radio isoperimétrico es no creciente a lo largo del flujo. Más aún, fue probado en [13] que $\frac{L^2}{A}$ converge en efecto a 4π cuando $t \to \frac{A(0)}{2\pi}$.
- Si $k_{\max}(t)$ y $k_{\min}(t)$ denotan respectivamente el máximo y mínimo valor de la curvatura de γ_t, entonces

$$\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \to 1, \qquad \text{cuando} \quad t \to \frac{A(0)}{2\pi}.$$

- El cociente

$$\frac{r_{\text{cir}}}{r_{\text{ins}}} \to 1, \qquad \text{cuando} \quad t \to \frac{A(0)}{2\pi},$$

donde $r_{\mathrm{cir}}(t)$ y $r_{\mathrm{ins}}(t)$ denotan el máximo y mínimo valor de los radios de círculos circunscriptos e inscriptos en $\gamma_t(S^1)$, respectivamente.
- Cada derivada parcial $\frac{\partial^n k}{\partial t^n}$ converge uniformemente a cero en S^1, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Gracias al siguiente resultado, más difícil de aceptar intuitivamente que el Teorema 1, se sabe que todo esto es en realidad válido partiendo de cualquier curva simple, pues estas fluyen irremediablemente hacia la convexidad.

Teorema 2. (Grayson 1987 [15]) *Si γ_0 es simple entonces γ_t se vuelve convexa antes de colapsar, i. e. γ_t es convexa para todo $t \geq t_c$ para algún tiempo $0 \leq t_c < \frac{A(0)}{2\pi}$.*

Así es como no importa cuán lejos de ser convexa está una curva simple (imaginemos por ejemplo sinuosos y hasta incluso 'espiralados' circuitos), según el flujo de acortamiento debe convertirse en convexa antes de extinguirse en un punto redondo.

Por el contrario, si la curva γ_0 no es simple, y su trazo se asemeja por ejemplo al de una figura 'ocho', entonces la solución γ_t generalmente forma puntas (no diferenciables) antes de colapsar a un punto.

2.2. Curvas como gráficos. En el caso en que la curva inicial γ_0 es el gráfico de una función $x \mapsto y(x)$, la ecuación del flujo de acortamiento adopta una forma más abordable, pues la solución puede ser descripta en términos de los gráficos de una curva de funciones. Más precisamente, propongamos como solución a una familia γ_t de la forma

$$\gamma_t(x) = (x, y(x,t)), \qquad \text{es decir,} \qquad \gamma_t(s) = \gamma(s,t) = \Big(x(s,t), y(x(s,t),t)\Big). \tag{3}$$

Se tiene entonces que

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_t = (x_t, y_x x_t + y_t),$$

y aplicando la fórmula (1) obtenemos

$$k = \frac{y_{xx}}{(1+y_x^2)^{3/2}}.$$

Por otro lado, $\gamma_t'(x) = (1, y_x)$, y en consecuencia la normal está dada por

$$N = \frac{1}{(1+y_x^2)^{1/2}}(-y_x, 1).$$

De todo esto se deduce que γ_t es solución al flujo de acortamiento si y solo si

$$y_t = \frac{y_{xx}}{(1+y_x^2)}. \tag{4}$$

Esta ecuación, un tanto más simple (al menos en aspecto) que (2), nos anima a buscar soluciones explícitas.

Ejemplo 3. *Es natural proponer como primer candidato a una solución γ_t al flujo de acortamiento como en (3) y tal que la función y sea de la siguiente forma sencilla de 'variables separadas': $y(x,t) = y(x) + t$. Se sigue de (4) que $y(x)$ debe satisfacer $y_x = 1 + y_x^2$, y es fácil ver que una solución a esto es por ejemplo $y(x) = -\log(\cos x)$, con lo cual resulta*

$$y(x,t) = -\log(\cos x) + t, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Debemos notar la simple evolución que experimenta γ_t, la cual consiste en solo trasladar hacia arriba y con velocidad constante el mismo gráfico en forma de 'U', lo cual la hace en particular eterna. Esta famosa solución fue hallada por el geómetra italiano Eugenio Calabi y es llamada en inglés 'the grim reaper', cuya traducción literal sería 'la hoz implacable', pero en realidad se relaciona directamente a 'La Parca', conocida representación *de la muerte. Los físicos, menos solemnes, llaman a esta solución 'hair-pin', es decir, un tipo de hebillita para el pelo (o 'invisible').*

Ejemplo 4. *Una solución más sofisticada a la ecuación (4) es*

$$y(x,t) = t - \log\left(\cos x + \sqrt{\cos^2 x - e^{2t}}\right), \qquad t \in (-\infty, 0),$$

donde se debería trasladar la variable t por una constante si uno insiste en tener $0 \in I$ como hemos asumido en este artículo. El trazo $\gamma_t(\mathbb{R})$ puede ser escrito en forma paramétrica como

$$\cosh y = e^{-t} \cos x.$$

Esta solución, encontrada por Sigurd Angenent, debido a su forma es llamada en la literatura 'óvalos de Angenent', y se presenta como muy distinguida en varios aspectos del flujo de acortamiento (ver Secciones 2.5 y 2.6). Su curvatura está dada por

$$k(x,t) = \frac{e^{-t}\cos x}{(e^{-2t} - 1)^{1/2}},$$

de donde se puede comprobar inmediatamente la propiedad asintótica de la curvatura cuando $t \to 0$ mencionada arriba, verificando también el Teorema 1. Notemos que en tiempos muy remotos $t \ll 0$, los óvalos se asemejan a dos Parcas

$$y = \pm(t - \log(\cos x) - \log(2)) + \mathrm{O}(e^{4t}\sec^4 x),$$

pegadas suavemente en $y = 0$, lo cual lejos de ser mera coincidencia, responde a una bien conocida pero no completamente entendida relación entre soluciones antiguas y autosimilares de este tipo de ecuaciones (ver Secciones 2.4 y 2.5).

2.3. Normalización. Sea γ_t una solución simple (ver Sección 2.1) al flujo de acortamiento con área inicial $A(0) = \pi$, lo que implica que $t \in [0, \frac{1}{2})$ y γ_t se contrae a un punto cuando $t \to \frac{1}{2}$ (ver Teoremas 1 y 2). Nuestro objetivo en esta sección es normalizar la solución para liberarnos de la singularidad que ocurre en el tiempo $T = \frac{1}{2}$. Es fácil ver que si $c > 0$ y γ es cualquier curva simple, entonces $A(c\gamma) = cA(\gamma)$, lo cual nos asegura que podemos lograr que el área se mantenga constante en el tiempo, aunque se debería también reparametrizar el tiempo para lograr la inmortalidad (i. e. $t \in [0, \infty)$) y que la nueva familia de curvas cumpla una ecuación razonable.

En vista de todo esto, proponemos como normalización de γ_t a la familia de curvas $\tilde{\gamma}_t$ dada por

$$\tilde{\gamma}(s,t) = (t+1)\,\gamma\left(s, \tfrac{t}{2(t+1)}\right), \qquad t \in [0, \infty). \tag{5}$$

Es inmediato que $\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0$, $A(\tilde{\gamma}_t) \equiv \pi$ (pues $A(\gamma_t) = -2\pi t + \pi$, ver Sección 2.1) y que $\tilde{\gamma}$ es solución de la siguiente ecuación diferencial, a la que llamaremos *flujo de acortamiento normalizado*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\gamma}(s,t) = \tilde{k}(s,t)\tilde{N}(s,t) + \tfrac{1}{t+1}\tilde{\gamma}(s,t), \tag{6}$$

donde $\tilde{k}$ y $\tilde{N}$ denotan la curvatura y la normal de la curva $\tilde{\gamma}_t$, respectivamente.

El tercer ítem del Teorema 1 puede ser ahora enunciado más claramente:

Si γ_0 es convexa, entonces $\tilde{\gamma}_t$ converge a un círculo de radio 1 cuando $t \to \infty$.

Este proceso de normalización puede ser llevado a cabo con el fin de lograr que cualquier otra cantidad geométrica X asociada a una curva que sea homogénea respecto a múltiplos (i. e. $X(c\gamma) = c^{\alpha}X(\gamma)$) se mantenga constante en el tiempo. Todas estas nuevas ecuaciones normalizadas tienen la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\gamma}(s,t) = \tilde{k}(s,t)\tilde{N}(s,t) + r(t)\tilde{\gamma}(s,t), \tag{7}$$

para alguna función de normalización r. En efecto, si r es continua (o tan solo integrable), consideramos las soluciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias $\{c' = rc,\ c(0) = 1\}$ y $\{\tau' = c^{-2},\ \tau(0) = 0\}$, es decir,

$$r \quad \rightsquigarrow \quad c(t) := e^{\int_0^t r(s)\,ds}, \quad \tau(t) = \int_0^t c^{-2}(s)\,ds. \tag{8}$$

Notemos que $c(t) > 0$ y $\tau'(t) > 0$ para todo t. Es fácil chequear que la solución al *flujo de acortamiento r-normalizado* definido en (7) con $\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0$ está dada por

$$\tilde{\gamma}(s,t) = c(t)\gamma(s,\tau(t)), \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \tilde{\gamma}_t = c(t)\gamma_{\tau(t)}, \tag{9}$$

usando esencialmente que

$$\tilde{\gamma}_t'(s) = c(t)\gamma_{\tau(t)}'(s), \qquad \tilde{N}(s,t) = N(s,\tau(t)), \qquad \tilde{k}(s,t) = \frac{1}{c(t)}k(s,\tau(t)).$$

2.4. Soluciones auto-similares. Hemos visto ya algunos ejemplos de soluciones al flujo de acortamiento con la remarcable propiedad de que las curvas γ_t conservan su forma independientemente del tiempo t, como las rectas, los círculos y la intrigante Parca (ver Ejemplos 1, 2 y 3). Más precisamente, una solución γ_t, $t \in I$ a la ecuación (2) se dice *auto-similar* si sus trazos $\gamma_t(\mathbb{R})$ o $\gamma_t(S^1)$ (como subconjuntos de $\mathbb{R}^2$) son *homotéticos* a γ_0 para todo $t \in I$; i. e., salvo múltiplo por un escalar positivo, se obtienen todos por un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ aplicado a γ_0.

Vale la pena recalcar, desde un punto de vista conceptual, el lugar de privilegio que ocupan estas soluciones. Como hemos visto, el flujo de acortamiento 'mejora' en algún sentido a las curvas, puede ser visto como un proceso de unifomización que moldea las curvas en pos de volverlas más y más suaves. Por ejemplo, en el caso de curvas simples, las hace converger asintóticamente a un círculo, es decir, uniformiza su curvatura. Pero las soluciones auto-similares, sin ser puntos fijos del flujo como las rectas, de alguna forma se rebelan ante la ecuación y defienden su forma, basadas en que ya son suficientemente uniformes y lindas, o más precisamente, 'inmejorables'. Por otro lado, menos platónico, las soluciones auto-similares juegan un papel muy importante en el estudio de singularidades, ya que aparecen como límites de las normalizaciones que uno pueda llegar a realizar para prevenir una singularidad.

Hasta mediados del año 2010, se conocían en la literatura soluciones auto-similares cuya evolución consiste solo en trasladarse, expandirse, contraerse o rotar, pero ninguna que combinara más de uno de estos movimientos rígidos. Este tipo de soluciones mixtas fueron encontradas por Halldorsson en [16], en donde en realidad se obtiene la clasificación completa de las soluciones auto-similares al flujo de acortamiento.

Usando la identificación natural de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, una solución γ_t, $t \in I$, es auto-similar si y solo si se puede escribir de la siguiente forma:

$$\gamma_t(s) = r(t)e^{\mathrm{i}\theta(t)}\gamma_0(s) + h(t),$$

donde $r, \theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son funciones diferenciables tales que $r(0) = 1$, $\theta(0) = 0$ y $h(0) = 0$. En [16], se estudian las ecuaciones diferenciales que deben satisfacer r, θ y h para que una familia de esta forma sea solución del flujo de acortamiento. La única solución auto-similar que es simple es el círculo. La clasificación completa puede ser descripta como sigue, aunque se recomienda al lector interesado consultar el artículo para más precisión y una gran cantidad de bellas figuras.

Teorema 3. (Halldorsson 2010 [16]) *Toda solución auto-similar al flujo de acortamiento de curvas es equivalente a una de las siguientes:*

- **Traslación**: solo La Parca.
- **Expansión**: una familia continua unidimensional de curvas incrustadas asintóticas a un cono.
- **Contracción**: una familia continua unidimensional de curvas (no incrustadas) cuyo trazo queda atrapado en un anillo, la cual contiene una subfamilia discreta de curvas cerradas (no simples) parametrizada por pares (p,q) de números coprimos con $\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (la curva correspondiente a (p,q) toca q veces cada borde del anillo y da p vueltas). El resto de las curvas no son cerradas y tienen trazos densos en el anillo.
- **Rotación**: una familia unidimensional de curvas incrustadas con la siguiente forma: desde un único punto más cercano al origen salen dos brazos que se acercan entre ellos mientras forman espirales hacia el infinito.
- **Rotación y expansión**: una familia 2-dimensional de curvas incrustadas similares a las del ítem anterior, con la diferencia de que los brazos se alejan hacia el infinito.
- **Rotación y contracción**: una familia 2-dimensional de curvas que parece no estar del todo bien entendida, en particular el tema de la incrustación. Las curvas constan también de dos brazos espiralados, pero aquí uno de ellos siempre se enrosca en un círculo, y el otro puede enroscarse también en el mismo círculo o irse a infinito.

2.5. Soluciones antiguas. Las soluciones antiguas (i. e. $t \in (-\infty, T)$) también juegan un papel muy importante en el estudio de las singularidades pues aparecen como límites de ciertos reescalamientos, llamados parabólicos, de una solución con una singularidad en tiempo finito (para más detalles ver Sección 3.4, la análoga de esta sección para el flujo de Ricci).

La antigüedad y la convexidad combinadas resultan en una condición demasiado fuerte para una curva, a juzgar por el siguiente resultado.

Teorema 4. (Daskalopoulos-Hamilton-Sesum 2008 [11]) *Existen solo dos soluciones convexas antiguas: los círculos (ver Ejemplo 2) y los óvalos de Angenent (ver Ejemplo 4).*

El caso simple no convexo permanece abierto, y ha sido conjeturada en [11] la no existencia de tales soluciones antiguas. Se ha creado cierta controversia respecto de esto, pues Angenent asegura haber encontrado un ejemplo de una solución antigua que se puede describir como una víbora desenroscándose desde tiempos inmemoriales, e incluso ha publicado en internet una animación de ella. Sin embargo, los autores de [11] han planteado ciertas dudas sobre la rigurosidad de dicho ejemplo, lo cual se puede corroborar en el video de una conferencia dictada por Daskalopoulos en el IAS de Princeton.

2.6. Soluciones exactas. En el artículo [5], se plantea la cuestión de la gran escasez de soluciones exactas o explícitas al flujo de acortamiento de curvas en la literatura. En efecto, resulta sorprendente que hasta el año 2010, además de algunas soluciones auto-similares, la única solución exacta conocida era la de los óvalos de Angenent (ver Ejemplo 4). Se exhiben en [5] algunas nuevas soluciones exactas usando reducciones por simetrías de Lie y separación de variables, además de demostrarse que esencialmente todas las soluciones exactas conocidas hasta el momento se pueden obtener por alguno de estos dos métodos.

3. El flujo de Ricci

Veremos en esta sección qué significa la evolución de una variedad riemanniana en la dirección de su curvatura. Para más información recomendamos los libros [30, 9, 1], además de los citados en la Introducción.

Sea M una variedad diferenciable. Se llama *flujo de Ricci* a la siguiente ecuación de evolución para una familia g_t de métricas riemannianas sobre M:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2\,\mathrm{Rc}(g_t), \tag{10}$$

donde $\mathrm{Rc}(g_t)$ denota el tensor de Ricci de la métrica g_t. Si evaluamos la ecuación en un punto $p \in M$, la parte izquierda es simplemente la derivada de la curva de productos internos $g_t(p)$ en el espacio tangente $\mathrm{T}_p M$, pero la parte derecha es una forma bilineal simétrica en $\mathrm{T}_p M$ que depende del valor de la métrica g_t en un entorno de p. Por otro lado, en coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ de M, esta ecuación se puede escribir como el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_t)_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = -2\,\mathrm{Rc}(g_t)_{ij}(x_1, \ldots, x_n),$$

donde $(g_t)_{ij}(t), \mathrm{Rc}(g_t)_{ij} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son las correspondientes coordenadas de la métrica g_t y su tensor de Ricci, respectivamente.

A diferencia de lo que ocurre con el flujo de acortamiento de curvas, la existencia de una solución partiendo de una métrica inicial dada g_0 no está garantizada, debido a que la ecuación (10) es solo débilmente parabólica, como así tampoco lo está su unicidad. Ambas propiedades fueron probadas en el caso compacto por Hamilton [17], y en el caso completo y de curvatura acotada por Shi [29]. El caso no compacto general está todavía abierto, y es algo que ha causado alguna controversia entre los investigadores en el tema, a juzgar por algunos artículos publicados en *arXiv* en los últimos años.

Una prueba de que nos encontramos nuevamente en presencia de una ecuación íntimamente relacionada con la del calor, es la evolución de la curvatura escalar $R(g_t) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ según el flujo de Ricci, la cual está dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta(R) + 2\|\,\mathrm{Rc}\,\|^2, \tag{11}$$

donde Δ denota el operador de Laplace de la variedad riemanniana (M, g_t). El primer sumando es de difusión e intenta propagar la curvatura inicial a lo largo de M; por el contrario, el segundo es de reacción al estilo de la ecuación $x' = x^2$ e intenta que la curvatura explote en tiempo finito. La gran pregunta es, como siempre en este tipo de evoluciones: >quién ganará?

Ejemplo 5. *Supongamos que (M, g_0) es una métrica de* Einstein, *i. e.* $\mathrm{Rc}(g_0) = cg_0$, *para algún $c \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que una solución al flujo de Ricci en este caso es*

$$g_t = (-2ct + 1)g_0,$$

cuyo intervalo máximo de existencia está dado por

$$\begin{cases} t \in (-\infty, \frac{1}{2c}), & c > 0 \quad \textit{(antigua)}; \\[2ex] t \in (-\infty, \infty), & c = 0 \quad \textit{(eterna)}; \\[2ex] t \in (\frac{1}{2c}, \infty), & c < 0 \quad \textit{(inmortal)}. \end{cases}$$

Ejemplos explícitos de este comportamiento serían, respectivamente, la esfera, el espacio euclídeo y el espacio hiperbólico.

3.1. Variedades compactas. En geometría riemanniana, el análogo a una curva cerrada es una variedad compacta. La teoría del flujo de Ricci siempre estuvo y está mucho más avanzada en el caso compacto, que es el de mayor importancia en cuanto a las aplicaciones a la topología se refiere.

Tiene sentido considerar a la positividad de la curvatura escalar de una variedad compacta como la análoga de la convexidad de una curva cerrada. Aplicando el principio del máximo, se puede usar la evolución de la curvatura escalar (11) para obtener un tiempo teórico máximo de existencia, análogo al dado por la evolución del área de curvas simples a lo largo del flujo de acortamiento: si M es compacta de dimensión n y $R_{\min} > 0$ es el mínimo de la curvatura escalar en M, entonces g_t puede estar definida a lo sumo para $t < \frac{n}{2R_{\min}}$. Del mismo análisis se deduce que la positividad de la curvatura escalar es preservada por el flujo de Ricci.

Hamilton probó que si M es compacta y $[0,T)$ es el intervalo máximo de existencia futura de un flujo de Ricci g_t, entonces su curvatura explota en T en el siguiente sentido preciso,

$$\lim_{t\to T} \max_{M} \|\operatorname{Rm}(g_t)\|_{g_t} = \infty, \tag{12}$$

donde $\operatorname{Rm}(g_t)$ denota el tensor de curvatura o de Riemann de g_t. En otras palabras, la solución g_t estará definida mientras su curvatura esté acotada. Sesum y Simon, en forma independiente, lograron luego reemplazar en lo anterior Rm por el tensor de Ricci Rc, pero es todavía un problema abierto si es cierto para la curvatura escalar R.

En dimensión 2, el paralelismo con el flujo de acortamiento de curvas es fuerte. En efecto, los siguientes resultados pueden ser vistos como los análogos a los Teoremas 1 y 2 sobre curvas convexas y simples, respectivamente.

Teorema 5. (Hamilton 1988 [18]) *Partiendo de cualquier métrica g_0 de curvatura escalar positiva en la esfera S^2, el flujo de Ricci g_t está definido para $t \in [0, \frac{1}{R_{\min}})$ y converge asintóticamente a la métrica 'redonda' (i. e. de curvatura constante).*

Teorema 6. (Chow 1991 [8]) *Partiendo de cualquier métrica g_0 en la esfera S^2, el flujo de Ricci g_t adquiere curvatura escalar positiva a partir de un tiempo $0 < t_p < \frac{1}{R_{\min}}$.*

Referimos al artículo expositivo [20] para varios resultados en dimensión 2 en el mismo espíritu de estos teoremas.

El siguiente resultado de Hamilton es considerado pionero en la teoría, y aporta un análogo en dimensión 3 al Teorema 1 sobre curvas convexas.

Teorema 7. (Hamilton 1982 [17]) *Sea (M,g_0) una variedad riemanniana compacta de dimensión 3, y supongamos que tiene curvatura de Ricci positiva. Entonces el flujo de Ricci g_t está definido para todo $t \in [0, \frac{3}{2R_{\min}})$ y (M,g_t) se contrae a un punto cuando $t \to \frac{3}{2R_{\min}}$ mientras converge asintóticamente a una esfera.*

En todos estos casos también se puede normalizar la solución de tal forma que se preserve el volumen y mostrar que converge en efecto a una esfera (ver Sección 3.2). Si la curvatura de Ricci de la métrica inicial no es positiva, entonces existen ejemplos muy simples en dimensión ≥ 3 que muestran que se puede encontrar una singularidad sin que la variedad haya colapsado a un punto, lo cual descarta cualquier resultado análogo al Teorema 2 en dimensiones altas.

3.2. Normalización. Análogamente a lo que hicimos en la Sección 2.3 para el flujo de acortamiento de curvas, veremos en esta sección que es posible multiplicar una solución por constantes positivas y reparametrizar la variable del tiempo de tal forma que alguna cantidad geométrica, que podría ser por ejemplo el volumen o algún tipo de curvatura, se mantenga constante y la ecuación que cumple la nueva curva de métricas sea manejable.

Sea (M, g_t) un flujo de Ricci con intervalo máximo de existencia $[0, T)$, es decir con una singularidad en tiempo finito T. Dada una función continua $r(t)$, que podría depender de $\tilde{g}_t$, definimos el *flujo de Ricci r-normalizado* por

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_t = -2\,\mathrm{Rc}(\tilde{g}_t) - 2r(t)\tilde{g}_t, \qquad \tilde{g}_0 = g_0. \tag{13}$$

Si consideramos las soluciones a las siguientes ecuaciones ordinarias $\{c' = rc,\ c(0) = 1\}$ y $\{\tau' = c^2,\ \tau(0) = 0\}$, las cuales están dadas por

$$r \quad \rightsquigarrow \quad c(t) := e^{\int_0^t r(s)\,ds}, \quad \tau(t) = \int_0^t c^2(s)\,ds, \tag{14}$$

(notar que $c(t) > 0$ y $\tau'(t) > 0$ para todo t), entonces es fácil chequear que

$$\tilde{g}_t = \tfrac{1}{c^2(t)}\, g_{\tau(t)}, \tag{15}$$

es solución de la ecuación normalizada (13).

Como la curvatura seccional satisface $K(cg) = \frac{1}{c}K(g)$ para todo $c > 0$, las normalizaciones son muy útiles no solo para deshacernos de singularidades sino también para impedir que la solución converja a una métrica plana.

Ejemplo 6. *Si (M, g_0) es compacta y*

$$r(t) := -\frac{\int_M R(\tilde{g}_t)\,d\nu_t}{n\int_M d\nu_t},$$

donde ν_t denota la forma de volumen de la métrica $\tilde{g}_t$, entonces el volumen de $(M, \tilde{g}_t)$ se mantiene constante para todo t.

3.3. Soluciones auto-similares o solitones de Ricci. Las soluciones g_t al flujo de Ricci auto-similares, es decir, que se mantienen homotéticas (i. e. isométricas salvo múltiplo positivo) a la métrica de partida g_0, han recibido el nombre de *solitones de Ricci*, con el cual también se denomina en tal caso a la métrica inicial g_0. La idea es completamente análoga a lo que vimos sobre soluciones auto-similares del flujo de acortamiento de curvas en la Sección 2.4.

Es interesante notar que es posible en este caso dar una definición cerrada de una métrica solitón de Ricci, sin hacer alusión al flujo de Ricci, lo cual ha sido uno de los aportes conceptuales más importantes de toda esta teoría, pues tales métricas son generalizaciones de las métricas de Einstein (ver Ejemplo 5) y aportan una nueva y más amplia forma de considerar a una métrica como canónica o distinguida en una variedad dada (ver por ejemplo [9, Chapter 1] para más información sobre solitones).

Las siguientes condiciones sobre una variedad riemanniana completa (M, g) son equivalentes a que (M, g) sea un solitón de Ricci:

- El tensor de Ricci satisface

  $$\mathrm{Rc}(g) = cg + \mathrm{L}_X\, g, \qquad \text{para algún} \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in \chi(M) \text{ completo}, \tag{16}$$

  donde $\chi(M)$ denota el espacio de campos diferenciables de M y L_X la derivada de Lie.

- $\mathrm{Rc}(g)$ es tangente en g al espacio de todas las métricas riemannianas en M que son homotéticas a g (recordar que $\mathrm{L}_X\, g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_0 \varphi_t^* g$, donde φ_t es el grupo monoparamétrico asociado al campo X).
- La curva de métricas
$$g_t = (-2ct+1)\varphi_t^* g \tag{17}$$
es una solución al flujo de Ricci (10) para algún grupo monoparamétrico φ_t de difeomorfismos de M.

En el caso en que el campo X sea el gradiente de una función diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, la condición (16) se reescribe como
$$\mathrm{Rc}(g) = cg + 2\,\mathrm{Hess}(f),$$
y el solitón de Ricci g es llamado *gradiente*. De acuerdo a (17), los solitones de Ricci son llamados de *contracción*, *estable*, o de *expansión*, dependiendo de si $c > 0$, $c = 0$, o $c < 0$, respectivamente.

La clasificación de solitones de Ricci parece estar muy lejos de ser alcanzada, incluso en clases particulares de variedades como las homogéneas (i. e. todo punto puede ser llevado a cualquier otro por una isometría), las Kähler o las de baja dimensión. Se conocen sin embargo algunos teoremas generales como el siguiente: los solitones de Ricci compactos de dimensión 3, o de cualquier dimensión pero de expansión o estables, son todos Einstein.

A continuación damos algunos resultados obtenidos en el caso homogéneo:

- Combinando resultados de Ivey, Naber, Perelman y Petersen-Wylie, se obtiene que todo solitón de Ricci homogéneo *no trivial* (i. e. que no sea Einstein ni localmente el producto de una variedad homogénea Einstein y el espacio euclídeo) debe ser no compacto, de expansión y no gradiente (ver [24]).
- Todos los ejemplos conocidos hasta el momento de solitones de Ricci homogéneos son métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie solubles (i. e. *solvariedades*) simplemente conexos, llamados *solsolitones* (y *nilsolitones* en el caso nilpotente).
- Los solsolitones son únicos salvo homotecia en un grupo de Lie dado (ver [22, 24]), y los nilsolitones están caracterizados como los puntos críticos de la funcional $R/\|\mathrm{Rc}\|$ (ver [22]).
- La clasificación de nilsolitones es equivalente a la de solvariedades Einstein (ver [19, 23]), y más en general, los solsolitones están también esencialmente determinados por los nilsolitones (ver [24]).
- Los solsolitones han sido clasificados en dimensión ≤ 7 por Cynthia Will en [31, 32] y Edison Fernández Culma en [12].

3.4. Soluciones antiguas. Sea (M, g_t) un flujo de Ricci compacto con una singularidad en el tiempo $T < \infty$. Como vimos en (12), existe una sucesión $(p_k, t_k) \in M \times [0, T)$ en el espacio-tiempo tal que $t_k \to T$ y
$$Q_k := \|\mathrm{Rm}(g_{t_k})(p_k)\| \to \infty.$$
Podemos usar estas cantidades para intentar entender qué está sucediendo cerca de la singularidad, con el ingenioso método de la lupa o 'zoom', conocido como escalamiento parabólico. Más precisamente, definimos para cada k la curva de métricas
$$g_k(t) := Q_k\, g_{(t_k + t/Q_k)},$$
la cual es fácil ver que es solución al flujo de Ricci usando que $\mathrm{Rc}(cg) = \mathrm{Rc}(g)$ para todo $c > 0$ y g métrica. Uno de los grandes aportes de Perelman fue la prueba de que la sucesión no colapsa, en el sentido de que los radios de inyectividad de las métricas en los puntos p_k están

uniformemente acotados inferiormente. Esto permite aplicar un teorema de compacidad de Hamilton que asegura la existencia de una subsucesión convergente de los flujos de Ricci $(M, g_k(t))$ a una solución $(M_\infty, g_\infty(t))$. Notemos que el intervalo de existencia de la solución g_k contiene a $(-t_k Q_k, 0]$, y por lo tanto el flujo de Ricci $g_\infty(t)$ está definido para $t \in (-\infty, 0]$, es decir, es una solución antigua.

Es por esto que el problema de clasificación de soluciones antiguas es crucial en el estudio de singularidades del flujo de Ricci.

Agradecimientos

Agradezco por la invitación al Comité Organizador del XI Congreso Dr. Antonio Monteiro, realizado en Bahía Blanca del 26 al 28 de mayo de 2011, y muy en especial a Hernán Cendra y Viviana Díaz por su gran hospitalidad. Estoy también muy agradecido con la Dra. Cynthia Will y el Dr. Emilio Lauret por sus comentarios y sugerencias sobre una primera versión del artículo.

Referencias

[1] B. Andrews, C. Hopper, *The Ricci Flow in Riemannian Geometry*, Lect. Notes Math. (2011), Springer.
[2] S. Angenent, *On the formation of singularities in the curve shortening flow*, J. Diff. Geom., 33 (1991), 601–633.
[3] L. Bessieres, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, J. Porti, *The Geometrisation of 3-manifolds*, preprint 2010.
[4] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag (2003).
[5] P. Broadbridge, P. Vassiliou, *The role of symmetry and separation in surface evolution and curve shortening*, SIGMA 7 (2011).
[6] H.-D. Cao, X.-P. Zhu, *A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures—Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow*, Asian J. Math. 10 (2006), 165–492.
[7] K.-S. Chou, X.-P. Zhu, *The curve shortening problem*, Chapman and Hall (2001).
[8] B. Chow, *The Ricci flow on the two-sphere*, J. Diff. Geom. 33 (1991), 325–334.
[9] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T, Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, L. Ni, *The Ricci flow: Techniques and Applications, Part I: Geometric Aspects*, AMS Math. Surv. Mon. 135 (2007), Amer. Math. Soc., Providence.
[10] T.H. Colding, W.P. Minicozzi II, *Minimal surfaces and mean curvature flow*, preprint 2011 (arXiv).
[11] P. Daskalopoulos, R. Hamilton, N. Sesum, *Classification of compact ancient solutions to the curve shortening flow*, preprint 2008 (arXiv).
[12] E. Fernandez Culma, *Classification of* 7*-dimensional Einstein Nilradicals*, preprint 2011 (arXiv).
[13] M. Gage, *Curve shortening makes convex curves circular*, Invent. Math., 76 (1984), 357–364.
[14] M. Gage, R. Hamilton. *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geom., 23 (1986), 69–96.
[15] M. Grayson. *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Diff. Geom., 26 (1987), 285–314.
[16] H. Halldorsson, *Self-similar solutions to the curve shortening flow*, preprint 2010 (arXiv).
[17] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 17 (1982), 255–306.
[18] R. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Contemp. Math. 71 (1988), 237–262.
[19] J. Heber, *Noncompact homogeneous Einstein spaces*, Invent. Math. 133 (1998), 279–352.
[20] J. Isenberg, R. Mazzeo, N. Sesum, *Ricci flow in two dimensions*, preprint 2011 (arXiv).
[21] B. Kleiner, J. Lott, *Notes on Perelman's papers*, Geom. Top. 12 (2008), 2587–2855.
[22] J. Lauret, *Ricci soliton homogeneous nilmanifolds*, Math. Ann. 319 (2001), 715–733.
[23] J. Lauret, *Einstein solvmanifolds are standard*, Ann. of Math. 172 (2010), 1859–1877.
[24] J. Lauret, *Ricci soliton solvmanifolds*, J. reine angew. Math. 650 (2011), 1–21.
[25] C. Mooney, *An introduction to curve-shortening and the Ricci flow*, Tesis doctoral, Stanford Univ. (2001).
[26] J. Morgan, G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, Clay Math. Monographs 3, Amer. Math. Soc. (2007).
[27] H. Poincaré, *Second complément à l'analysis situs*, Proc. London Math. Soc. 32 (1900), 277–308.
[28] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo 18 (1904), 45-110.
[29] W.X. Shi, *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. 30 (1989), 223–301.

[30] P. Topping, *Lectures on the Ricci flow*, Lect. Notes London Math. Soc. 325 (2006), Cambridge University Press.

[31] C.E. Will, *Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension* 7, Diff. Geom. Appl. 19 (2003), 307–318.

[32] C.E. Will, *The space of solsolitons in low dimensions*, Ann. Global Anal. Geom. 40 (2011), 291–309.

FaMAF–CIEM, Universidad Nacional de Córdoba
E-mail: `lauret@famaf.unc.edu.ar`