ACTAS DEL XIII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2015)
2016, Páginas 81–99

# OPERADORES HOMOGÉNEOS Y MONÓTONOS

ADRIANA SAAVEDRA, CECILIA PEREZ, AND MARIANO FERRARI

ABSTRACT. We study homogeneous and monotone functions in the standard positive cone of $\mathbb{R}^n$, in order to show the generalised Perron–Frobenius theorem that guarantees the existence of a positive eigenvector (Gaubert and Gunawardena, 2003). We introduce a slight generalization of power-bounded below functions (Nussbaum, 1986) and we prove, in this case, the uniqueness of the eigenvector and convergence in the Hilbert metric. The developed concepts are interpreted in the context of population dynamics and are applied to a family of functions constructed under addition and composition of power means.

## 1. INTRODUCCIÓN

La teoría de matrices no negativas tiene uno de sus resultados centrales en el teorema de Perron–Frobenius, que garantiza la existencia y unicidad de un autovector positivo. Este teorema fue presentado a principios del siglo XX [15, 8, 1] y su desarrollo ha continuado desde entonces convirtiéndose en uno de los tópicos principales del álgebra lineal, tanto por sus implicaciones conceptuales como por la variedad y relevancia de sus aplicaciones. En este trabajo nos proponemos explorar la generalización del resultado clásico de Perron–Frobenius a operadores homogéneos y monótonos en el cono positivo de $\mathbb{R}^n$. Los trabajos de Nussbaum [13, 14] fueron pioneros en este sentido, mostrando condiciones para la existencia y unicidad del autovector positivo para cierta familia particular de funciones homogéneas y monótonas, en tanto que Gaubert y Gunawardena [9] prueban la existencia para una clase general de operadores. En su trabajo Gaubert y Gunawardena aplican una transformación exponencial-logarítmica que les permite pasar del contexto multiplicativo, que corresponde a la generalización directa de los operadores lineales en el cono positivo de $\mathbb{R}^n$, a un contexto aditivo donde prueban el teorema general y otros resultados asociados. Uno de los objetivos de este trabajo es demostrar el teorema de Perron–Frobenius generalizado [9] directamente en el contexto multiplicativo, para relacionarlo luego con los resultados de unicidad en un marco conceptual común. En las siguientes secciones, luego de un breve repaso de la teoría lineal, estudiaremos las métricas de Thompson y Hilbert y probaremos algunas condiciones que implican la existencia de un autovector positivo. Estos conceptos se encuentran desarrollados en los trabajos antes citados y, con un enfoque más amplio y general, en el libro de Lemmens y Nussbaum [11].

Una de las motivaciones originales de la teoría de operadores homogéneos fue la generalización de los modelos poblacionales lineales clásicos, para incorporar efectos no lineales en demografía y dinámica de poblaciones [4, 14]. En este contexto el autovector positivo representa la estructura de edades estable de la población y el autovalor la tasa de crecimiento o decrecimiento. Sin embargo, como bien señalan Lemmens y Nussbaum [11], el problema de la existencia de un autovector en el interior del cono resulta irreductiblemente difícil si se considera una familia general de operadores homogéneos y monótonos. Los operadores compuestos por medias potenciales y sumas de medias han sido estudiados en este sentido como una primera generalización del caso lineal. En este trabajo introducimos en la

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 47J10; Secondary: 15A48, 92D25.

sección 5 una clase de funciones, a las que llamamos *controladas inferiormente*, que generalizan las funciones acotadas inferiormente por potencias estudiadas en [13] para probar resultados de unicidad del autovector y la convergencia en la métrica de Hilbert. Consideraremos luego una familia de operadores compuestos por medias potenciales, la clase de funciones *MSM* en la sección 6, para la que obtendremos condiciones de existencia y unicidad del autovector positivo (Teorema 13). Estos son aportes originales de este trabajo que generalizan resultados conocidos para otras clases de funciones.

El presente estudio se originó como una tesis de maestría [17] y es nuestra intención que el trabajo resulte autocontenido, ofreciendo un panorama conciso de la teoría de operadores homogéneos y monótonos en el cono positivo de $\mathbb{R}^n$. Pretendemos además remarcar la generalización de los modelos poblacionales como motivación para el desarrollo de la teoría y mostrar algunas de sus aplicaciones y limitaciones en este sentido. Esperamos que el enfoque abordado, junto con las generalizaciones propuestas, motiven futuros estudios en el tema, en particular en cuanto a la caracterización de operadores vinculados al estudio de la dinámica de poblaciones, a través de modelos homogéneos no lineales.

## 2. MATRICES NO NEGATIVAS

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz en $\mathbb{R}^{n\times n}$ no negativa: $a_{ij} \geq 0$. Como es usual denotaremos con $\sigma(A)$ al espectro de $A$, es decir, el conjunto de los autovalores de $A$, y con $r(A)$ al radio espectral de $A$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Ax = \lambda x \text{ para algún } x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0\},$$
$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k},$$

donde la última igualdad es independiente de la elección de la norma matricial.

Denotaremos con $G(A)$ al grafo dirigido asociado a la matriz $A$; éste corresponde a un grafo con $n$ vértices y una flecha de $i$ a $j$ si y solo si $a_{ij} > 0$. Diremos entonces que $A$ es una matriz irreducible si $G(A)$ es un grafo fuertemente conexo, esto es, para cada par de vértices $(i, j)$ existe un camino dirigido de $i$ a $j$ en $G(A)$. Además diremos que $A$ es primitiva si $A^p$ es positiva, $A^p > 0$ para algún $p > 0$. Ya que el grafo $G(A^p)$ corresponde a los caminos de longitud $p$ en el grafo $G(A)$, es decir que existe una flecha de $i$ a $j$ en $G(A^p)$ si y solo si existe un camino compuesto por $p$ flechas en $G(A)$, es claro que si $A$ es primitiva entonces es irreducible.

El teorema de Perron–Frobenius trata sobre la existencia y caracterización de los autovalores positivos de una matiz no negativa irreducible. El enunciado que pretendemos estudiar y generalizar en este trabajo es el siguiente.

**Teorema 1** (Perron–Frobenius para matrices no negativas)**.** *Sea $A$ una matriz no negativa irreducible. Entonces*

1. $\rho = r(A)$ *es un autovalor simple de $A$, asociado a un autovector positivo $v$.*
2. *No existen otros autovectores positivos más que los múltiplos de $v$.*
3. *Si $A$ es primitiva entonces $\rho > |\lambda|$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \rho$ y $\lim_{t\to\infty} \frac{A^t x}{\rho^t} = cv$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ positivo, donde $c > 0$ es una constante que depende de $x$.*

Consideraremos en lo que sigue el cono positivo de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$ y el interior de dicho cono $(\mathbb{R}^n)^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0\}$ junto con la norma 1 como métrica de referencia; recordemos que $\|x\|_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ para $x \in \mathbb{R}^n_+$. Si $f$ es un operador lineal asociado a una matriz $A$, $f(x) = Ax$, es claro que $f$ deja invariante el cono positivo si y solo si $A$ es no negativa. El resultado anterior implica que si $A$ es irreducible entonces $f$ tiene un único autovector positivo $v$ tal que $\|v\|_1 = 1$, asociado al autovalor $\rho = r(A)$, y además si $A$ es primitiva, $\lim_{t\to\infty} \frac{f^t(x)}{\rho^t} = cv$ para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$. En este contexto el teorema de Perron–Frobenius es un resultado sobre operadores lineales en el cono positivo y los sistemas dinámicos asociados. La última afirmación, en particular, asegura que la órbita de cualquier elemento del cono $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ va a tender al crecimiento exponencial de forma proporcional a $v$: $f^t(x) \to \rho^t cv$.

Consideremos el ejemplo clásico de la proyección de una población estructurada por edades. El vector $x^t = (x^t_1, x^t_2, \dots, x^t_n, x^t_{n+1})$ representa la densidad de individuos en el tiempo $t$ para cada clase de edad: $x^t_1$ nacimientos, es decir individuos de edad 0, $x^t_2$ individuos de 1 año, hasta $x^t_{n+1}$ individuos de $n$ años. La proyección de la población en el tiempo $t+1$ puede caracterizarse a través de las supervivencias medias, $p_j$ para $j = 1, \dots, n$, donde $0 < p_j < 1$ representa la probabilidad de que un individuo de edad $j$ sobreviva hasta alcanzar la edad $j+1$, y las fertilidades medias $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n+1$, que representan la densidad media de nacimientos por individuo de edad $j$. Entonces

$$\begin{aligned} x^{t+1}_1 &= \alpha_1 x^t_1 + \alpha_2 x^t_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x^t_{n+1} \quad \text{y} \\ x^{t+1}_{j+1} &= p_j x^t_j \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

o, en forma matricial,

$$x^{t+1} = f(x^t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \\ p_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^t_1 \\ x^t_2 \\ x^t_3 \\ \vdots \\ x^t_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

La matriz de la ecuación anterior se denomina matriz de proyección o matriz de Leslie $(L)$ [12, 3]. Si asumimos que $\alpha_{n+1} > 0$, es decir que solo consideramos las clases de edad potencialmente reproductivas, podemos ver que $L$ es irreducible y, suponiendo además que $\alpha_n > 0$, resulta que $L$ es primitiva. En este contexto demográfico el Teorema 1 se conoce como teorema ergódico fuerte [5]. Cualquiera sea la distribución inicial de edades de la población $(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n, x^0_{n+1})$, la proporción de edades va a estabilizarse, transcurrido cierto tiempo, de forma proporcional al único autovector positivo de $L$, que se conoce como estructura estable de la población, y el número de individuos va a aumentar o disminuir exponencialmente con tasa $\rho = r(L)$.

## 3. Las métricas de Thompson y Hilbert

Para extender la teoría lineal centraremos nuestra atención en el cono positivo e introduciremos algunos conceptos propios de este conjunto. Consideraremos, en primer lugar, la relación de equivalencia $\sim$, sobre $\mathbb{R}^n_+$, definida por: $x \sim y$ si y solo si $x$ e $y$ se anulan en las mismas coordenadas. Es simple observar que $x \sim y$ si y solo si existen constantes reales positivas $0 < \alpha \leq \beta$ tales que $\alpha y \leq x \leq \beta y$, donde $\leq$ representa el orden usual coordenada a coordenada en $\mathbb{R}^n$. Las clases de equivalencia de esta relación se denominan partes $\mathbb{R}^n_+$ y el interior del cono,$(\mathbb{R}^n)^+$, es en particular una clase de equivalencia.

Dado $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq 0$, definimos

$$\begin{aligned} m(x) &= \min_{x_i \neq 0} \{x_i\}, \\ M(x) &= \max_{x_i \neq 0} \{x_i\}. \end{aligned}$$

Consideremos el cociente coordenada a coordenada $x/y = (x_1/y_1, x_2/y_2, \ldots, x_n/y_n)$, cuando $x \sim y$, $y \neq 0$, y definimos entonces las "métricas" de Thompson y Hilbert de la siguiente manera:

$$d_T(x,y) = \max\{\log M(x/y), \log M(y/x)\},$$
$$d_H(x,y) = \log\left(\frac{M(x/y)}{m(x/y)}\right) = \log M(x/y) + \log M(y/x),$$

cuando $x \sim y$, $y \neq 0$; mientras que $d_T(0,0) = d_H(0,0) = 0$ y $d_T(x,y) = d_H(x,y) = +\infty$ para $x \nsim y$.

Observemos que $d_T$ es efectivamente una métrica en cada parte de $\mathbb{R}^n_+$, mientras que $d_H$ es una métrica proyectiva, es decir que cumple

$$d_H(x,y) \geq 0,$$
$$d_H(x,y) = d_H(y,x),$$
$$d_H(x,z) \leq d_H(x,y) + d_H(y,z),$$

para todo $x,y,z \in \mathbb{R}^n_+$ y $d_H(x,y) = 0$ si y solo si $y = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Además $d_H(\alpha x, \beta y) = d_H(x,y)$ si $\alpha, \beta$ son constantes positivas.

Recordemos que $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$es homogéneo y monótono si

- $f(\lambda x) = \lambda x$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n_+$;
- para todo $x,y \in \mathbb{R}^n_+$, si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.

Las métricas de Thompson y Hilbert constituyen herramientas de mucha utilidad para el estudio de este tipo de operadores y han jugado un papel importante en el desarrollo de la teoría.

**Proposición 2.** *Si $f$ es un operador homogéneo y monótono en $\mathbb{R}^n_+$ entonces es no expansivo con respecto a $d_H$ y $d_T$, es decir:*

$$d_H(f(x), f(y)) \leq d_H(x,y) \quad y \quad d_T(f(x), f(y)) \leq d_T(x,y).$$

*Demostración.* Los casos $y = 0$ o $x \nsim y$ son triviales, por lo que asumamos $y \neq 0$ y $x \sim y$; existen entonces constantes positivas $0 < \alpha \leq \beta$ tales que $\alpha y \leq x \leq \beta y$, por ser $f$ homogéneo y monótono $\alpha f(y) \leq f(x) \leq \beta f(y)$, por lo que $f(x) \sim f(y)$. Además para $i \leq n$, $y_i \neq 0$ tenemos que $m(x/y) \leq x_i/y_i \leq M(x/y)$ y en consecuencia

$$m(x/y)y \leq x \leq M(x/y)y.$$

Entonces

$$m(x/y)f(y) \leq f(x) \leq M(x/y)f(y),$$

por lo que $m(x/y) \leq m(f(x)/f(y))$ y $M(f(x)/f(y)) \leq M(x,y)$. La proposición resulta entonces directamente de las definiciones de $d_H$ y $d_T$. ☐

Observemos que si $x$ es un autovector de un operador homogéneo y monótono $f$, asociado al autovalor $\lambda > 0$, entonces $x$ es un punto fijo de $f$ respecto de la métrica proyectiva de Hilbert, ya que $d_H(x, f(x)) = d_H(x, \lambda x) = 0$. Sabemos que $f$ es no expansivo; si para determinado tipo de operadores $f$ fuera además una contracción, podría usarse este hecho para probar la existencia de un punto fijo, es decir un autovector en el cono positivo. Esto fue observado por Birkhoff [2] y Samelson [18] en el contexto más general de operadores lineales que dejan invariante un cono, y abrió la puerta, de hecho, al posterior desarrollo de la teoría no lineal. Supongamos por ejemplo que $f$ es un operador lineal asociado a una matriz positiva: $f(x) = Ax$. Entonces

$$\frac{f(x)_i}{f(y)_i} = \frac{(Ax)_i}{(Ay)_i} = \frac{\sum_j a_{ij}x_j}{\sum_k a_{ik}y_k} = \sum_j \Big(\frac{a_{ij}y_j}{\sum_k a_{ik}y_k}\Big)\frac{x_j}{y_j} = \sum_j p_{ij}\frac{x_j}{y_j},$$

donde $p_{ij} > 0$ y $\sum_j p_{ij} = 1$. Es decir que $f(x)_i/f(y)_i$ es un tipo de promedio de los $x_j/y_j$ y resulta que si $x \neq \alpha y$ entonces

$$m(x/y) < f(x)/f(y) < M(x/y)$$

y $d_H\big(f(x), f(y)\big) < d_H(x,y)$. Si pudiéramos probar que $d_H\big(f(x), f(y)\big) < cd_H(x,y)$ para algún $c < 1$ entonces podríamos usar el principio de contracción para probar la existencia y unicidad del autovector. Esto de hecho es así para matrices positivas y primitivas y esta idea ha sido profundamente estudiada en diferentes contextos; ver Lemmens y Nussbaum [11, Appendix A] para un resumen de los resultados generales sobre operadores que dejan un cono invariante, o Seneta [19] para los resultados sobre matrices no negativas.

Si consideramos en general los autovalores de un operador homogéneo y monótono asociados a autovectores en $\mathbb{R}^n_+$, no necesariamente positivos, la existencia de estos autovectores está garantizada por el teorema del punto fijo de Brouwer. En efecto si asumimos que $f$ es continua y consideramos la esfera unitaria $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \|x\|_1 = 1\}$ podemos aplicar el teorema de Brouwer a $g(x) = f(x)/\|f(x)\|_1$, observando que $g(P) \subseteq P$ y $P$ es un conjunto compacto y convexo en $\mathbb{R}^n$, luego un punto fijo de $g$ es un autovector de $f$. Esto lleva directamente a la consideración del radio espectral de un operador homogéneo y monótono y a la pregunta sobre la existencia de autovectores asociados al radio espectral [13]. En lo que sigue de este trabajo, sin embargo, nos centraremos en el estudio de operadores en el interior del cono para determinar la existencia de un autovector positivo.

## 4. Existencia de un autovector positivo

Sea $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ un operador homogéneo y monótono en el interior del cono positivo; en este caso por la no expansividad de $f$ tenemos que, dados $x, y \in (\mathbb{R}^n)^+$,

$$d_T(f^k(x), f^k(y)) \leq d_T(x,y) = \text{cte.} \in \mathbb{R}^+,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto implica que $f$ es continuo y además existen constantes positivas $c_0, c_1$ (que dependen de $x$ e $y$) tales que

$$c_0 \leq \frac{f^k(x)}{f^k(y)} \leq c_1, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Una consecuencia de (2) es que un operador homogéneo y monótono tiene a lo sumo un autovalor positivo asociado a autovectores en $(\mathbb{R}^n)^+$. En efecto si $x$ e $y$ son autovectores asociados a $\lambda, \mu > 0$ respectivamente, entonces

$$c_0 \leq \frac{f^k(x)}{f^k(y)} = \Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^k \frac{x}{y} \leq c_1\,,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y en consecuencia debe ser $\lambda = \mu$. Es necesario aclarar que la unicidad del autovalor no es necesariamente cierta en $\mathbb{R}^n_+$; de hecho un operador puede tener hasta $2^n - 1$ autovalores distintos en el cono positivo [11, Chapter 5].

Siguiendo el trabajo de Gaubert y Gunawardena [9] vamos a definir el ciclo superior y el ciclo inferior de $f$, conceptos estrechamente relacionados con el radio espectral. Sea $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ el vector con todas sus coordenadas iguales a 1. Observemos que

$$f^{k+l}(\mathbf{1}) = f^k\big(f^l(\mathbf{1})\big) \leq f^k\big(M(f^l(\mathbf{1})).\mathbf{1}\big) = M(f^k(\mathbf{1})).f^l(\mathbf{1}),$$

entonces $M(f^{k+l}(\mathbf{1})) \leq M(f^k(\mathbf{1})).M(f^l(\mathbf{1}))$ y resulta que $M(f^k(\mathbf{1}))$ es una sucesión submultiplicativa. En consecuencia existe el límite

$$\overline{\chi}(f) = \lim_{k\to\infty}\Big[M(f^k(\mathbf{1}))\Big]^{1/k},$$

al que llamamos ciclo superior de $f$. La condición de no expansividad (2) implica en este caso que, dado $x \in (\mathbb{R}^n)^+$, existen constantes $c_0$, $c_1$ tales que $c_0M(f^k(\mathbf{1})) \leq f^k(x) \leq c_1M(f^k(\mathbf{1}))$ para todo $k$; en consecuencia $\overline{\chi}(f) = \lim_{k\to\infty}\Big[M(f^k(x))\Big]^{1/k}$, para cualquier $x \in (\mathbb{R}^n)^+$. Observemos que esta definición del ciclo superior corresponde a la definición del radio espectral de $f$ en $(\mathbb{R}^n)^+$, asociada a la norma del supremo en $\mathbb{R}^n$.

De manera análoga definimos el ciclo inferior de $f$ como

$$\underline{\chi}(f) = \lim_{k\to\infty}\Big[m(f^k(x))\Big]^{1/k},$$

para cualquier $x \in (\mathbb{R}^n)^+$. Si consideramos el operador dual de $f$ definido por $f^-(x) = \big(f(x^{-1})\big)^{-1}$, cuando el recíproco se toma coordenada a coordenada, es simple ver que $\underline{\chi}(f) = \overline{\chi}(f^-)^{-1}$.

**Proposición 3.** *Sea $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ un operador homogéneo y monótono. Entonces:*

*a)* $\overline{\chi}\big(f^l\big) = \big[\overline{\chi}(f)\big]^l$ *para todo* $l \in \mathbb{N}$.
*b)* $\overline{\chi}(f) \leq M\big(f(x)/x\big)$ *y* $m\big(f(x)/x\big) \leq \underline{\chi}(f)$ *para todo* $x \in (\mathbb{R}^n)^+$.
*c) Si* $\lambda > 0$ *es un autovalor de* $f$ *entonces* $\overline{\chi}(f) = \underline{\chi}(f) = \lambda$.

*Demostración.* La primera afirmación sigue directamente de la definición ya que, para cualquier $x \in (\mathbb{R}^n)^+$,

$$\overline{\chi}\left(f^l\right) = \lim_{k\to\infty}\left[M\left(f^{l.k}(x)\right)\right]^{\frac{1}{k}} = \left[\lim_{k\to\infty}\left[M\left(f^{l.k}(x)\right)\right]^{\frac{1}{l.k}}\right]^l = [\overline{\chi}(f)]^l.$$

Para probar la segunda afirmación observemos que, para cualquier $x \in (\mathbb{R}^n)^+$, $f(x) \leq M\big(f(x)\big) = M\big(f(x)/x\big).x$, y entonces

$$f^2(x) \leq M\big(f(x)/x\big).f(x) \leq M\big(f(x)/x\big).M\big(f(x)\big) = M\big(f(x)/x\big)^2.x$$

y en general $f^k(x) \leq M\big(f(x)/x\big)^k.x$, por lo que

$$\big[M\big(f^k(x)\big)\big]^{1/k} \leq M\big(f(x)/x\big).M(x)^{1/k}$$

y en consecuencia $\overline{\chi}(f) \leq M\big(f(x)/x\big)$. El resultado correspondiente al ciclo inferior se prueba de manera similar.

Por último, si $x$ es un autovector asociado a $\lambda$, $f^k(x) = \lambda^k x$, entonces

$$\overline{\chi}(f) = \lim_{k\to\infty}\lambda\Big[M(x)\Big]^{1/k} = \lambda$$

y del mismo modo $\underline{\chi}(f) = \lambda$. □

La afirmación *b*) de esta Proposición es una consecuencia de la fórmula de Collatz–Wielandt: $\overline{\chi}(f) = \inf\big\{M\big(f(x)/x\big) : x \in (\mathbb{R}^n)^+\big\}$, que de hecho vale para operadores homogéneos y monótonos [9]; ofrecemos aquí solo una desigualdad ya que se demuestra en un paso y es suficiente para probar los resultados que siguen. La última afirmación de la proposición anterior nos da una condición necesaria para la existencia de un autovector positivo: que los ciclos superior e inferior sean iguales. Sin embargo es simple ver que esta condición no es suficiente: consideremos por ejemplo el operador lineal asociado a la matriz reducible

$A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a > 0$; resulta que $\overline{\chi}(A) = \underline{\chi}(A) = a$ pero el único autovector de $A$ en $\mathbb{R}^2$ es $(1,0)$. Una condición más fuerte, que garantiza la existencia del autovector positivo, está dada por el siguiente resultado.

**Proposición 4.** *Sea $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ homogéneo y monótono. $\lambda > 0$ es un autovalor de $f$ si y solo si existe $x \in (\mathbb{R}^n)^+$ y constantes $d_0, d_1 > 0$ tales que*

$$d_0 \le m\big(f^k(x)/\lambda^k\big) \le M\big(f^k(x)/\lambda^k\big) \le d_1, \quad \textit{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* $\to$) Si $x$ es un autovector asociado a $\lambda$ entonces $f^k(x)/\lambda^k = x$ y todas las coordenadas están acotadas para todo $k$.

$\leftarrow$) Dados $x \in (\mathbb{R}^n)^+$, $\lambda, d_0, d_1 \in \mathbb{R}^+$ definamos $g = \frac{1}{\lambda} f$. Entonces $g$ es homogéneo y monótono y

$$d_0 \le m(g^k(x)) \le M(g^k(x)) \le d_1, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Sea $u \in (\mathbb{R}^n)^+$ definido por $u_i = \liminf_{k\to\infty} g^k(x)_i$ y veamos que $g(u) \le u$. En efecto, sea $\rho < 1$, entonces para $k$ grande tenemos que $g^k(x) \ge \rho u$, luego $\rho g(u) \le g^{k+1}(x)$ para todo $k$ grande y en consecuencia $\rho g(u) \le u$; como esto vale para cualquier $\rho < 1$ resulta que $g(u) \le u$. Entonces $g^k(u) \le g^{k-1}(u) \le u$, $g^k(u)$ es una sucesión decreciente (coordenada a coordenada) y además está acotada inferiormente como resulta de (3) y la no expansividad (2). Luego existe el límite $v = \lim_{k\to\infty} g^k(u)$ y por continuidad debe ser $g(v) = v$, es decir $f(v) = \lambda v$. □

Una consecuencia no trivial de esta proposición es el siguiente resultado de Gaubert y Gunawardena. Recordemos que la órbita de un operador $f$ en un punto $x \in (\mathbb{R}^n)^+$ es el conjunto $\{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ de los sucesivos transformados de $x$. Observemos que la órbita de $f$ en $x$ está acotada, en la métrica proyectiva de Hilbert, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$d_H(f^k(x), \mathbf{1}) = \log\Big(\frac{M(f^k(x))}{m(f^k(x))}\Big) \le C, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Si $f$ es homogéneo y monótono resulta entonces de la no expansividad (2) que una órbita de $f$ está acotada si y solo si todas las órbitas lo están.

**Teorema 5** (Teorema de las órbitas)**.** *Sea $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ homogéneo y monótono. $f$ tiene un autovector en $(\mathbb{R}^n)^+$, asociado al autovalor $\overline{\chi}(f)$, si y solo si alguna órbita de $f$ está acotada en la métrica proyectiva $d_H$.*

*Demostración.* Si $x$ es un autovector de $f$ con autovalor $\lambda$ el resultado es trivial ya que $d_H(f^k(x), \mathbf{1}) = d_H(\lambda^k x, \mathbf{1}) = d_H(x, \mathbf{1})$ para cualquier $k$ y en consecuencia la órbita de $f$ en $x$ está acotada. Recíprocamente, si una órbita de $f$ está acotada en $d_H$ entonces todas lo están, en particular la órbita en $\mathbf{1}$, es decir que existe $C > 0$ tal que $d_H(f^k(\mathbf{1}), \mathbf{1}) \le C$ para todo $k$. Sea $\lambda = \overline{\chi}(f)$ el ciclo superior de $f$; entonces $d_H(f^k(\mathbf{1})/\lambda^k, \mathbf{1}) = d_H(f^k(\mathbf{1}), \mathbf{1}) \le C$, es decir que existe una constante $C' > 0$ tal que

$$\frac{M\big(f^k(\mathbf{1})/\lambda^k\big)}{m\big(f^k(\mathbf{1})/\lambda^k\big)} \le C', \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Observemos ahora que de la Proposición 3 resulta que

$$M\big(f^k(\mathbf{1})\big) = M\big(f(\mathbf{1})/\mathbf{1}\big) \ge \overline{\chi}(f^k) = \lambda^k \quad \text{y}$$
$$m\big(f^k(\mathbf{1})\big) = m\big(f(\mathbf{1})/\mathbf{1}\big) \le \underline{\chi}(f^k) \le \lambda^k;$$

entonces $M\big(f^k(\mathbf{1})/\lambda^k\big) \geq 1$ y $m\big(f^k(\mathbf{1})/\lambda^k\big) \leq 1$. Combinando estas desigualdades con (4) vemos que

$$\frac{1}{C'} \leq m\big(f^k(\mathbf{1})/\lambda^k\big) \leq M\big(f^k(\mathbf{1})/\lambda^k\big) \leq C', \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

y la existencia de un autovector asociado a $\lambda$ sigue entonces de la proposición anterior. ☐

**Corolario 6.** *$f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ homogéneo y monótono tiene un autovector positivo si y solo si existe un subconjunto $W \subseteq (\mathbb{R}^n)^+$ tal que $f(W) \subseteq W$ y es acotado en la métrica proyectiva de Hilbert, esto es, existe una constante $C$ tal que $d_H(x,\mathbf{1}) \leq C$ para todo $x \in W$.*

*Demostración.* Si existe tal conjunto entonces se aplica el teorema anterior ya que todas las órbitas de $f$ en $W$ estarán contenidas en $W$ y serán acotadas. Recíprocamente, si existe un autovector $x \in (\mathbb{R}^n)^+$ entonces es simple ver que, dado $\varepsilon > 0$, cualquier bola cerrada centrada en $x$, $W = \{y : d_H(x,y) \leq \varepsilon\}$, cumple las condiciones del enunciado. ☐

Con el Teorema de las órbitas y su corolario hemos caracterizado la existencia de un autovector en $(\mathbb{R}^n)^+$. Gaubert y Gunawardena van más allá sin embargo, proponiendo una estructura de grafo dirigido asociado a $f$, que generaliza el grafo dirigido asociado a una matriz no negativa, y permite sintetizar una condición suficiente para la existencia de un autovector que es la reescritura directa del teorema clásico de Perron–Frobenius.

Para $j \in \{1,\ldots,n\}$ y $u \in \mathbb{R}^+$ definimos $u_{\{j\}} = (1,\ldots,1,\overset{j}{\widehat{u}},1\ldots,1) \in (\mathbb{R}^n)^+$. Ahora si $f$ es homogéneo y monótono le asociamos un grafo dirigido $G(f)$ con $n$ vértices y una flecha de $i$ a $j$ si y solo si

$$\lim_{u\to\infty} f_i\big(u_{\{j\}}\big) = \infty.$$

Observemos que si $f$ es un operador lineal asociado a una matriz no negativa $f(x) = Ax$ entonces $G(f) = G(A)$. En la demostración del teorema generalizado vamos a ver que si $G(f)$ es fuertemente conexo entonces ciertos subconjuntos son acotados en la métrica proyectiva de Hilbert. Específicamente, para $\beta > 0$ consideraremos el conjunto $S^\beta(f) = \{x \in (\mathbb{R}^n)^+ : f(x) \leq \beta x\}$ al que denominamos superautoespacio de $f$ correspondiente a $\beta$. Es claro que $S^\beta(f) \neq \emptyset$ para $\beta$ grande: por ejemplo, $\mathbf{1} \in S^\beta(f)$ si $\beta \geq m(f(\mathbf{1}))$; además, como $f$ es homogéneo y monótono, $f(f(x)) \leq \beta f(x)$ si $x \in S^\beta(f)$, por lo que $f(x) \in S^\beta(f)$ y $f\big(S^\beta(f)\big) \subseteq S^\beta(f)$.

**Teorema 7.** *Sea $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ homogéneo y monótono. Si $G(f)$ es fuertemente conexo entonces existe un autovector $x \in (\mathbb{R}^n)^+$ asociado a $\overline{\chi}(f)$.*

*Demostración.* Mostraremos que los superautoespacios de $f$ son acotados en la métrica proyectiva de Hilbert; resultará entonces del corolario del Teorema de las órbitas la existencia del autovector asociado a $\overline{\chi}(f)$. Sea $\beta$ grande tal que el superautoespacio correspondiente $S^\beta(f) = \{x \in (\mathbb{R}^n)^+ : f(x) \leq \beta x\}$ es no vacío; como observamos arriba sabemos además que $f\big(S^\beta(f)\big) \subseteq S^\beta(f)$. Bastará probar que existe una constante $C > 1$ tal que $\frac{M(x)}{m(x)} \leq C$ para todo $x \in S^\beta(f)$, ya que entonces $d_H(x,\mathbf{1}) = \log\big(\frac{M(x)}{m(x)}\big) \leq \log C$ y el superautoespacio estará acotado. Ahora si $x \in S^\beta(f)$ y consideramos $y = \frac{x}{m(x)}$ entonces $y \in S^\beta(f)$, $m(y) = 1$ y $M(y) = \frac{M(x)}{m(x)}$, por lo que alcanza ver que $M(y) \leq C$ para todo $y \in S^\beta(f)$ con $m(y) = 1$. Sea $y$ en esas condiciones y sea $i_0$ tal que $m(y) = y_{i_0} = 1$. Dado $j \neq i_0$ sea $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_t = j$ un camino de $i_0$ a $j$ en $G(f)$ (tal camino existe porque el grafo es fuertemente conexo); entonces

$$f_{i_{s-1}}\big(u_{\{i_s\}}\big) \to \infty \text{ cuando } u \to \infty, \quad \text{para todo } s = 1,\ldots,t. \tag{5}$$

Si reemplazamos la variable $u$ por $y_{i_s}$obtenemos $(y_{i_s})_{\{i_s\}} = (1,\ldots,1,y_{i_s},1,\ldots,1) \leq y$, pues $m(y) = 1$. Entonces $f\Big((y_{i_s})_{\{i_s\}}\Big) \leq f(y) \leq \beta y$, y en consecuencia

$$f_{i_{s-1}}\Big((y_{i_s})_{\{i_s\}}\Big) \leq f_{i_{s-1}}(y) \leq \beta y_{i_{s-1}},$$

para todo $s = 1,\ldots,t$. Tomemos en primer lugar $s = 1$: $f_{i_0}\Big((y_{i_1})_{\{i_1\}}\Big) \leq \beta y_{i_0} = \beta$, y resulta entonces de (5) que existe una constante $C_1$ tal que $y_{i_1} \leq C_1$. Consideremos ahora $s = 2$: $f_{i_1}\Big((y_{i_2})_{\{i_2\}}\Big) \leq \beta y_{i_1} \leq \beta C_1$, por lo que existe una constante $C_2$ tal que $y_{i_2} \leq C_2$. Siguiendo de este modo obtenemos una constante $C_t$ tal que $y_j = y_{i_t} \leq C_t$; es importante observar que esta constante depende del camino elegido de $i_0$ a $j$ pero no del valor de $y$, por lo que es válida para todo $y \in S^\beta(f)$ tal que $y_{i_0} = m(y) = 1$. Tomando finalmente el máximo sobre un conjunto de caminos que permitan conectar dos vértices cualesquiera en $G(f)$, vemos que existe $C > 1$ tal que $M(y) \leq C$ para todo $y \in S^\beta(f)$ con $m(y) = 1$, como queríamos probar. □

Hay algunas preguntas que surgen de esta demostración del teorema y que están exploradas en [9]. Citaremos aquí algunas observaciones sin entrar en los detalles de los enunciados y las demostraciones. En el teorema anterior probamos que si $G(f)$ es fuertemente conexo entonces todos los superautoespacios de $f$ son acotados y esto implica la existencia del autovector positivo. Las recíprocas de estas implicaciones no son verdaderas, es decir que la existencia de un autovector positivo no implica que todos los superautoespacios sean acotados, y a su vez esta condición no garantiza que $G(f)$ sea fuertemente conexo. Sin embargo existe una condición, a verificar sobre $G(f)$, que es equivalente a la acotación de todos los superautoespacios [9, Teoremas 5 y 6] y provee una generalización del teorema anterior. Por otro lado pueden también considerarse los subautoespacios $S_\alpha(f) = \{x \in (\mathbb{R}^n)^+ : \alpha x \leq f(x)\}$, que se corresponden con los superautoespacios del dual $f^-$, y los espacios intermedios $S_\alpha^\beta(f) = S_\alpha(f) \cap S^\beta(f)$. Claramente resultados duales a los enunciados en este trabajo pueden obtenerse para los subautoespacios; para los espacios intermedios entre tanto, existen condiciones que implican su acotación, y en consecuencia la existencia de un autovector positivo (ver [9, Theorem 7] o [11, Theorem 6.3.2]), pero no han podido relacionarse, hasta donde sabemos, con el grafo dirigido $G(f)$.

## 5. Unicidad y convergencia

El Teorema 7, que garantiza la existencia del autovector en $(\mathbb{R}^n)^+$, no dice nada acerca de la unicidad o convergencia en la métrica de Hilbert. Existen distintas condiciones que se han explorado para garantizar estas propiedades del autovector. Si $f$ es diferenciable es natural buscar condiciones en la matriz jacobiana de $f$ en $x$, y en ciertos casos puede caracterizarse la unicidad del autovector en estos términos. Incluso en contextos más generales y sobre otros conos distintos de $(\mathbb{R}^n)^+$ existen distintas condiciones que aseguran la unicidad asumiendo la existencia del autovalor (ver [11]). En esta sección retomaremos la aproximación de Nussbaum en [13], acotando inferiormente $f$ por una familia de funciones particulares. Es nuestra intención abarcar funciones no diferenciables que involucran máximos y mínimos, y asumiremos una condición de superaditividad que, aunque resulta técnica en principio, es esencial en las demostraciones. Comenzaremos introduciendo el concepto de función controlada inferiormente, que generaliza la clase de funciones acotadas por potencias, analizadas por Nussbaum en su trabajo.

Sea $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ homogéneo y monótono. Para $i, j = 1,\ldots,n$ diremos que $f_i$ es *controlada inferiormente* respecto de la coordenada $j$ si existe una función monótona

$\beta : (\mathbb{R}^n)^+ \to \mathbb{R}^+$ y constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} f_i(x) &\geq x_j^a \beta(x), \quad \text{y} \\ \beta(sx) &\geq s^b \beta(x) \quad \text{para todo} x \in (\mathbb{R}^n)^+,\ s \in \mathbb{R}^+, \\ &\text{donde } 0 < a \leq 1,\ 0 \leq b < 1,\ 0 < a+b \leq 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Si $A$ es una matriz no negativa, diremos que $f$ es *controlada inferiormente* con matriz de incidencia $A$ si $a_{ij} > 0$ implica que $f_i$ es controlada inferiormente respecto de $j$.

Diremos que la coordenada $f_i$ es acotada inferiormente por potencias si existe una constante $c > 0$ y un vector de probabilidad $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $0 \leq \sigma_j$, $\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = 1$, tales que

$$f_i(x) \geq c x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}, \quad \text{para todo } x \in (\mathbb{R}^n)^+.$$

Observemos que si $f_i$ es acotada inferiormente por potencias entonces $f_i$ es controlada inferiormente respecto de $j$ si y solo si $\sigma_j > 0$. Observemos además que si $f$ es un operador lineal asociado a una matriz no negativa $f(x) = Ax$ entonces $f$ es controlada inferiormente con matriz de incidencia $A$. Luego esta clase de funciones generaliza las lineales y las acotadas por potencias consideradas en [13]. Resulta también de la definición que si $f_i$ es controlada inferiormente respecto de $j$ entonces existe una flecha de $i$ a $j$ en el grafo $G(f)$; luego si $f$ es controlada inferiormente con matriz de incidencia $A$ tenemos que $G(A) \subseteq G(f)$.

Consideremos el siguiente ejemplo de una función homogénea y monótona en $(\mathbb{R}^3)^+$, donde $a$, $a'$, $b$, $b'$ y $c$ son constantes positivas:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \min\left(a x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}}, a' x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{3}{4}}\right) \\ \min\left(b x_2^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{2}}, b' x_1^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{2}}\right) \\ c x_1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Veamos que $f_1$ no puede ser acotada inferiormente por potencias pero es controlada inferiormente respecto de 2. En efecto, $f_1(x) = a' x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{3}{4}}$ siempre que $a' x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{3}{4}} \leq a x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}}$, es decir $x_3 \leq \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{4}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$; por otro lado $f_1(x) = a x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} < a' x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{3}{4}}$ si $x_3 > \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{4}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$ y en consecuencia no existen $C > 0$ y un vector de probabilidad $\sigma$ tales que $f_1(x) \geq C x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ para todo $x \in (\mathbb{R}^n)^+$. Sin embargo $f_1(x) = x_2^{\frac{1}{4}} \min\left(a x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}}, a' x_3^{\frac{3}{4}}\right)$, y si tomamos $\beta(x) = \min\left(a x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}}, a' x_3^{\frac{3}{4}}\right)$ resulta que $\beta(sx) = s^{\frac{3}{4}} \beta(x)$, por lo que $f_1$ es controlada inferiormente respecto de 2. De modo similar vemos que $f_2$ es controlada inferiormente respecto de 3, aunque no es acotada por potencias, y es trivial que $f_3$ es controlada inferiormente respecto de 1; en este caso es además acotada por potencias. Luego $f$ es controlada inferiormente con matriz de incidencia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sean $f$, $g$ funciones homogéneas y monótonas y supongamos que $f$ es controlada inferiormente con matriz de incidencia $A$. Es trivial observar que si $f \leq g$ entonces $g$ es controlada inferiormente con matriz $A$, y en particular $f + g$ es controlada inferiormente con matriz $A$. Por otro lado es importante determinar que la composición de funciones controladas inferiormente también lo es, como expresa el siguiente lema.

**Lema 8.** *Sean $f$, $g$ funciones homogéneas y monótonas controladas inferiormente con matrices de incidencia $A$ y $B$ respectivamente. Entonces $h = f \circ g$ es controlada inferiormente con matriz de incidencia $AB$.*

*Demostración.* Si la entrada $i, j$ de la matriz $AB$ es positiva existe $k$ tal que la entrada $i,k$ de la matriz $A$ y la entrada $k, j$ de la matriz $B$ son positivas; entonces $f_i$ es controlada inferiormente respecto de $k$ y $g_k$ es controlada inferiormente respecto de $j$. Sean $\beta, \beta_1$ funciones monótonas tales que, para todo $x \in (\mathbb{R}^n)^+$,

$$f_i(x) \geq x_k^a \beta(x), \quad \beta(sx) \geq s^b \beta(x),$$
$$g_k(x) \geq x_j^{a_1} \beta_1(x), \quad \beta_1(sx) \geq s^{b_1} \beta_1(x),$$

donde $\beta$ y $a, b$ satisfacen las condiciones de (6) y del mismo modo $\beta_1$ y $a_1, b_1$. Combinando estas dos ecuaciones evaluemos

$$h_i(x) = f_i(g(x)) \geq g_k(x)^a \beta(g(x)) \geq \left(x_j^{a_1} \beta_1(x)\right)^a \beta(g(x))$$
$$\geq x_j^{a_1 a} \beta_1(x)^a \beta(g(x)).$$

Si denotamos $a_2 = a_1 a$, $b_2 = b_1 a + b$ y $\beta_2(x) = \beta_1(x)^a \beta(g(x))$ tenemos que $h_i(x) \geq x_j^{a_2} \beta_2(x)$ y $\beta_2$ es monótona, donde

$$\beta_2(sx) = \beta_1(sx)^a \beta(sg(x)) \geq \left(s^{b_1} \beta_1(x)\right)^a s^b \beta(g(x)) = s^{b_2} \beta_2(x);$$

además $0 < a_2 \leq 1$, $0 \leq b_2 = b_1 a + b < a + b \leq 1$ y

$$0 < a_2 + b_2 = (a_1 + b_1)a + b \leq a + b \leq 1.$$

Luego $h_i$ es controlada inferiormente respecto de $j$, como queríamos probar. □

Diremos que $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ es *superaditiva* si $f(x) + f(y) \leq f(x+y)$ para todo $x, y \in (\mathbb{R}^n)^+$. Es claro que las funciones lineales son superaditivas y observemos que la suma y la composición de funciones homogéneas y monótonas superaditivas también son superaditivas.

El próximo teorema caracteriza la existencia, unicidad y convergencia del autovector positivo para operadores controlados inferiormente y superaditivos. La demostración sigue esencialmente la provista en Nussbaum [13, Theorems 4.1, 4.2], pero la generalización de los resultados para funciones controladas inferiormente presenta ciertos detalles de cuidado y por eso la presentamos aquí de manera completa. En el siguiente lema resumimos un resultado marginal que será de utilidad durante la demostración.

**Lema 9.** *Dados $\delta_0, \delta_1$ tales que $0 < \delta_0 \leq 1 \leq \delta_1$, sean $d, \varepsilon$ tales que $0 < d \leq 1$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{1-d}\left(\frac{\delta_0}{\delta_1 - \delta_0}\right)^d$ y consideremos:*

$$C(\delta) = \delta - \varepsilon(\delta_1 - \delta_0)^d (\delta - \delta_1)^{1-d}, \quad \underline{C} = \inf\{C(\delta), \delta_1 < \delta < \delta_1 + 1\},$$
$$C'(\delta) = \delta + \varepsilon(\delta_1 - \delta_0)^d (\delta_0 - \delta)^{1-d}, \quad \overline{C'} = \sup\{C'(\delta), 0 < \delta < \delta_0\}.$$

*Resulta que existen constantes positivas $\underline{\theta}, \overline{\theta}$, que no dependen de $\delta_0, \delta_1$, tales que*

$$\underline{C} \leq \delta_1 - \underline{\theta}(\delta_1 - \delta_0) \quad y \quad \overline{C'} \geq \delta_0 + \overline{\theta}(\delta_1 - \delta_0).$$

*Demostración.* Si $d = 1$ las cotas se obtienen tomando $\delta \to \delta_1$en $C(\delta)$ y $\delta \to \delta_0$ en $C'(\delta)$. Si $d < 1$ consideremos $\delta = \delta_1 + (\delta_1 - \delta_0)((1-d)\varepsilon)^{\frac{1}{d}}$; observemos que $\delta_1 < \delta < \delta_1 + 1$ ya que en $\varepsilon < \frac{1}{1-d}\left(\frac{\delta_0}{\delta_1 - \delta_0}\right)^d \leq \frac{1}{1-d}\left(\frac{1}{\delta_1 - \delta_0}\right)^d$ y reemplazando este valor de $\delta$ en $C$ obtenemos

$$\underline{C} \leq C(\delta) = \delta_1 - \frac{d}{1-d}((1-d)\varepsilon)^{\frac{1}{d}}(\delta_1 - \delta_0) \quad \text{y} \quad \underline{\theta} = \frac{d}{1-d}((1-d)\varepsilon)^{\frac{1}{d}}.$$

De manera similar obtenemos $\overline{\theta}$ tomando $\delta = \delta_0 - (\delta_1 - \delta_0)((1-d)\varepsilon)^{\frac{1}{d}}$ en $C'$. $\square$

**Teorema 10.** *Sea $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$ homogénea y monótona y supongamos que $f$ es controlada inferiormente con matriz de incidencia $A$.*

*a) Si es $A$ irreducible entonces $f$ tiene un autovector en $(\mathbb{R}^n)^+$.*
*b) Si $A$ irreducible y además $f$ es superaditiva, el autovector es único a menos de múltiplos escalares.*
*c) Si $A$ es primitiva y $f$ es superaditiva entonces existe un único autovector $u \in (\mathbb{R}^n)^+$, con $\|u\|_1 = 1$, y además si $g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|_1}$, entonces $g^k(u) \to u$ cuando $k \to \infty$ para todo $x \in (\mathbb{R}^n)^+$.*

*Demostración.* $a$) La existencia del autovector es consecuencia directa del Teorema 7, ya que $G(A) \subseteq G(f)$ y $G(A)$ es fuertemente conexo por ser $A$ irreducible.

$b$) Supongamos que existen $x, y$ no múltiplos escalares tales que $f(x) = \lambda x$ y $f(y) = \lambda y$. Sea $\delta_0 = m\left(\frac{y}{x}\right)$ y sean $i, j$ tales que $\delta_0 = \frac{y_i}{x_i} < \frac{y_j}{x_j}$. Como $A$ es irreducible existe $p$ tal que la entrada $i, j$ de la matriz $A^p$ es positiva. Sabemos además por el Lema 8 que $f^p$es controlada inferiormente con matriz de incidencia $A^p$, luego $f_i^p$ es controlada inferiormente respecto de $j$. Como $f^p$ es además superaditiva, para $0 < \delta < \delta_0$ tenemos

$$\lambda^p y = f^p(y) = f^p(y - \delta x + \delta x) \geq f^p(y - \delta x) + f^p(\delta x) = f^p(y - \delta x) + \delta \lambda^p x,$$

y evaluando en la coordenada $i$ resulta $f_i^p(y - \delta x) \leq (\delta_0 - \delta)\lambda^p x_i$. Por otro lado si $\beta$ y $a, b$ son los de la definición de controlada inferiormente (6),

$$\begin{aligned} f_i^p(y - \delta x) &\geq (y_j - \delta x_j)^a \beta(y - \delta x) \geq (y_j - \delta_0 x_j)^a \beta((\delta_0 - \delta)x) \\ &\geq (y_j - \delta_0 x_j)^a (\delta_0 - \delta)^b \beta(x), \end{aligned}$$

ya que $\delta < \delta_0$, $y \geq \delta_0 x$, y $\beta$ es monótona. Combinando estas dos desigualdades obtenemos

$$(y_j - \delta_0 x_j)^a (\delta_0 - \delta)^b \beta(x) \leq (\delta_0 - \delta)\lambda^p x_i,$$

y resulta entonces que existe una constante $C > 0$ tal que $C \leq (\delta_0 - \delta)^{1-b}$ para todo $0 < \delta < \delta_0$, lo que es absurdo porque $b < 1$; luego el autovector es único.

$c$) Si $A$ es primitiva es en particular irreducible, por lo que, de acuerdo con $b$), existe un único autovector $u$ de norma 1. Sea $R > 0$ y consideremos $B_R(u) = \{x \in (\mathbb{R}^n)^+ : \|x\|_1 = 1 \text{ y } d_H(x, u) \leq R\}$; observemos que

$$d_H(f(x), u) = d_H(f(x), \lambda u) = d_H(f(x), f(u)) \leq d_H(x, u) \leq R$$

para todo $x \in B_R(u)$, lo que implica $d_H(f^m(x), u) \leq R$ para todo $m > 0$. Vamos a mostrar que existen constantes $M > 0$ y $0 < k < 1$ tales que, para todo $m > 0$ y $x \in B_R(u)$, tenemos

$$d_H(g^m(x), u) = d_H(f^m(x), u) \leq k^m M,$$

y como esto vale para cualquier $R > 0$ y podemos considerar

$$d_H(g^m(x), u) = d_H(g^m(x/\|x\|_1), u)$$

para cualquier $x \in (\mathbb{R}^n)^+$, quedará probado el enunciado.

Como $A$ es primitiva existe $p > 0$ tal que $A^p > 0$, y ya que $A^p$ es matriz de incidencia para $f^p$ tenemos que $f_i^p$es controlada inferiormente respecto de $j$ para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, n$. Sea $x \in B_R(u)$ no múltiplo de $u$ y consideremos

$$m(x/u) = \frac{x_{j_0}}{u_{j_0}} = \delta_0, \quad M(x/u) = \frac{x_{j_1}}{u_{j_1}} = \delta_1.$$

Observemos que, ya que $\|x\|_1 = \|u\|_1 = 1$, resulta $0 < \delta_0 \leq 1 \leq \delta_1$ y además, como $\log \frac{\delta_1}{\delta_0} \leq R$, tenemos que

$$\delta_1 - \delta_0 = \delta_0(\tfrac{\delta_1}{\delta_0} - 1) \leq \delta_0(e^R - 1) \quad \text{y}$$
$$\frac{\delta_0}{\delta_1 - \delta_0} \geq \frac{1}{e^R - 1}.$$

Sea $\delta$ tal que $\delta_0 < \delta_1 < \delta < \delta_1 + 1$. Dado que $f^p$ es superaditiva tenemos

$$f^p(\delta u) = f^p(\delta u - x + x) \geq f^p(\delta u - x) + f^p(x) \quad \text{y}$$
$$f^p(x) \leq \delta f^p(u) - f^p(\delta u - x).$$

Sabemos además que, para cada $i = 1, \ldots, n$, $f_i^p$ es controlada inferiormente respecto de $j_0$. Sean entonces $\beta_0$ y $a_0$, $b_0$ los de la definición de controlada inferiormente (6), y evaluemos

$$\begin{aligned} f_i^p(\delta u - x) &\geq (\delta u_{j_0} - x_{j_0})^{a_0} \beta_0(\delta u - x) \geq (\delta u_{j_0} - \delta_0 u_{j_0})^{a_0} \beta_0(\delta u - \delta_1 u) \\ &\geq (\delta - \delta_0)^{a_0} u_{j_0}^{a_0} (\delta - \delta_1)^{b_0} \beta_0(u) \\ &\geq m(u)^{a_0} \beta_0(u)(\delta - \delta_0)^{a_0} (\delta - \delta_1)^{1-a_0}, \end{aligned}$$

ya que $b_0 \leq 1 - a_0$ y $\delta - \delta_1 < 1$. Sea $d = \min a$, donde el mínimo se toma sobre todas las constantes $a$ de (6) correspondientes a que $f_i^p$es controlada inferiormente respecto de $j$, $i, j = 1, \ldots, n$, y consideremos también $\varepsilon$ pequeño tal que $\varepsilon f_i^p(u) \leq m(u)^a \beta(u)$ para todo $i$ y cualesquiera sean $\beta, a$ correspondientes a que $f_i^p$es controlada inferiormente respecto de $j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Podemos ver entonces que $(\delta - \delta_0)^{a_0} (\delta - \delta_1)^{1-a_0} = (\delta - \delta_1) \left(\frac{\delta - \delta_0}{\delta - \delta_1}\right)^{a_0} \geq (\delta - \delta_1) \left(\frac{\delta - \delta_0}{\delta - \delta_1}\right)^{d}$ y en consecuencia

$$f^p(\delta u - x) \geq \varepsilon (\delta_1 - \delta_0)^d (\delta - \delta_1)^{1-d} f^p(u),$$

para todo $x \in B_R(u)$. Observemos además que, asumiendo $\varepsilon < \frac{1}{1-d}\left(\frac{1}{e^R - 1}\right)^d \leq \frac{1}{1-d}\left(\frac{\delta_0}{\delta_1 - \delta_0}\right)^d$, estamos en las condiciones del Lema 9 donde las constantes $d, \varepsilon > 0$ son las mismas para todo $x \in B_R(u)$. Combinando esta desigualdad con la anteriormente obtenida para $f^p(x)$ resulta, para todo $x \in B_R(u)$ y $\delta_1 < \delta < \delta_1 + 1$,

$$f^p(x) \leq \big(\delta - \varepsilon(\delta_1 - \delta_0)^d (\delta - \delta_1)^{1-d}\big) f^p(u) = C(\delta) f^p(u), \quad \text{y entonces}$$
$$f^p(x) \leq \underline{C} \lambda^p u,$$

donde $C(\delta)$ y $\underline{C}$ se definen como en el Lema 9. Obtuvimos así una cota superior para $f^p(x)$. Para obtener una cota inferior consideremos ahora $0 < \delta < \delta_0$; entonces

$$f^p(x) = f^p(x + \delta u - \delta u) \geq \delta f^p(u) + f^p(x - \delta u).$$

Procediendo igual que antes para acotar inferiormente $f^p(x - \delta u)$ obtenemos, fijando $\varepsilon$ pequeño, que para todo $x \in B_R(u)$ y $0 < \delta < \delta_0$,

$$f^p(x) \geq \big(\delta + \varepsilon(\delta_1 - \delta_0)^d (\delta_0 - \delta)^{1-d}\big) f^p(u) = C'(\delta) f^p(u) \quad \text{y}$$
$$f^p(x) \geq \overline{C'} \lambda^p u,$$

donde $C'(\delta)$ y $\overline{C'}$ corresponden a las del Lema 9. Resulta entonces que existen constantes positivas $\underline{\theta}, \overline{\theta}$, que solo dependen de $\varepsilon$ y $d$, tales que

$$\big(\delta_0 + \overline{\theta}(\delta_1 - \delta_0)\big) \lambda^p u \leq f^p(x) \leq \big(\delta_1 - \underline{\theta}(\delta_1 - \delta_0)\big) \lambda^p u,$$

para todo $x \in B_R(u)$. Aplicando estas desigualdades podemos acotar

$$d_H(f^p(x),u) = \log\left(\frac{M(f^p(x)/u)}{m(f^p(x)/u)}\right) \leq \log\left(\frac{\delta_1 - \underline{\theta}(\delta_1-\delta_0)}{\delta_0 + \overline{\theta}(\delta_1-\delta_0)}\right) \quad \text{y}$$

$$d_H(f^p(x),u) \leq \log\left(\frac{\alpha - \underline{\theta}(\alpha-1)}{1+\overline{\theta}(\alpha-1)}\right),$$

tomando $\alpha = \frac{\delta_1}{\delta_0}$, es decir $\log\alpha = d_H(x,u)$. Observemos que $\frac{\alpha-\underline{\theta}(\alpha-1)}{1+\overline{\theta}(\alpha-1)} < \alpha$ y $\alpha > 1$; entonces existe un $0 < k < 1$ tal que $\frac{\alpha-\underline{\theta}(\alpha-1)}{1+\overline{\theta}(\alpha-1)} < \alpha^{k^p}$ y en consecuencia

$$d_H(f^p(x),u) < \log\alpha^{k^p} = k^p d_H(x,u)$$

para todo $x \in B_R(u)$. Ahora para cualquier $m > 0$ consideremos la división entera $m = qp + r$, $0 \leq r < p$; entonces

$$d_H(f^m(x),u) < k^{qp} d_H(f^r(x),u) < k^m \frac{R}{k^r} < k^m \frac{R}{k^p},$$

para todo $x \in B_R(u)$, como queríamos probar. □

## 6. Ejemplos de aplicación

En esta sección consideraremos operadores compuestos por medias potenciales, que son en parte motivadores del desarrollo de la teoría presentada, principalmente como generalización de los modelos poblacionales clásicos en la consideración de efectos no lineales pero conservando la homogeneidad [4, 3, 7].

Dado $r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ y un vector de probabilidad $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $0 \leq \sigma_j$, $\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = 1$, definimos la $(r,\sigma)$ media en $(\mathbb{R}^n)^+$ como

$$M_{r\sigma}(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j x_j^r\right)^{1/r},$$

observando que

$$M_{0\sigma}(x) = \lim_{r\to 0} M_{r\sigma}(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\sigma_j},$$
$$M_{(-\infty)\sigma}(x) = \lim_{r\to -\infty} M_{r\sigma}(x) = \min\{x_i : \sigma_i > 0\},$$
$$M_{(+\infty)\sigma}(x) = \lim_{r\to +\infty} M_{r\sigma}(x) = \max\{x_i : \sigma_i > 0\}$$

corresponden, respectivamente, a la media geométrica, mínimo y máximo. Son de particular interés los operadores cuyas coordenadas son sumatorias de medias potenciales. En general definimos $N : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^m)^+$ a partir de los siguientes elementos: para $k = 1, \ldots, m$ sea $\Gamma_k$ una colección finita de pares ordenados $(r,\sigma)$, donde $r \in \mathbb{R}^*$ y $\sigma$ es un vector de probabilidad, y sean $c_{kr\sigma}$ constantes positivas; entonces

$$N_k(x) = \sum_{(r,\sigma)\in\Gamma_k} c_{kr\sigma} M_{r\sigma}(x). \tag{8}$$

Recordando la desigualdad entre medias, si $r < s$ entonces $M_{r\sigma}(x) \leq M_{s\sigma}(x)$ [10]; vemos en particular que $M_{r\sigma}(x) \geq x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$ para todo $r \geq 0$. Resulta entonces que $N_k$ es acotada inferiormente por potencias, y además controlada inferiormente respecto de $j$, si y solo si $\sigma_j > 0$ para algún $(r,\sigma) \in \Gamma_k$ tal que $r \geq 0$. Por otro lado sabemos que $M_{r\sigma}(x)$ es superaditiva si y solo si $r \leq 1$ [10]. Entonces los resultados de la sección anterior solo pueden aplicarse directamente a este tipo de operadores si $r \leq 1$ para todo $(r,\sigma) \in \Gamma_k$, $k = 1, \ldots, m$, para garantizar la superaditividad, y hay además suficiente cantidad de potencias positivas $r > 0$ como para que el operador sea controlado inferiormente con matriz de incidencia irreducible o primitiva. Como veremos más adelante y está analizado en Nussbaum [13], la condición $r \leq 1$ puede debilitarse aplicando una transformación simple; sin embargo la carencia de potencias positivas es más difícil de tratar y de hecho cuando $r < 0$ para todo $(r, \sigma) \in \Gamma_k$ el grafo asociado $G(N)$ es en general totalmente disconexo, i.e., no existen flechas entre vértices distintos [11].

Como generalización de este tipo de operadores consideraremos una clase de funciones que llamaremos *MSM*. Sea $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to \mathbb{R}^+$ definida como

$$f(x) = cM_{s\delta}(N(x)) = c\left(\sum_{k=1}^{m} \delta_k N_k(x)^s\right)^{1/s}, \tag{9}$$

donde $c$ es una constante positiva, $M_{s\delta}$ es una $(s, \delta)$ media en $(\mathbb{R}^m)^+$ y $N : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^m)^+$ está definido como en (8). Asumiremos además que $-\infty \leq s < +\infty$ y $-\infty \leq r < +\infty$ para todo $r$ tal que $(r, \sigma) \in \Gamma_k$, $k = 1, \dots, m$. Diremos entonces que $f$ es de la clase *MSM* y en general, para $f : (\mathbb{R}^n)^+ \to (\mathbb{R}^n)^+$, diremos que es de la clase *MSM* si todas sus funciones coordenadas lo son. Es de particular interés el caso cuando $s < 0$, y en particular $s = -\infty$, ya que en este caso las funciones resultantes no son diferenciables y no puede aplicarse en general el concepto de acotada inferiormente por potencias; por ejemplo, el operador descripto en (7) pertenece a la clase *MSM*. La siguiente proposición proporciona algunas condiciones simples para determinar si un operador de la clase *MSM* es controlado inferiormente y construir una matriz de incidencia.

**Proposición 11.** *Sea $f$ una función homogénea y monótona en la clase MSM. Sea $A$ una matriz no negativa tal que $a_{ij} > 0$ implica:*

- *si $f_i(x) = cM_{s\delta}(N(x))$ con $s < 0$ entonces para cada $k$ tal que $\delta_k > 0$ existe un $(r, \sigma) \in \Gamma_k$ tal que $r \geq 0$ y $\sigma_j > 0$,*
- *si $f_i(x) = cM_{s\delta}(N(x))$ $s \geq 0$ entonces para algún $k$ tal que $\delta_k > 0$ existe un $(r, \sigma) \in \Gamma_k$ tal que $r \geq 0$ y $\sigma_j > 0$.*

*Entonces $f$ es controlada inferiormente con matriz de incidencia $A$.*

*Demostración.* Supongamos que $a_{ij} > 0$ y veamos que $f_i(x) = cM_{s\delta}(N(x))$ es controlada inferiormente respecto de $j$. Si $s < 0$, para cada $k$ tal que $\delta_k > 0$ elijamos $(r, \sigma) \in \Gamma_k$ tal que $r \geq 0$ y $\sigma_j > 0$; entonces

$$N_k(x) \geq c_{kr\sigma} M_{r\sigma}(x) \geq c_{kr\sigma} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}.$$

Si denotamos con $a$ al mínimo de los $\sigma_j$ resulta

$$\begin{aligned} f_i(x) &= cM_{s\delta}(N(x)) \\ &\geq c \min_{\{k:\delta_k>0\}} N_k \geq c\Big(\min_{\{k:\delta_k>0\}} c_{kr\sigma} x_1^{\sigma_1} \dots x_j^{\sigma_j - a} \dots x_n^{\sigma_n}\Big) x_j^a, \end{aligned}$$

y vemos que $f_i$ es controlada inferiormente respecto de $j$ tomando

$$\beta(x) = c \min_{\{k:\delta_k>0\}} c_{kr\sigma} x_1^{\sigma_1} \dots x_j^{\sigma_j - a} x_n^{\sigma_n},$$

y $a$, $b = 1 - a$ en la definición de controlada inferiormente (6).

Si $s \geq 0$ entonces

$$f_i(x) \geq cN_1(x)^{\delta_1} \dots N_m(x)^{\delta_m}.$$

Para algún $k$ tal que $\delta_k > 0$ elijamos $(r,\sigma) \in \Gamma_k$ tal que $r \geq 0$ y $\sigma_j > 0$; entonces $N_k(x) \geq c_{kr\sigma} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$ y

$$f_i(x) \geq c \prod_{l \neq k} N_l(x)^{\delta_l} \big(c_{kr\sigma} \prod_{h \neq j} x_h^{\sigma_h}\big)^{\delta_k} x_j^{\sigma_j \delta_k}.$$

Vemos entonces que $f_i$ es controlada inferiormente respecto de $j$ tomando

$$\beta(x) = c \prod_{l \neq k} N_l(x)^{\delta_l} \big(c_{kr\sigma} \prod_{h \neq j} x_h^{\sigma_h}\big)^{\delta_k},$$

$a = \sigma_j \delta_k > 0$ y $b = 1 - a$ en la definición (6), ya que, como las funciones $N_l$ son homogéneas y monótonas, es fácil ver entonces que $\beta(sx) = s^{1-\sigma_j\delta_k}\beta(x)$. □

Como observamos antes, las funciones de la clase *MSM* no son en general superaditivas a menos que $s \leq 1$ y $r \leq 1$ para todo $r$ tal que $(r,\sigma) \in \Gamma_k$, $k = 1,\ldots,m$; sin embargo cualquier función de la clase *MSM* puede transformarse en una superaditiva manteniendo la matriz de incidencia. Para $t > 0$ consideraremos en el siguiente lema operadores de la forma $h(x) = \big(f(x^t)\big)^{1/t}$ donde las potencias se toman coordenada a coordenada, es decir $h_i(x) = \big(f_i(x_1^t,\ldots,x_n^t)\big)^{1/t}$; claramente si $f$ es homogéneo y monótono entonces $h$ también lo es.

**Lema 12.** *Sea $f$ una función homogénea y monótona en la clase MSM.*

*a) Sea $0 < t \leq 1$ y supongamos que si $f_i(x) = cM_{s\delta}(N(x))$, entonces $ts \leq 1$ y $tr \leq 1$ para todo $(r,\sigma) \in \Gamma_k$, $k = 1,\ldots,m$. Entonces $h(x) = \big(f(x^t)\big)^{1/t}$ es una función homogénea y monótona y es además superaditiva.*

*b) Si $f$ es controlada inferiormente con matriz de incidencia $A$ y $t > 0$ entonces $h(x) = \big(f(x^t)\big)^{1/t}$ también es controlada inferiormente con matriz de incidencia $A$.*

*Demostración.* $a$) Para probar que $h$ es superaditiva veamos que

$$h_i(x) = \Big(cM_{s\delta}(N(x^t))\Big)^{1/t} = c^{1/t}\left(\sum_{k=1}^{m} \delta_k \Big(N_k(x^t)^{1/t}\Big)^{ts}\right)^{1/ts}$$
$$= c^{1/t} M_{ts\delta}\Big(N_k(x^t)^{1/t}\Big);$$

observemos que entonces $M_{ts\delta}(x)$ es superaditiva ya que $ts \leq 1$ y es simple probar también que $N_k(x^t)^{1/t}$, definida como en (8), es superaditiva si $t$ verifica las condiciones del enunciado [13, Corollary 4.1]. Resulta entonces, por ser composición de funciones superaditivas, que $h$ también lo es.

$b$) Supongamos que $f_i$ es controlada inferiormente respecto de $j$; entonces $f_i(x) \geq x_j^a \beta(x)$ de acuerdo a (6) y entonces

$$h_i(x) \geq \big(x_j^{ta}\beta(x^t)\big)^{1/t} = x_j^a \big(\beta(x^t)\big)^{1/t},$$

y $h_i$ es controlada inferiormente respecto de $j$ ya que

$$\big(\beta((sx)^t)\big)^{1/t} = \big(s^{tb}\beta(x^t)\big)^{1/t} = s^b \big(\beta(x^t)\big)^{1/t}. \qquad \square$$

Observemos que si $f,g : (\mathbb{R}^n)^+ \to \mathbb{R}^+$ son funciones tales que $\big(f(x^t)\big)^{1/t}$ y $\big(g(x^t)\big)^{1/t}$ son superaditivas para algún $0 < t \leq 1$ entonces la suma $h(x) = f(x) + g(x)$ también verifica que

$\big(h(x^t)\big)^{1/t}$ es superaditiva. En efecto

$$\begin{aligned}\big(h(x^t)\big)^{1/t} &= \big(f(x^t)+g(x^t)\big)^{1/t} = \Big(\big(f(x^t)^{1/t}\big)^t + \big(g(x^t)^{1/t}\big)^t\Big)^{1/t}\\ &= 2^{1/t} M_{\bullet}\Big(\big(f(x^t)\big)^{1/t}, \big(g(x^t)\big)^{1/t}\Big),\end{aligned}$$

donde $M_{\bullet}$ es la media $M_{t(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ en $(\mathbb{R}^2)^+$, que es superaditiva porque $t \leq 1$ y luego $\big(h(x^t)\big)^{1/t}$ es superaditiva por ser composición de funciones superaditivas. De modo parecido puede verse también que la composición $h = f \circ g$ también satisface que $\big(h(x^t)\big)^{1/t}$ es superaditiva.

El lema anterior y las últimas observaciones permiten enunciar el siguiente resultado general sobre funciones de la clase *MSM*.

**Teorema 13.** *Sea $f$ una función homogénea y monótona cuyas coordenadas son suma o composición de funciones en la clase MSM y supongamos que $f$ es controlada inferiormente con matriz de incidencia $A$. Si es $A$ irreducible entonces $f$ tiene un único autovector $u \in (\mathbb{R}^n)^+$, con $\|u\|_1 = 1$. Si además $A$ es primitiva entonces $g^k(x) \to u$ cuando $k \to \infty$ para todo $x \in (\mathbb{R}^n)^+$, siendo $g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|_1}$.*

En efecto, solo hay que observar que la transformación $h(x) = \big(f(x^t)\big)^{1/t}$ y su inversa $f(x) = \big(h(x^{1/t})\big)^t$ transforman autovectores sobre autovectores en $(\mathbb{R}^n)^+$ y preservan la convergencia bajo la métrica de Hilbert, ya que

$$d_H(f(x),u) = d_H\Big(\big(h(x^{1/t})\big)^t, \big(u^{1/t}\big)^t\Big) = t d_H\Big(h(x^{1/t}), u^{1/t}\Big).$$

Por otro lado la Proposición 11 provee herramientas para calcular matrices de incidencia para este tipo de funciones que generalizan, como ya observamos, las funciones acotadas inferiormente por potencias.

Es importante observar que la restricción $s < +\infty$ y $r < +\infty$ para todo $r$ tal que $(r,\sigma) \in \Gamma_k$, $k = 1,\ldots,m$ en las funciones de la clase *MSM* (9) es esencial para que exista $t$ tal que la transformación $\big(f(x^t)\big)^{1/t}$ resulte en una función superaditiva y valgan los resultados de unicidad y convergencia. Es cierto que estas condiciones no son necesarias para garantizar la unicidad del autovector pero también es fácil encontrar ejemplos, que involucran la media del supremo, donde se aplica el Teorema (10) a) pero existen múltiples autovectores. Consideremos por ejemplo el siguiente operador controlado inferiormente:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \max\Big(x_1, \dfrac{x_2}{2}\Big)^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{3}{4}} \\ \max\Big(x_2, \dfrac{x_3^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}}{2}\Big) \\ x_1 \end{pmatrix},$$

donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es una matriz de incidencia para $f$. Como $A$ es irreducible, $f$ tiene un autovector en $(\mathbb{R}^n)^+$. Podemos en este caso calcular directamente para ver que 1 es el autovalor positivo de $f$ y que $(u_1,u_2,u_3)$ es autovector si y solo si $u_3 = u_1$, $u_1 \geq \dfrac{u_2}{2}$ y $u_2 \geq \dfrac{u_1^{\frac{1}{2}} u_2^{\frac{1}{2}}}{2}$, es decir que todos los vectores de la forma $(u_1,u_2,u_1)$ con $u_1/4 \leq u_2 \leq 2u_1$ son autovectores de $f$ asociados al 1.

Los operadores homogéneos y monótonos se aplican entre otras cosas para generalizar los modelos poblacionales lineales clásicos como el considerado en (1). En particular cuando se entiende que la producción de nuevos individuos, representada por las fertilidades $\alpha_j$ en (1), es un proceso no lineal que depende de la interacción entre distintos estadios de la población, como ocurre por ejemplo al considerar poblaciones con dos sexos [16, 7]. En esos casos es importante determinar la proporción entre los distintos estadios que "estabiliza" la estructura poblacional, es decir un autovector positivo. Consideremos por ejemplo una población con tres estadios como en Farji-Brener et al. [6], que utilizan un modelo lineal para describir y estimar el proceso de nidificación de la hormiga cortadora de hojas. Se consideran tres tipos de hormigueros: domos chicos, medianos y grandes; y la variación en el número de nidos $(x_1, x_2, x_3)$ está dada por el siguiente operador:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi(x_1, x_2, x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz $T = (t_{ij})$ colecta las tasas de transición entre los distintos tipos de domos; así si $i \neq j$, $t_{ij}$ representa la tasa de transición de domos de tipo $j$ a domos del tipo $i$, ya sea por crecimiento o disminución, en tanto que la función $\varphi : (\mathbb{R}^3)^+ \to \mathbb{R}^+$ representa la formación de nuevos domos. Farji-Brener et al. [6] utilizan una función lineal $\varphi(x) = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3$ para su análisis, pero podría en general considerarse cualquier función homogénea y monótona. Es interesante observar en este ejemplo que, ya que $T$ es una matriz de incidencia para $f$, si $T$ es irreducible entonces la existencia del autovector está garantizada cualquiera sea $\varphi$, y si en particular $\varphi$ es suma o composición de funciones en la clase *MSM* entonces el autovector positivo es único. Esto ofrece una amplia familia de funciones donde representar la interacción entre los tres estadios en cuanto a la producción de nuevos domos y analizar su influencia en la estructura estable de la población.

## 7. Palabras finales

Intentamos aportar en este trabajo un resumen de las principales herramientas para el estudio de operadores homogéneos y monótonos en $\mathbb{R}^n_+$. Esto nos permitió enunciar y demostrar los resultados básicos de la teoría en un marco unificado, remarcando algunas motivaciones prácticas y posibles aplicaciones de los problemas estudiados. Las ramificaciones y aplicaciones de la teoría general son mucho más amplias y están en constante desarrollo, abarcando espacios y operadores más generales que los aquí considerados. Sin embargo, aun en el caso de los problemas de interés en la descripción de modelos poblacionales, no existen resultados generales que se apliquen a una familia amplia de operadores. En este sentido, la consideración de las funciones controladas inferiormente y las funciones de la clase *MSM* marcan claramente las limitaciones del resultado general y esperamos que motiven la continuidad del trabajo en la búsqueda de resultados particulares, aplicables a casos de interés en la descripción de sistemas dinámicos y modelos poblacionales.

## Referencias

[1] A. Berman, R. J. Plemmons. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Classics in applied mathematics. SIAM, Philadelphia, 1994. MR 1298430.

[2] G. Birkhoff. Extensions of Jentzsch's theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 85 (1957), 219–227. MR 0087058.

[3] H. Caswell. *Matrix population models*. Sinauer Associates, Sunderland, MA, second edition, 2001.

[4] H. Caswell, D. E. Weeks. Two-sex models: chaos, extinction, and other dynamic consequences of sex. *American Naturalist* 128 (1986), 707–735.

[5] J. E. Cohen. Ergodic theorems in demography. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 1 (1979), 275–295 MR 0520076.
[6] A. G. Farji-Brener, M. I. de Torres Curth, P. V. Casanovas, P. N. Naim. Consecuencias demográficas del sitio de nidificación en la hormiga cortadora de hojas *Acromyrmex lobicornis*: un enfoque utilizando modelos matriciales. *Ecol. Austral* 13 (2003), 183–194.
[7] M. A. Ferrari, M. N. Lewis, C. Campagna. Two-sex population models applied to polygynous species. *Actas de la Academia Nacional de Ciencias* XIV (2008), 75–83.
[8] G. Frobenius. Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 456–477, 1912.
[9] S. Gaubert, J. Gunawardena. The Perron–Frobenius theorem for homogeneous, monotone functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 356 (2004), 4931–4950. MR 2084406.
[10] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1988. MR 0944909.
[11] B. Lemmens, R. Nussbaum. *Nonlinear Perron–Frobenius Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 189. Cambridge University Press, 2012. MR 2953648.
[12] P. H. Leslie. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* 33 (1945), 183–212. MR 0015760.
[13] R. D. Nussbaum. Convexity and log convexity for the spectral radius. *Linear Algebra Appl.* 73 (1986), 59–122. MR 0818894.
[14] R. D. Nussbaum. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps*, Mem. Amer. Math. Soc. 75 (1988), no. 391. MR 0961211.
[15] O. Perron. Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. *Math. Ann.* 64 (1907), 1–76.
[16] J. H. Pollard. Modelling the interaction between the sexes. *Math. Comput. Modelling* 26 (1997), 11–24. MR 1601718.
[17] E. A. Saavedra. El teorema de Perron–Frobenius, generalizaciones y aplicaciones. Tesis de magister en matemática, Universidad Nacional del Comahue, Facultad de Economía y Administración, 2012.
[18] H. Samelson. On the Perron–Frobenius theorem. *Michigan Math. J.* 4 (1957), 57–59. MR 0086041.
[19] E. Seneta. *Non-negative matrices and Markov chains.* Springer Series in Statistics. Springer, 2006. MR 2209438.

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA SAN JUAN BOSCO. CHUBUT, ARGENTINA
*E-mail*: matematicasaavedra@yahoo.com.ar

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA SAN JUAN BOSCO. CHUBUT, ARGENTINA
*E-mail*: matematicaesq@yahoo.com.ar

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA SAN JUAN BOSCO Y CENTRO NACIONAL PATAGÓNICO, CONICET. PUERTO MADRYN, CHUBUT, ARGENTINA
*E-mail*: mferrari7@gmail.com