ACTAS DEL XII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2013)
2014, Páginas 109–116

UN RESULTADO PARA EL MULTIPLICADOR DEL CONO

ANA VARGAS

RESUMEN. Presentamos un resultado de acotación para el multiplicador del cono y la función cuadrado de Mockenhaupt en $\mathbb{R}^3$. Obtenemos una cota óptima en L^3. Se trata de un trabajo en colaboración con Sanghyuk Lee (Seoul National University).

1. EL MULTIPLICADOR DEL DISCO Y LOS MULTIPLICADORES DE BOCHNER–RIESZ

El operador multiplicador de la bola en $\mathbb{R}^n$ se define (véase [10]) como

$$D_R f(x) = \int_{|\xi|\le R} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.$$

El teorema de convergencia dominada de Lebesgue permite probar con facilidad que si, por ejemplo, consideramos una función f en la clase de Schwartz, entonces, cuando R crece a infinito la función $D_R f$ converge puntualmente a la función de partida. Un problema muy natural en el contexto de Análisis de Fourier es el de rebajar las hipótesis sobre f y considerar funciones en espacios más amplios, como los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$. ¿Sigue habiendo convergencia en ese caso? También podemos hacer la pregunta análoga considerando convergencia en norma en lugar de puntual.

En dimension 1, M. Riesz [19] probó que si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, entonces $D_R f \longrightarrow f$ en norma. Mucho después, Carleson [5] probó su celebrado resultado: $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $D_R f(x) \longrightarrow f(x)$ en casi todo punto. Hunt [13] extendió este resultado a L^p, $1 < p < \infty$.

Sorprendentemente, C. Fefferman demostró en 1971 que el análogo al teorema de Riesz en dimensiones superiores es falso: si $p \neq 2$, entonces, en general, $D_R f$ no converge a f en norma.

Es interesante resaltar el hecho de que la curvatura juega un papel importante en este problema. Si en lugar de bolas consideramos cubos de lados paralelos a los ejes y estudiamos

$$T_R f(x) = \int_{|\xi_1|\le R, |\xi_2|\le R, \dots} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi,$$

entonces la convergencia es una consecuencia del resultado unidimensional.

Cabe plantearse la misma pregunta para la sumación de Cesàro. Definimos promedios de las sumas parciales esféricas de Fourier,

$$C_R f(x) = \frac{1}{R}\int_0^R D_t f(x)\, dt,$$

y planteamos el problema de la convergencia de C_R. Podemos hacer un sencillo cálculo para encontrar

$$C_R f(x) = \int_{|\xi|\le R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.$$

Financiado en parte por MINECO MTM2010-16518 (España).

La convergencia en norma $f \in L^p$ de las sumas de Cesàro es equivalente a la acotación uniforme en L^p de los operadores

$$\widehat{C_R f}(\xi) = \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right)_+ \widehat{f}(\xi).$$

Con un cambio de escala se muestra que esto es a su vez equivalente a la acotación de uno de los operadores de Cesàro, por ejemplo,

$$\widehat{Cf}(\xi) = (1 - |\xi|)_+ \widehat{f}(\xi).$$

La convergencia en casi todo punto es más complicada de tratar, en general. Este tipo de problema se traduce en la acotación de un cierto operador maximal asociado ([21]).

Podemos generalizar el operador de Cesàro, obteniendo una familia de multiplicadores en que la suavidad cerca de la esfera unidad depende de un parámetro α,

$$\widehat{\mathscr{C}^\alpha f}(\xi) = (1 - |\xi|)_+^\alpha \widehat{f}(\xi) \qquad \alpha > 0.$$

La singularidad en el origen de estos multiplicadores no juega ningún papel en su acotación. Una sencilla aplicación del teorema del multiplicador de Hörmander muestra que la acotación L^p, $p > 1$, de estos operadores equivale a la de

$$\widehat{\mathscr{B}^\alpha f}(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Estos son los llamados multiplicadores de Bochner–Riesz.

El problema de la acotación de estos multiplicadores en L^p está aún abierto salvo en dimensión 2. Carleson y Sjölin [6] mostraron que $\mathscr{B}^\alpha$ está acotado $L^4(\mathbb{R}^2)$ para todo $\alpha > 0$. Por otro lado, podemos describir los operadores de Bochner–Riesz como operadores de convolución con un núcleo que para $\alpha > \frac{1}{2}$ es integrable. De este modo probamos que para esos valores de α los operadores están acotados en L^p para todo p entre 1 e infinito. A partir de aquí, se puede utilizar un teorema de interpolación analítica y obtener el rango óptimo de acotación para cada $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

En dimensiones superiores este problema ha sido y sigue siendo estudiado por un gran número de especialistas (véase [7, 2, 14]).

2. El multiplicador del cono y la ecuación de ondas

Por analogía con los multiplicadores de Bochner–Riesz, en los ochenta se definió el multiplicador del cono [16], sustituyendo la singularidad en la esfera por una singularidad en el cono. Consideremos el caso particular de $\mathbb{R}^3$. Dado $\alpha > 0$, para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ se define

$$\widehat{\mathscr{C}^\alpha f}(\xi, \tau) = \left(1 - \frac{|\xi|^2}{\tau^2}\right)_+^\alpha \phi(\tau) \widehat{f}(\xi, \tau),$$

donde $\phi \in \mathscr{C}_0^\infty([1,2])$.

Se conjetura que este multiplicador se comporta (en términos de acotación) como el de Bochner–Riesz en $\mathbb{R}^2$.

$$\|\mathscr{B}^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\alpha,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, \qquad \alpha > \text{máx}\left\{|1 - \tfrac{2}{p}| - \tfrac{1}{2}, 0\right\} := \alpha(p).$$

La razón de esta conjetura es simplemente el hecho de que las secciones de un cono son círculos, y cabría esperar que esto junto con el teorema de Fubini diera como resultado la acotación del operador del cono. Sin embargo, no es así y la conjetura sigue sin resolver.

Este multiplicador está muy ligado a la ecuación de ondas. La solución del problema de valores iniciales $\partial_t^2\phi(x,t) - \Delta_x\phi(x,t) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\phi(0,x) = f(x)$, $\partial_t\phi(0,x) = g(x)$ tiene una descripción muy sencilla en términos de la transformada de Fourier de los datos,

$$\begin{aligned}\phi(x,t) = \frac{1}{2}&\left(\int_{R^n} e^{i(x\cdot\xi+t|\xi|)}\widehat{f}(\xi)\,d\xi + \int_{R^n} e^{i(x\cdot\xi-t|\xi|)}\widehat{f}(\xi)\,d\xi\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\int_{R^n} e^{i(x\cdot\xi+t|\xi|)}\frac{\widehat{g}(\xi)}{2i|\xi|}\,d\xi - \int_{R^n} e^{i(x\cdot\xi-t|\xi|)}\frac{\widehat{g}(\xi)}{2i|\xi|}\,d\xi\right).\end{aligned}$$

Los cuatro operadores que aparecen se pueden interpretar como transformadas de Fourier de medidas soportadas en el cono.

J. C. Peral [18] demostró que para tiempo t fijo, se tiene una acotación (que además es óptima)

$$\|\phi(t,\cdot)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq C\big[\|f\|_{W^{1/4,4}(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{W^{1/4-1,4}(\mathbb{R}^2)}\big].$$

A partir de los trabajos de Mockenhoupt–Seeger–Sogge [17] sobre el multiplicador del cono y el operador maximal circular, se conjeturó que al promediar en tiempo, se produciría una suavización de la solución. En concreto, se conjetura que la solución ϕ de la ecuación de ondas cumple

$$\|\phi\|_{L^p([1,2]\times\mathbb{R}^2)} \leq C\big[\|\phi(0,\cdot)\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_t\phi(0,\cdot)\|_{W^{\alpha-1,p}(\mathbb{R}^2)}\big],$$

para $p \geq 2$, $\alpha > \alpha(p)$. La demostración de esta conjetura depende de la acotación de cierto operador cuadrado asociado al multiplicador del cono.

El primer resultado interesante sobre la acotación del multiplicador del cono se debe a G. Mockenhaupt [16], que demostró que C^α está acotado $L^4(\mathbb{R}^2)$ para $\alpha > \frac{1}{8}$. La conjetura mencionada arriba equivale a la acotación en $L^4(\mathbb{R}^2)$, para todo $\alpha > 0$. Varios autores han conseguido, poco a poco, ampliar el rango de valores de α para el que es válida la acotación L^4 (véase por ejemplo [3, 22]). Wolff [23] demostró que la conjetura es cierta para $p > 74$. Recientemente, Garrigós–Schlag–Seeger [12] han conseguido ampliar este rango hasta $p > 20$ y, por otra parte, han demostrado la acotación en L^4 para $\alpha > \frac{1}{9}$.

3. La estrategia

La mayor parte de los autores ha seguido la línea desarrollada por Fefferman [11], Córdoba [8] en el estudio de los multiplicadores de Bochner–Riesz, que vamos a esbozar aquí. Como ellos, Mockenhoupt descompuso el operador

$$\widehat{\mathscr{C}^\alpha f}(\xi,\tau) = \left(1 - \frac{|\xi|^2}{\tau^2}\right)_+^\alpha \phi(\tau)\widehat{f}(\xi,\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} m_k(|\xi|)\widehat{f}(\xi,\tau),$$

donde cada m_k es una función suave que tiene soporte en $1 - \frac{|\xi|^2}{\tau^2} \sim 2^{-k}$, i.e. $\mathrm{dist}((\xi,\tau),\mathscr{C}) \sim 2^{-k}$, para $\mathscr{C} = \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} :\ |\xi| = \tau\}$.

Denotemos $\widehat{T_{m_k} f} = m_k \widehat{f}$. Para demostrar la acotación en L^4 para todo $\alpha > 0$, es suficiente probar que

$$\|T_{m_k} f\|_{L^4} \leq C\, k^{100} \|f\|_{L^4}.$$

En una segunda fase, se lleva a cabo una segunda descomposición angular. Para cada k escribimos

$$m_k = \sum_{\ell=1}^{2^{k/2}} m_{k,\ell}, \qquad T_{m_k} = \sum T_{m_{k,\ell}},$$

donde cada sumando tiene soporte en un sector angular de amplitud $2^{-k/2}$.

Se conjetura que

$$\|\sum_{\ell} T_{m_{k,\ell}} f\|_{L^4} \le C \|\big(\sum_{\ell} |T_{m_{k,\ell}} f|^2\big)^{1/2}\|_{L^4}.$$

La razón fundamental es que la desigualdad análoga para los multiplicadores de Bochner–Riesz en dimensión 2 fue mostrada por Fefferman y Córdoba en los trabajos arriba citados.

Cada uno de los sumandos es un operador de convolución. Se puede hacer esta descomposición de modo que cada una de las funciones $m_{k,\ell}$ es regular y su transformada de Fourier, $K_{k,\ell}$, resulta ser una función adaptada a un paralelepípedo de dimensiones $2^k \times 2^{k/2} \times 1$, en el sentido de que decae rápidamente fuera de él, además de ser uniformemente integrables. Podemos entonces escribir $T_{m_{k,\ell}} f = K_{k,\ell} * f$.

Suponiendo la acotación de la función cuadrado, podemos proseguir con la acotación del multiplicador.

$$\|\big(\sum_{\ell} |T_{m_{k,\ell}} f|^2\big)^{1/2}\|_{L^4}^2 = \|\sum_{\ell} |T_{m_{k,\ell}} f|^2\|_{L^2} = \|\sum_{\ell} |K_{k,\ell} * f|^2\|_{L^2}.$$

Por dualidad,

$$= \int \sum_{\ell} |K_{k,\ell} * f|^2 \omega$$

para cierta función ω, $\|\omega\|_{L^2} = 1$. Notemos además que si tomamos funciones $f_{k,\ell}$ tales que $\widehat{f} = \widehat{f_{k,\ell}}$ en el soporte de $m_{k,\ell}$, tenemos

$$= \int \sum_{\ell} |K_{k,\ell} * f_{k,\ell}|^2 \omega.$$

Ahora, por la desigualdad de Jensen, la expresión anterior queda acotada por

$$\int \sum_{\ell} |K_{k,\ell}| * |f_{k,\ell}|^2 \omega,$$

que, por el teorema de Fubini

$$= \int \sum_{\ell} |f_{k,\ell}|^2 |K_{k,\ell}| * \omega \le \int \sum_{\ell} |f_{k,\ell}|^2 \mathscr{K}_k * \omega,$$

donde $\mathscr{K}_k = \sup_{\ell} |K_{k,\ell}|$. Usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz acotamos esta expresión por

$$\le \|\sum_{\ell} |f_{k,\ell}|^2\|_{L^2} \|\mathscr{K} * \omega\|_{L^2}.$$

Es bien conocido [16] que $\|\mathscr{K}\omega\|_{L^2} \le Ck\|\omega\|_{L^2} = Ck$, de modo que

$$\le Ck\|\sum_{\ell} |f_{k,\ell}|^2\|_{L^2} = Ck\|\big(\sum_{\ell} |f_{k,\ell}|^2\big)^{1/2}\|_{L^4}^2.$$

Por último, se puede hacer una elección adecuada de las funciones $f_{k,\ell}$ que cumple ([20])

$$\|\big(\sum_{\ell} |f_{k,\ell}|^2\big)^{1/2}\|_{L^4}^2 \le C\|f\|_{L^4}^2.$$

Esto terminaría la demostración de la conjetura. Desafortunadamente, por consideraciones geométricas, Mockenhoupt solamente pudo demostrar

$$\|\sum_{\ell} T_{m_{k,\ell}} f\|_{L^4} \le C2^{\frac{k}{8}} \|\big(\sum_{\ell} |T_{m_{k,\ell}} f|^2\big)^{1/2}\|_{L^4}.$$

Los autores que han tratado este tema posteriormente han ido mejorando la dependencia en k de la constante en esta desigualdad. Garrigós–Schlagg–Seeger [12] mejoraron esa constante hasta $C2^{\frac{k}{9}}$.

La estimación de la función cuadrado tiene una aplicación directa al problema de regularización por promedio de la solución de la ecuación de ondas. Mockenhoupt–Seeger–Sogge [17] demostraron que si

$$\Big\|\sum_{\ell} T_{m_{k,\ell}} f\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C\Big\|\big(\sum_{\ell}|T_{m_{k,\ell}} f|^2\big)^{1/2}\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^2)},$$

entonces, para $\alpha > 0$,

$$\|u\|_{L^q([1,2]\times\mathbb{R}^2)} \leq C\big[\|u(\cdot,0)\|_{W^{\alpha,q}(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_t u(\cdot,0)\|_{W^{\alpha-1,q}(\mathbb{R}^2)}\big].$$

4. Resultado principal

Teorema 4.1 (Sanghyuk Lee, [15])**.**

- *Si* $\alpha > 0$, $\|\mathscr{C}^{\alpha} f\|_3 \leq C\|f\|_3$.
- *Para todo* $\varepsilon > 0$,

$$\Big\|\sum_{\ell} T_{m_{k,\ell}} f\Big\|_{L^3} \leq C_\varepsilon 2^{k\varepsilon}\Big\|\big(\sum_{\ell}|T_{m_{k,\ell}} f|^2\big)^{1/2}\Big\|_{L^3},$$

- *Para* $\beta > 0$,

$$\|u\|_{L^3([1,2]\times\mathbb{R}^2)} \leq C_\beta\big[\|u(\cdot,0)\|_{W^{\beta,3}(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_t u(\cdot,0)\|_{W^{\beta-1,3}(\mathbb{R}^2)}\big].$$

Las afirmaciones primera y tercera son consecuencia de la segunda, como hemos explicado arriba. Para demostrar la segunda afirmación hemos seguido las nuevas ideas del artículo de Bourgain–Guth [4]. En ese artículo, ellos estudian el operador de restricción de la transformada de Fourier a una hipersuperficie. Una herramienta clave en su argumento es el teorema de restricción multilineal demostrado por Bennett-Carbery-Tao [1]. Ese teorema, en el caso particular de $\mathbb{R}^3$, tiene una consecuencia muy interesante para el multiplicador del cono:

Lema 4.1. *Para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una constante* $C_\varepsilon > 0$*, tal que si* f_1*,* f_2*,* f_3 *son funciones cuyas transformadas de Fourier tienen soportes en tres sectores angulares "separados" entonces,*

$$\|\Pi_{j=1}^3 T_{m_k} f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq C_\varepsilon 2^{k\varepsilon}\Pi_{j=1}^3\Big\|\big(\sum_{\ell}|T_{m_{k,\ell}} f_j|^2\big)^{1/2}\Big\|_{L^3(\mathbb{R}^3)},$$

para todo k.

Podemos considerar esta desigualdad como una versión trilineal de la desigualdad de la función cuadrado

$$\|\sum_{\ell} T_{m_{k,\ell}} f\|_{L^3} \leq C_\varepsilon 2^{k\varepsilon}\Big\|\big(\sum_{\ell}|T_{m_{k,\ell}} f|^2\big)^{1/2}\Big\|_{L^3}.$$

La clave en nuestra demostración fue obtener esta desigualdad a partir de la del lema. Después, la estrategia esbozada arriba permite concluir la demostración.

Para terminar esta exposición queremos hacer unos comentarios sobre el teorema de restricción multilineal. Su enunciado es el siguiente.

Teorema 4.2 (Bennett, Carbery, Tao)**.** *Sean* $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$*, hipersuperficies regulares en* $\mathbb{R}^{n+1}$ *y* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}$ *las medidas inducidas por la de Lebesgue en esas hipersuperficies. Supongamos que para cada colección de* $n+1$ *puntos,* $\xi_k \in S_k$*,* $k = 1, 2, \ldots n+1$*, los vectores normales correspondientes a las hipersuperficies* $\{N_k(\xi_k)\}_{k=1}^{n+1}$ *generan* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Entonces*

$$\Big\|\Pi_{j=1}^{n+1}\widehat{f_j d\sigma_j}\Big\|_{L^{q/(n+1)}(B(0,R))} \leq C_\varepsilon R^{\varepsilon}\Pi_{j=1}^{n+1}\|f_j\|_{L^2(S_j)},$$

para todo $\varepsilon > 0$, $q \geq 2\frac{n+1}{n}$.

La prueba de este resultado es extremadamente sofisticada. Podemos ilustrar su sentido mostrando dos casos particulares muy sencillos en el plano.

Lema 4.2. *Consideramos las rectas* $S_1 = \{(\xi,0)\ /\ \xi \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{(0,\eta)\ /\ \eta \in \mathbb{R}\}$ *con sus medidas asociadas* $d\sigma_1 = d\xi$ *y* $d\sigma_2 = d\eta$. *Existe una constante* $C > 0$, *tal que para todo par de funciones* f *y* g *con soportes en* S_1 *y* S_2 *respectivamente, se tiene*

$$\big\|\widehat{fd\sigma_1}\widehat{gd\sigma_2}\big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{L^2(S_1)}\|g\|_{L^2(S_2)}.$$

Queremos hacer notar que si consideramos un único plano, por ejemplo S_1 y con soporte en ese plano, la estimación

$$\big\|\widehat{fd\sigma}\widehat{gd\sigma}\big\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{L^p(S)}\|g\|_{L^p(S)},$$

con constante independiente de las funciones, equivale a la desigualdad

$$\|\widehat{hd\sigma}\|_{L^{2q}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h\|_{L^p(S)},$$

con constante independiente de h, y solo es cierta para $q = \infty$, $p = 1$.

Demostración. Podemos escribir

$$\begin{aligned}\widehat{fd\sigma_1}\widehat{gd\sigma_2}(x,t) &= \int f(\xi)e^{-2\pi i(x,t)\cdot(\xi,0)}\,d\xi \int g(\eta)e^{-2\pi i(x,t)\cdot(0,\eta)}\,d\eta\\ &= \int\int f(\xi)g(\eta)e^{-2\pi i(x,t)\cdot(\xi,\eta)}d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Definimos una nueva función $F(\xi,\eta) = f(\xi)g(\eta)$. Entonces $\widehat{fd\sigma_1}\widehat{gd\sigma_2}(x,t) = \widehat{F}(x,t)$. Utilizando la identidad de Plancherel,

$$\|\widehat{fd\sigma_1}\widehat{gd\sigma_2}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\widehat{F}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|F\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}. \qquad \square$$

Lema 4.3 (C. Fefferman, [9])**.** *Consideramos* $S_1 = \{(\xi,|\xi|^2) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq \xi \leq 1\}$, $S_2 = \{(\xi,|\xi|^2) \in \mathbb{R}^2 :\ 3 \leq \xi \leq 4\}$ *con las medidas* $d\sigma_1 = d\xi$ *y* $d\sigma_2 = d\xi$. *Supongamos que* $\operatorname{supp} f \subset S_1$, $\operatorname{supp} g \subset S_2$. *Entonces*

$$\big\|\widehat{fd\sigma}\widehat{gd\sigma}\big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{L^2(S_1)}\|g\|_{L^2(S_2)}.$$

Observación. Es bien conocido que, si consideramos solo una de las dos superficies, por ejemplo, S_1, la estimación

$$\|\widehat{fd\sigma}\widehat{gd\sigma}\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{L^2(S_1)}\|g\|_{L^2(S_1)}$$

equivale a

$$\|\widehat{hd\sigma}\|_{L^{2q}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h\|_{L^2(S_1)},$$

y es cierta si y solo si $q \geq 6$.

Demostración. Escribimos

$$\begin{aligned}\widehat{fd\sigma}\widehat{gd\sigma}(x,t) &= \int f(\xi_1)^{-2\pi i(x\cdot\xi_1+t\xi_1^2)}d\xi_1 \int g(\xi_2)e^{-2\pi i(x\cdot\xi_2+t\xi_2^2)}d\xi_2\\ &= \int\int f(\xi_1)g(\xi_2)e^{-2\pi i(x\cdot(\xi_1+\xi_2)+t(\xi_1^2+\xi_2^2))}d\xi_1 d\xi_2\\ &= \iint F(u,v)e^{-2\pi i(xu+tv)}du\,dv,\end{aligned}$$

donde hemos hecho un cambio de variables, $u = \xi_1 + \xi_2$, $v = \xi_1^2 + \xi_2^2$ y

$$F(u,v) = \frac{f(\xi_1(u,v),\xi_2(u,v))g(\xi_1(u,v),\xi_2(u,v))}{2|\xi_1(u,v) - \xi_2(u,v)|}.$$

Como antes, utilizamos la identidad de Plancherel,

$$\|\widehat{fd\sigma}\widehat{gd\sigma}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\widehat{F}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|F\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

y deshaciendo el cambio de variable,

$$= \left(\int\int \frac{|f(\xi)|^2|g(\eta)|^2}{4|\xi_1-\xi_2|} d\xi_1\, d\xi_2 \right)^{1/2} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

donde hemos usado que $|\xi_1 - \xi_2| \sim 1$. □

Notemos que la hipótesis sobre los vectores normales a las curvas S_1 y S_2 se traduce en el hecho de que podemos hacer el cambio de variable $(u,v) \to (\xi,\eta)$. Esta sencilla observación sigue siendo válida en dimensiones superiores, pero está lejos de ser suficiente para probar el teorema multilineal de restricción, que requiere técnicas muy diferentes.

Referencias

[1] Bennett, J.; Carbery, A; Tao, T., *On the multilinear restriction and Kakeya conjectures,* Acta Math. **196** (2006), 261–302. MR 2275834.

[2] Bourgain, J., *Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis,* Geom. Funct. Anal. **1** (1991), 147–187. MR 1097257.

[3] Bourgain, J., *Estimates for the cone multipliers*, Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994), 41–60, Oper. Theory Adv. Appl., 77, Birkhäuser, Basel, 1995. MR 1353448.

[4] Bourgain, J.; Guth, L., *Bounds on oscillatory integral operators based on multilinear estimates*, Geom. Funct. Anal. **21** (2011), 1239–1295. MR 2860188.

[5] Carleson, Lennart, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series,* Acta Math. **116** (1966), 135–157. MR 0199631.

[6] Carleson, Lennart; Sjölin, Per, *Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc.* Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, III. Studia Math. 44 (1972), 287–299. MR 0361607.

[7] Christ, M., *Weak Type Endpoint Bounds for Bochner–Riesz Multipliers*. Revista Matemática Iberoamericana **3** (1987), 25–31. MR 1008443.

[8] Córdoba, A., *The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers*, Amer. J. Math. **99** (1977), 1–22. MR 0447949.

[9] Fefferman, C., *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math. **124** (1970), 9–36. MR 0257819.

[10] Fefferman, C., *The multiplier problem for the ball,* Ann. of Math. (2) **94** (1971), 330–336. MR 0296602.

[11] Fefferman, C. *A note on spherical summation multipliers,* Israel J. Math. **15** (1973), 44–52. MR 0320624.

[12] Garrigós, G.; Schlag, W.; Seeger A., *Improvements on Wolff's inequality for the cone multiplier.* Preprint 2010.

[13] Hunt, R. A., *On the convergence of Fourier series.* Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967), 235–255, Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill., 1968. MR 0238019.

[14] Lee, Sanghyuk, *Linear and bilinear estimates for oscillatory integral operators related to restriction to hypersurfaces*. J. Funct. Anal. **241** (2006), no. 1, 56–98. MR 2264247.

[15] Lee, Sanghyuk; Vargas, Ana, *On the cone multiplier in R^3*. J. Funct. Anal. **263** (2012), no. 4, 925–940. MR 2927399.

[16] Mockenhaupt, G. *A note on the cone multiplier,* Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 145–152. MR 1098404.

[17] Mockenhaupt, Gerd; Seeger, Andreas; Sogge, Christopher D., *Wave front sets, local smoothing and Bourgain's circular maximal theorem.* Ann. of Math. (2) **136** (1992), no. 1, 207–218. MR 1173929.

[18] Peral, Juan C., *L^p estimates for the wave equation.* J. Funct. Anal. **36** (1980), no. 1, 114–145. MR 0568979.

[19] Riesz, Marcel, *Sur les fonctions conjuguées,* Math. Z. **27** (1928), no. 1, 218–244. MR 1544909.

[20] Rubio de Francia, José L., *Estimates for some square functions of Littlewood-Paley type.* Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona **27** (1983), no. 2, 81–108. MR 0765844.

[21] Stein, E. M., *On limits of seqences of operators,* Ann. of Math. (2) **74**, 1961, 140–170. MR 0125392.

[22] Tao, T.; Vargas, A., *A bilinear approach to cone multipliers I. Restriction estimates*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), 185–215. MR 1748920.

[23] Wolff, T., *Local smoothing type estimates on L^p for large p*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), 1237–1288. MR 1800068.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, 28049 MADRID, ESPAÑA

E-mail: ana.vargas@uam.es