VARIACIONES EN LA TRANSFORMADA WAVELET

*Eduardo Serrano - Marcela Fabio**

Universidad de Buenos Aires - *CONICET

1. INTRODUCCION

La *transformada wavelet* (o en *ondelettes*) posee remarcables propiedades que la convierten en una poderosa herramienta en el campo del análisis funcional y en otras áreas, puras o aplicadas. Diversas variantes de la misma pueden implementarse según el problema a resolver. Transformadas contínuas o discretas, wavelets oblícuas u ortogonales, son algunas de estas opciones.

En ciertas aplicaciones, se hace necesario que la transformada empleada sea consistente con traslaciones, en su dominio. Tal propiedad es verificada naturalmente por las transformadas continuas, por lo que algunos autores la consideran preferible. Sin embargo, en la práctica, es conveniente desde el punto de vista numérico y computacional el empleo de transformadas discretas, por lo cual se presenta el problema de compatibilizar adecuadamente discretización y consistencia. Bajo esta perspectiva, pasaremos una rápida revista a diversas posibles opciones y propondremos finalmente una transformada discreta, asociada a wavelets ortogonales, que verifica una condición más débil de consistencia, pero suficiente para aplicaciones numéricas.

Dada la brevedad de este trabajo, expondremos sólo conceptos y resultados fundamentales. Asimismo, sólo daremos la completa demostración del teorema que fundamenta la transformada propuesta. Para mayores detalles puede consultarse la extensa bibliografía existente [1]-[6].

Denotaremos los siguientes operadores, de *traslación* y *dilatación* como:

$$T_b f(x) = f(x-b) \; ; \; T_b g(x,y) = g(x-b,y) \tag{1}$$

$$D_a f(x) = |a^{-1/2}| f(x/a) \quad , \; a \neq 0 \tag{2}$$

$$D_a T_b f(x) = |a^{-1/2}| f(x/a-b) \; ; \; T_b D_a f(x) = |a^{-1/2}| f((x-b)/a) \tag{3}$$

Dado $\mathcal{H}$, un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$, una *representación* de $\mathcal{H}$ en el dominio tiempo - frecuencia (X,Ω) se define por una adecuado operador [6]:

$$R : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \tag{4}$$

donde $\mathcal{K}$, imagen de $\mathcal{H}$ por R, es un espacio de Hilbert de funciones reales o complejas definidas en un subdominio de (X,Ω).

Dado un grupo $(\Lambda,+)$, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, una representación R de $\mathcal{H}$ se dice *invariante* en Λ si para todo $\lambda \in \Lambda$ y $f \in \mathcal{H}$ se verifica:

$$RT_{\lambda}f = T_{\lambda}Rf \tag{5}$$

2. TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA

Dada una wavelet $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, admisible en el sentido afin [4], con $\|\psi\| = 1$, definimos la *transformada wavelet continua* por:

$$W_{\psi}^{c} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \quad ; \quad W_{\psi}^{c} f(a,b) = \langle f, D_a T_b \psi \rangle \tag{6}$$

Tal transformación es una isometría y existe fórmula integral de inversión [4]. Para ψ real, definimos la representación *natural asociada* a ψ como sigue, suponiendo que ψ está localizada en x_o y $|\hat{\psi}|$ en ω_o, en el dominio (X,Ω):

$$R_{\psi}^{c} f(x,\omega) = W_{\psi}^{c} f(a(\omega),b(x,\omega)) \tag{7}$$

con $a(\omega) = \omega/\omega_o$ y $b(x,\omega) = x\omega/\omega_o - x_o$,$x \in \mathbb{R}$ y $\omega > 0$.

Claramente esta representación es invariante por traslaciones en $\mathbb{R}$, es decir verifica ecuación (5) para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. El empleo de la transformada continua en análisis de señales se realiza comunmente eligiendo adecuadamente la wavelet ψ (sombrero mejicano, gaussiana modulada, etc), computándola en una red discreta (a_j,b_k), que asegure completitud, e implementando un algoritmo de interpolación local [7].

3. TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

Una red discreta de parámetros (a_j,b_k) puede definirse a partir de números positivos a_o,b_o , tomando $a_j=a_o^j$, $b_k = kb_o$ con $j,k \in \mathbb{Z}$. Denotamos :

$$\psi_{jk}(x) = D_{a_j} T_{b_k} \psi(x) = a_o^{-j/2}\psi(a_o^{-j}x-b_k) \tag{8}$$

Si la familia $\{ \psi_{jk} ; j,k \in \mathbb{Z} \}$ constituye una *frame* en $L^2(\mathbb{R})$ [4], definimos la *transformada wavelet discreta* asociada a ψ :

$$W_{\psi}^{d} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^2) \quad ; \quad W_{\psi}^{d} f(j,k) = \langle f, \psi_{jk} \rangle \tag{9}$$

En tal caso, tomando $x_{jk} = (x_o+b_k)a_j$ y $\omega_j = \omega_o/a_j$, definimos la representación natural asociada como:

$$R_{\psi}^{d} f(x_{jk},\omega_j) = W_{\psi}^{d} f(j,k) \tag{10}$$

Observemos que, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$ la definición de invariancia impone que $a_o^{-j}\lambda \in \mathbb{Z}$ de donde se desprende que la representacion (10) no puede ser invariante por traslaciones si $\Lambda \neq \{0\}$. Esta dificultad induce a algunos autores a evitar el empleo de transformadas discretas y en particular el uso de bases ortonormales de wavelets, prefiriendo las transformadas continuas. Una opción intermedia la constituye la llamada *transformada semidiscreta* o *diádica*, que a continuación describiremos.

4. TRANSFORMADA WAVELET SEMIDISCRETA O DIADICA

Una wavelet admisible ψ se dice *diádica* si :

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j\omega)|^2 = 1 \qquad \text{ct}\omega. \tag{11}$$

en tal caso, sea el conjunto de parámetros $(2^{-j},b)$ $j \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{R}$ y denotemos:

$$\psi_{jb}(x) = D_{2^{-j}} T_b\, \psi(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x-b) \tag{12}$$

Para cada $j \in \mathbb{Z}$ definimos:

$$W_j : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad ; \quad W_j\, f(b) = \langle f,\psi_{jb} \rangle \tag{13}$$

y la transformada semidiscreta o diádica se define como:

$$W_\psi^{dc} f(j,b) = W_j\, f(b) \tag{14}$$

Denotemos ahora $\mathcal{K}$ al rango de W_ψ^{dc} y enunciemos una fundamental propiedad:

Teorema 1.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=-N}^{N} \langle W_j f, W_j g \rangle = \langle f,g \rangle \quad \text{para toda } f,g \in L^2(\mathbb{R}) \tag{15}$$

En otras palabras, $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert y W_ψ^{dc} es una isometría de $L^2(\mathbb{R})$ en $\mathcal{K}$. De lo cual se desprende la fórmula de inversión:

Teorema 2. Sea $\{ \rho_n(x),\ n \in \mathbb{N} \} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ una aproximación a la identidad con $\rho_n(-x) = \rho_n(x)$ para todo x , n. Entonces:

$\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \| = 0$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, donde

$$f_n(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_j\, f(b)\, (\rho_n * \psi_{jb})\,(x)\, db \tag{16}$$

No daremos aquí las demostraciones de estos teoremas.

La representación natural asociada a esta transformada es:

$$R_{\psi}^{dc} f(x,\omega_j) = W_{\psi}^{dc} f(j,2^j x - x_o) \tag{17}$$

donde $\omega_j = 2^j \omega_o$. Por otra parte, se desprende inmediatamente que:

$$R^{dc} T_{\lambda} f = T_{\lambda} R^{dc} f \qquad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R} \tag{18}$$

Es interesante notar que de la fórmula (16) se deduce :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} W_j f(b)\, \psi_{jb}(x)\, db \right)^{\wedge} = |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2\, \hat{f}(\omega) \tag{19}$$

con lo cual se ilustra la acción de *filtrado* de la transformada.

Comentemos que a partir de la definición (17), se desarrolla en [5] otra representación, denominada *zero-crossing*, basada en los ceros de R_{ψ}^{dc}. Técnicas que la emplean son aplicadas en procesamiento de imágenes.

Observemos también, que si ψ es una wavelet spline ortogonal [1], de orden m impar y dado que podemos escribir la fórmula (14) como:

$$W_j f(b) = (f * \tilde{\psi}_j)(2^{-j} b) \tag{20}$$

con $\tilde{\psi}_j(x) = \psi_j(-x)$, la representación (17) para cada j fijo resulta en splines de orden $2m+1$, con nodos en $\mathbb{Z}$ si $j < 0$ y en $2^{-(j+1)}\mathbb{Z}$ para $j \geq 0$, por lo cual queda completamente determinada en una subred discreta. Tal discretización, es invariante por traslaciones en $\mathbb{Z}$, restringida a $j < 0$. Estas observaciones sugieren otras posibilidades y variantes en la transformada wavelet, como la que propondremos en la próxima sección.

5. TRANSFORMADA DISCRETA INVARIANTE POR TRASLACIONES EN $\mathbb{Z}$

Sea ψ una wavelet admisible y tal que con la notación definida en (8) y para para $a_o = 1/2$, la familia $\{ \psi_{jk},\ j,k \in \mathbb{Z} \}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, asociada a un análisis multigradual $\mathbb{V}$ [1]. Denotaremos V_o al subespacio fundamental generador de $\mathbb{V}$. Definiremos a continuación una *frame* en V_o, invariante por traslaciones en $\mathbb{Z}$. Sea la colección de wavelets *atenuadas*:

$$\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2}\, T_k\, D_{2^{-j}}\, \psi(x) = 2^j \psi(2^j(x-k)) \quad , \ j \in \mathbb{Z}_{<0} \ , k \in \mathbb{Z} \tag{21}$$

Claramente, esta familia es completa en V_o. Definimos ahora la transformada:

$$W_{\varphi}^{o} : V_o \longrightarrow \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_{<0} \times \mathbb{Z}) \quad ; \quad W_{\varphi}^{o} f(j,k) = \langle f, \varphi_{jk} \rangle \tag{22}$$

y la representación natural de V_o asociada :

$$R^{o}_{\varphi}\, f(k,\omega_j) = W^{o}_{\varphi}\, f(j,k) \qquad j \in \mathbb{Z}_{<o}\ ,\ k \in \mathbb{Z} \tag{23}$$

Observemos que hemos refinado la red discreta de la representación asociada a la base ortonormal a la subred $(\mathbb{Z},\omega_j)$ para $j < 0$ y por otra parte hemos restringido el dominio de la transformada y la consecuente representación a V_o.

Afirmamos ahora que W^{o}_{φ} es una isometría sobre su rango, de lo cual se desprende que la familia (21) es una *thigt frame* (inexacta) [1], [2] de V_o y por lo tanto existe una sencilla fórmula de reconstrucción, numéricamente estable. Más aún, la representación de V_o asociada es invariante por traslaciones en $\mathbb{Z}$.

Denotando $\langle .,.\rangle_l$ al producto interno usual en $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ enunciamos:

Teorema 3. Dada $f \in V_o$,

(a) $$W^{o}_{\varphi}\, f \in \ell^2(\mathbb{Z}_{<o} \times \mathbb{Z}) \tag{24}$$

(b) $$\langle W^{o}_{\varphi}\, f,\ W^{o}_{\varphi}\, g \rangle_l = \langle f,g\rangle \quad \text{para toda } g \in V_o \tag{25}$$

Demostracion Dado que V_o es cerrado para traslaciones en $\mathbb{Z}$, resulta que:

$$T_{-n}\, f = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=-N}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle T_{-n}f,\psi_{jk}\rangle \text{ en el sentido de } L^2(\mathbb{R})$$

para cada $N > 0$ definamos:

$$m_N = \min_{0\le n<2^N} \sum_{j=-N}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle T_{-n}f,\psi_{jk}\rangle|^2$$

m_N converge monótonamente a $\|f\|^2$, de modo que dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que si $j < -N(\varepsilon)$, $m_{N(\varepsilon)} \ge \|f\|^2 - \varepsilon$. Dada g, elijamos $N = N(\varepsilon)$ de modo que tal acotación se satisfaga para f y g. Entonces:

$$\max_{0\le n<2^N} \left(\sum_{j=-\infty}^{-N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle T_{-n}f,\psi_{jk}\rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=-\infty}^{-N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle T_{-n}g,\psi_{jk}\rangle|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

Por la desigualdad de Shwartz y la invariacia por traslaciones del producto interno tendremos que:

$$\max_{0\le n<2^N} \left| \sum_{j=-N}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle T_{-n}f,\psi_{jk}\rangle \ \langle T_{-n}g,\psi_{jk}\rangle - \langle f,g\rangle \right| < \varepsilon$$

luego

$$\left| 2^{-N} \sum_{n=0}^{2^N-1} \sum_{j=-N}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} < T_{-n} f, \psi_{jk} > < T_{-n} g, \psi_{jk} > - <f,g> \right| < \varepsilon$$

reordenando los índices, teniendo en cuenta que $< T_{-n} \cdot, \psi_{jk} > = < \cdot, T_n \psi_{jk} >$ y operando algebraicamente obtenemos que:

$$\left| \sum_{j=-N}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} <f,\varphi_{jk}> <g,\varphi_{jk}> - <f,g> \right| < \varepsilon$$

Tomando límite para $N \longrightarrow \infty$, con $g = f$, se obtiene (a), concluyéndose finalmente (b).#

Dado entonces que W_φ^0 es una isometría de V_0 sobre su rango, la familia $\{\varphi_{jk}\}$ definida en (21) es una *thigt frame* para V_0, con cotas A = B = 1 , de donde se obtiene inmediatamente una sencilla fórmula de reconstrucción, numéricamente estable [1], [4]:

Corolario. Dada $f \in V_0$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{j=-N}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_\varphi^0 f(j,k)\, \varphi_{jk} - f \right\| = 0 \tag{26}$$

Es necesario observar que la imagen de V_0 por W_φ^0, que denotamos por $\mathcal{K}^0$, es subespacio de $\ell^2(\mathbb{Z}_{<0} \times \mathbb{Z})$, pero la transformada W_φ^0 *no es suryectiva*. La fórmula (26) expresa la inversión de la transformada, restringida a $\mathcal{K}^0$.

Observemos también, que la familia $\{ \varphi_{jk} , j < 0, k \in \mathbb{Z} \}$ definida en (21) es, claramente, *sobrecompleta*, resultante de traslaciones en $\mathbb{Z}$ de la base ortonormal de wavelets original. Esta redundancia permite definir la representación natural de V_0 asociada a W_φ^0, en la red $(\mathbb{Z},\omega_j)$, $j < 0$, concluyéndose inmediatamente la propiedad de invariancia:

$$R_\varphi^0 T_n f = T_n R_\varphi^0 f \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z} \tag{27}$$

La transformada W_φ^0 resulta particularmente útil para complementar el análisis de una función, dada por su muestreo, realizado mediante wavelets ortogonales, cada vez que sea necesario contar con una representación invariante por traslaciones. Obsérvese que si en general la función está muestrada con paso Δt, por simple cambio de variable, siempre puede suponerse que $f \in V_0$, y la representación de f resulta invariante por traslaciones en $\Delta t\mathbb{Z}$.

Para finalizar, señalemos que la implementación computacional de la transformación puede realizarse mediante una algoritmo de complejidad $N\log(N)$, siendo N el número de datos de entrada.

Los autores agradecen la colaboración y sugerencias del Dr. Carlos Enrique D'Attellis para la redacción final de este artículo.

REFERENCIAS:

[1] **I. DAUBECHIES**, 'Ten lectures on wavelets', Philadelphia: **SIAM, 1992.**

[2] **Y. MEYER** , 'Ondelettes et operateurs' , **T I-III**, Paris: Hermann, **1992**.

[3] Ch. **CHUI**, 'An introducction to wavelets' , San Diego: Ac. Press Inc, **1992**.

[4] **C. HEIL, D. WALNUT** 'Continuous and discrete wavelet transform', **SIAM** Rev., Vol. **31** Nro **4**. pp **628-666, 1989**.

[5] **S. MALLAT**, 'Zero crossing of a wavelet transform', **IEEE** Trans. Vol. **37**, pp **1019-1033, 1991**.

[6] **Y. GRENIER**, 'Traitment du signal-Representations temps-frequence', Paris: **ENST, 1986**.

[7] **A. GROSSMANN, R. KRONLAND-MARTINET, J. MORLET**, 'Reading and understanding continuous wavelet transform', Belin: Springer Verlag, pp **2-20, 1987**.