Integración Fraccionaria Iterada

Carlos C. Peña
Universidad Nacional del Centro
de la Provincia de Buenos Aires

Resúmen:

Se considera la operación:

$$(R.1)\quad {}_bI_x^{-\beta}\ {}_aI_x^{-\alpha}\ f(x)$$

en la cual los subíndices a, b son las terminales (límites) inferiores de integración en el sentido de Riemann-Liouville [1] o, más generalmente, en el sentido de Holmgren-Riesz[2]. En el caso a = b es conocida la validez de la relación:

$$(R.2)\ {}_aI_x^{-\beta}\ {}_aI_x^{-\alpha}\ f(x) = {}_aI_x^{-\alpha-\beta}\ f(x)$$

válida cada vez que $\mathbb{R}(\alpha)>0$, $\mathbb{R}(\beta)>0$ [3]; no siendo éste el caso la identidad (R.2) es, en general, falsa.

En el presente trabajo se considera el estudio de (R.1) e indicamos:

$$(R.3)\ {}_bI_x^{-\beta}\ {}_aI_x^{-\alpha}\ f(x) = {}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha}\ f(x)$$

Consideramos en primer lugar el caso $\mathbb{R}(\alpha)<0<\mathbb{R}(\beta)$ para pasar luego al caso general. Establecemos a tal efecto teoremas que nos permitirán evaluar la expresión anterior; en particular, se ve que la denominada ley de índices, expresada en (R.2), es característica de los casos ya establecidos.

Introducción:

Dados una función $\mathbb{C}$- valuada $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, un número $\alpha \in \mathbb{C}$ con parte real positiva, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, escribimos:

$$(I.1)\ {}_aI_x^{-\alpha}\ f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1}\ f(y)\ dy$$

Se dice que la anterior es la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de la función f entre a y x. La misma está bién definida bajo condiciones bastante generales sobre f, v.g. $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. En particular dado $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$
\text{(I.2)} \qquad \begin{cases} D^{\nu}_x \; {}_aI_x^{-n} \, f(x) = {}_aI_x^{-n+\nu} f(x) \quad \text{si } 0 \le \nu \le n \\ \\ D^n_x \; {}_aI_x^{-n} \, f(x) = f(x) \end{cases}
$$

Por otra parte, dados α, β complejos con parte real positiva resulta:

$$
\begin{aligned}
{}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha} f(x) &= \Gamma(\alpha)^{-1} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} \left[\Gamma(\beta)^{-1} \int_a^y (y-z)^{\beta-1} f(z) \, dz \right] dy \\
&= \Gamma(\alpha)^{-1} \Gamma(\beta)^{-1} \int_a^x f(z) \left[\int_z^x (x-y)^{\alpha-1} (y-z)^{\beta-1} dy \right] dz \\
\text{(I.3)} \qquad &= \Gamma(\alpha+\beta)^{-1} \int_a^x (x-z)^{\alpha+\beta-1} f(z) \, dz \\
&= {}_aI_x \qquad f(x)
\end{aligned}
$$

Vamos a considerar la integración fraccionaria de R-L desde un punto de vista más general, esto es, desde el punto de vista de Holmgren-Riesz (H-R); abusando de la notación, indicaremos el operador de Holmgren-Riesz en la forma:

$$
\text{(I.4)} \qquad {}_aI_x^{-\alpha} f(x) = \frac{D^n_x}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+n-1} f(y) \, dy
$$

donde ahora $\alpha \in \mathbb{C}$ es arbitrario y $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\mathbb{R}(\alpha+n)>0$. Se puede verificar sin dificultad que (I.4) no depende de la elección de n y que generaliza a (I.2); por otra parte:

$$
\text{(I.5)} \qquad {}_aI_x^n f(x) = D^n_x f(x)
$$

Vamos a utilizar la siguiente notación:

$$
\text{(I.6)} \quad \begin{cases} I_x(\alpha,\beta) = B_x(\alpha,\beta)[B(\alpha,\beta)]^{-1}, \text{donde} \\ B_x(\alpha,\beta) = \int_0^x (1-y)^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, dy \ , \ \mathbb{R}(\alpha)>0,\ \mathbb{R}(\beta)>0,\ 0\le x\le 1 \end{cases}
$$

y también se utilizará la notación usual:

$$
\text{(I.7)} \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!, \qquad \binom{\alpha}{\beta} = \alpha!\ [(\alpha-\beta)!\,\beta!]^{-1}, \qquad (\alpha)_\beta = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}
$$

En principio establecemos la relación:

$$
\text{(I.8)}\ {}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha}\, f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{(\alpha+\beta+j)!} \left[(x-a)^{\alpha+\beta+j}\, I_{\frac{x-b}{x-a}}(\alpha,\beta) + \right.
$$

$$
\left. (x-b)^{\beta}(b-a)^{\alpha} \sum_{k=0}^{j} \binom{\alpha+\beta+k-1}{\beta-1} \left(1 - \frac{x-b}{x-a}\right)^{k-j} \right] + {}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha+n}\, f^{(n)}(x)
$$

la cual será válida para α,β complejos t.q. $\mathbb{R}(\alpha)<0<\mathbb{R}(\beta)$, para $a<b$ y para una función con derivadas suaves hasta el orden n sobre el intervalo $[a,b]$, con $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathbb{R}(\alpha+n)>0$.

En el caso en que α,β tienen sus partes reales positivas obtenemos la relación:

$$
{}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha}\, f(x) = {}_bI_x^{-\alpha-\beta}\, f(x) +
$$

$$
+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j-\alpha}{j} \frac{(x-b)^{j+\beta}}{j+\beta} \int_a^b f(y)\,(x-y)^{\alpha-j-1}\, dy
$$

Lema 1:

Sea $$C = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : a \le v \le u \le b\right\}$$

y sea g: $C \longrightarrow \mathbb{C}$ una función con derivadas parciales continuas hasta el orden n ($n \in \mathbb{N}$). Entonces:

$$D_x^n \int_a^x g(x,v)\, dv = \int_a^x \frac{d^n g}{du^n}(x,v)\, dv + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{d^{n-1} g}{du^j\, dv^{n-1-j}}(x,x)$$

Demostración:

Haremos inducción en n. Considerando $n = 1$ sea dado $\xi > 0$, y sea $a < x < b$. Por la continuidad uniforme de g y de $D_u g$ sobre C existe $\delta > 0$ t.q.

$$(1.1) \quad \begin{cases} |g(u,v) - g(u',v')| \le 3^{-1}\xi \\ \\ |D_u g(u,v) - D_u g(u',v')| \le [3(b-a)]^{-1}\xi \end{cases}$$

cada vez que los puntos (u,v), (u',v') de C distan entre sí no más que δ. Dado $0 < h < \delta$ tenemos:

$$|h^{-1}\left[\int_a^{x+h} g(x+h,v)\, dv - \int_a^x g(x,v)\, dv\right] - \int_a^x \frac{dg}{du}(x,v)\, dv - g(x,x)|$$

$$= | \int_a^x \left[[g(x+h,v) - g(x,v)]\, h^{-1} - \frac{dg}{du}(x,v) \right] dv +$$

$$\int_x^{x+h} [g(x+h,v) - g(x,v)]\, h^{-1}\, dv + \int_x^{x+h} [g(x,v) - g(x,x)]\, h^{-1}\, dv \;|$$

(1.2)

$$\le \int_a^x | [g(x+h,v) - g(x,v)]\, h^{-1} - \frac{dg}{du}(x,v) |\, dv +$$

$$\int_x^{x+h} |[g(x+h,v) - g(x,v)]\, h^{-1}|dv + \int_x^{x+h} |[g(x,v) - g(x,x)]\, h^{-1}|dv$$

Haciendo uso de (1.1) y del teorema del valor medio en (1.2) se deduce enseguida que la expresión (1.2) no excede ξ con lo que resulta :

$$\lim_{h\to 0+} h^{-1}\left[\int_a^{x+h} g(x+h,v)\, dv - \int_a^x g(x,v)\, dv\right] = \int_a^x \frac{dg}{du}(x,v)\, dv + g(x,x)$$

En forma análoga se ve que el miembro derecho anterior coincide también con la correspondiente derivada lateral izquierda y así sigue el resultado en el caso $n = 1$, $a < x < b$. Evidentemente los casos $x = a$, $x = b$ pueden considerarse comprendidos entre los anteriores.

Supongamos la afirmación válida para $p < n$. Entonces :

$$D_x^{n-1} \int_a^x g(x,v)\, dv =$$

$$\int_a^x \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} g(x,v)\, dv + \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \frac{d^{n-1} g}{du^j\, dv^{n-1-j}}(x,x) \tag{1.3}$$

Escribimos ahora:

$$D_x^n \int_a^x g(x,v)\, dv = \int_a^x \frac{d^n g}{du^n}(x,v)\, dv + \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} g(x,x) +$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left[\frac{d^{n-1} g}{du^{j+1} dv^{n-2-j}}(x,x) + \frac{d^{n-1} g}{du^j\, dv^{n-1-j}}(x,x) \right]$$

$$= \int_a^x \frac{d^n g}{du^n}(x,v)\, dv + \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} g(x,x) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \frac{d^{n-1} g}{du^j\, dv^{n-1-j}}(x,x) + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} \frac{d^{n-1} g}{du^j\, dv^{n-1-j}}(x,x)$$

$$= \int_a^x \frac{d^n g}{du^n}(x,v)\, dv + \frac{d^{n-1} g}{du^{n-1}}(x,x) + \frac{d^{n-1} g}{dv^{n-1}}(x,x)$$

$$+ (n-1)\ \frac{d^{n-1} g}{du^{n-1}}(x,x) + \sum_{j=1}^{n-2}\left[\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} \right] \frac{d^{n-1} g}{du^j\, dv^{n-1-j}}(x,x)$$

$$= \int_a^x \frac{d^n g}{du^n}(x,v)\, dv + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{d^{n-1} g}{du^j\, dv^{n-1-j}}(x,x)$$

y queda así probada la tesis.

Lema 2.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ t.q. $\mathbb{R}(\alpha) < 0$, $f = f(t)$ una función $\mathbb{C}$-valuada definida sobre el intervalo real $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathbb{R}(\alpha+n) > 0$. Suponiendo que f tiene derivadas continuas hasta el orden n resulta:

$$_aI_x^{-\alpha}\ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{(\alpha+j)!}(x-a)^{\alpha+j} + {_aI_x^{-\alpha-n}}\ f^{(n)}(x)$$

Demostración:

$$_aI_x^{-\alpha}\quad f(x) = \frac{D_x^n}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+n-1}\ f(y)\ dy$$

(2.1)

$$= \frac{D_x^n}{\Gamma(\alpha+n)} \int_0^{x-a} z^{\alpha+n-1}\ f(x-z)\ dz$$

$$f(x-z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-z-a)^j +$$

(2.2)

$$\frac{(x-z-a)^n}{\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{n-1}\ f^{(n)}(a+t(x-z-a))dt$$

Ahora:

$$\frac{D_x^n}{\Gamma(\alpha+n)} \int_0^{x-a} z^{\alpha+n-1}\ \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{n-1}\ \frac{d^n}{dt^n}[f(a+t(x-z-a))]\ dt\ dz =$$

$$\frac{D_x^n}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+n-1} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \frac{d^n}{dt^n}[f(a+t(y-a))]\, dt\, dy \tag{2.3}$$

Indicaremos:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \frac{d^n}{dt^n}[f(a+t(y-a))]\, dt$$

(2.4)

$$g(w,y) = (w-y)^{\alpha+2n-1} \quad \Phi^{(n)}(y)$$

donde $a \le y \le w \le x$. Notemos que :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+n-1} \Phi(y)\, dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2n)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+2n-1} \Phi^{(n)}(y)\, dy \tag{2.5}$$

Dado $0 \le j < n$ tenemos :

(2.6) $$\frac{\delta^{n-1-j} g}{\delta w^{n-1-j}}(w,y) = \frac{\Gamma(\alpha+2n)}{\Gamma(\alpha+n+1+j)} (w-y)^{\alpha+n+j} \Phi^{(n)}(y)$$

de donde resulta:

(2.7) $$\frac{\delta^{n-1-j} g}{\delta w^{n-1-j}}(x,x) = 0 \text{ si } 0 \le j < n$$

Usando (2.5) y el lema 1 obtenemos:

$$\frac{D_x^n}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+n-1} \Phi(y)\, dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+n-1} \Phi^{(n)}(y)\, dy \tag{2.8}$$

Por otra parte:

$$\Phi^{(n)}(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \frac{d^n}{dy^n} \left\{ \frac{d^n}{dt^n}[f(a+t(y-a))] \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \frac{d^n}{dy^n} \left\{ (y-a)^n f^{(n)}(a+t(y-a)) \right\} dt$$

(2.9)

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^j \frac{d^j}{dt^j} f^{(n)}(a+t(y-a))\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \frac{d^n}{dt^n} [t^n f^{(n)}(a+t(y-a))] \, dt$$

$$= f^{(n)}(y)$$

Reemplazando (2.2) en (2.1) tenemos:

$$ {}_aI_x^{-\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{(\alpha+j)!} (x-a)^{\alpha+j} +$$

$$\frac{D_x^n}{\Gamma(\alpha+n)} \int_0^{x-a} z^{\alpha+n-1} \frac{(x-z-a)^n}{\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t(x-z-a)) \, dt \, dz$$

(2.10)

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{(\alpha+j)!} (x-a)^{\alpha+j} + \frac{D_x^n}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-y)^{\alpha+n-1} \Phi(y) \, dy$$

Reemplazando finalmente (2.8) y (2.9) en (2.10) sigue la tesis.

Lema 3.

Sean α, β nos. complejos con parte real positiva. Escribiremos:

$$\Omega_{\alpha,\beta}(x) = \int_x^{\infty} s^{\alpha-1} (1+s)^{-\alpha-\beta} \, ds$$

Entonces la aplicacion anterior esta bién definida para $x \geq 0$ y se verifica la identidad:

$$\Omega_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \frac{1}{j+\beta} (1+x)^{-j-\beta}$$

Demostración:

Es fácil verificar que:

$$(3.1) \qquad \Omega_{\alpha,\beta}(0) = B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

y como resulta:

$$(3.2) \qquad 0 \leq \Omega_{\alpha,\beta}(x) \leq \Omega_{\alpha,\beta}(0)$$

para $x \geq 0$ vemos que $\Omega_{\alpha,\beta}(x)$ está bien definido y es finito.

Además: $$- \frac{d}{dx} \Omega_{\alpha,\beta}(x) = x^{\alpha-1} (1+x)^{-\alpha-\beta}$$

$$= (1+x)^{-1-\beta} \left\{ \frac{x}{1+x} \right\}^{\alpha-1}$$

$$= (1+x)^{-1-\beta} \left\{ 1 - \frac{1}{1+x} \right\}^{\alpha-1}$$

(3.3) $$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} (1+x)^{-1-j-\beta}$$

De la identidad:

(3.4) $$(-1)^j \binom{\alpha-1}{j} = \frac{1}{j!} \prod_{\nu=1}^{j} (\nu-\alpha)$$

resulta:

(3.5) $$\operatorname{sg}\left[(-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \right] = \begin{cases} (-1)^j & \text{si } j \leq [\alpha] \\ (-1)^{[\alpha]} & \text{si } j > \alpha \end{cases}$$

Por lo tanto, salvo un numero finito de terminos, podemos suponer que el término general de la serie (3.3) tiene signo constante. En consecuencia, al integrar en (3.3) obtenemos :

(3.6)
$$\Omega_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \frac{1}{-j-\beta} (1+x)^{-j-\beta} \Big|_x^{\infty}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \frac{1}{j+\beta} (1+x)^{-j-\beta}$$

Lema 4.

Con la notación que precede, dado $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$\Omega_{\alpha+n,\beta}(x) = \frac{(\alpha)_n}{(\alpha+\beta)_n} \Omega_{\alpha,\beta}(x) -$$

$$- \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(1-\alpha-n)_j}{(1-\alpha-\beta-n)_{j+1}} \frac{x^{\alpha+n-j-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta+n-j-1}}$$

Demostración:

$$\Omega_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha}\, s^{\alpha}(1+s)^{-\alpha-\beta}\Big|_{x}^{\infty} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\,\Omega_{\alpha+1,\beta}(x)$$

$$(4.1) \qquad = -\frac{1}{\alpha}\, x^{\alpha}(1+x)^{-\alpha-\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\,\Omega_{\alpha+1,\beta}(x)$$

Por (4.1) deducimos:

$$(4.2) \qquad \Omega_{\alpha+1,\beta}(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left\{ \Omega_{\alpha,\beta}(x) + \frac{x^{\alpha}}{\alpha(1+x)^{\alpha+\beta}} \right\}$$

y se verifica la tesis para n = 1. Por otra parte:

$$\Omega_{\alpha+n,\beta}(x) = \frac{\alpha+n-1}{\alpha+\beta+n-1}\left[\Omega_{\alpha+n-1,\beta}(x) + \frac{x^{\alpha+n-1}}{(\alpha+n-1)(1+x)^{\alpha+\beta+n-1}} \right]$$

$$= \frac{\alpha+n-1}{\alpha+\beta+n-1}\left[\frac{(\alpha)_{n-1}}{(\alpha+\beta)_{n-1}}\,\Omega_{\alpha,\beta}(x) - \right.$$

$$\left. \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(2-\alpha-n)_{j}}{(2-\alpha-\beta-n)_{j+1}}\, \frac{x^{\alpha+n-j-2}}{(1+x)^{\alpha+\beta+n-j-2}} \right] + \frac{x^{\alpha+n-1}}{(\alpha+\beta+n-1)(1+x)^{\alpha+\beta+n-1}}$$

$$= \frac{(\alpha)_{n}}{(\alpha+\beta)_{n}}\,\Omega_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(1-\alpha-n)_{j+1}}{(1-\alpha-\beta-n)_{j+2}}\, \frac{x^{\alpha+n-j-2}}{(1+x)^{\alpha+\beta+n-j-2}} +$$

$$+ \frac{x^{\alpha+n-1}}{(\alpha+\beta+n-1)(1+x)^{\alpha+\beta+n-1}}$$

$$= \frac{(\alpha)_{n}}{(\alpha+\beta)_{n}}\,\Omega_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-\alpha-n)_{k}}{(1-\alpha-\beta-n)_{k+1}}\, \frac{x^{\alpha+n-k-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta+n-k-1}} +$$

$$+ \frac{x^{\alpha+n-1}}{(\alpha+\beta+n-1)(1+x)^{\alpha+\beta+n-1}}$$

y de esta forma, inductivamente, sigue la tesis.

Proposición 5.

Dados α, β complejos con parte real positiva, $x \le a \le b$ será:

(5.1) $$\Psi_{\alpha,\beta}^{a,b}(x) = \int_a^b (y-x)^{\alpha-1}(b-y)^{\beta-1}\,dy$$

Entonces:

(5.2) $$\Psi_{\alpha,\beta}^{a,b}(x) = (b-x)^{\alpha+\beta-1}\,\Omega_{\alpha,\beta}\left(\frac{a-x}{b-a}\right)$$

Demostración:

Basta hacer el cambio de variables $z = \dfrac{y-x}{b-y}$ en (5.1).

Proposición 6.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ t.q. $\mathbb{R}(\alpha) < 0 < \mathbb{R}(\beta)$, $a < b < x$ en $\mathbb{R}$. Dada una función $f = f(y)$ con derivadas suaves hasta el orden n sobre el intervalo (a,b) y continua en $[a,b]$ resulta:

$${}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha} f(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{(\alpha+\beta+j)!}\left[(x-a)^{\alpha+\beta+j}\, I_{\frac{x-b}{x-a}}(\alpha,\beta) + (x-b)^{\beta}(b-a)^{\alpha+j}\sum_{k=0}^{j}\binom{\alpha+\beta+k-1}{\beta-1}\left(1-\frac{x-b}{x-a}\right)^{k-j}\right] + {}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha+n} f^{(n)}(x)$$

Demostración:

Fijando $0 \le j < n$ tenemos:

$${}_bI_x^{-\beta}(x-a)^{\alpha+j} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_b^x (y-a)^{\alpha+j}(x-y)^{\beta-1}\,dy$$

(por (5.1))

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\,\Psi_{\alpha+j+1,\beta}^{b,x}(a)$$

(por (5.2))

$$= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta+j}}{\Gamma(\beta)}\,\Omega_{\alpha+j+1,\beta}\left(\frac{b-a}{x-b}\right)$$

(por el lema 4)

$$= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta+j}}{\Gamma(\beta)} \left[\frac{(\alpha)_{j+1}}{(\alpha+\beta)_{j+1}} \Omega_{\alpha,\beta} \left(\frac{b-a}{x-b} \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{j} \frac{(-\alpha-j)_k}{(-\alpha-\beta-j)_{k+1}} \frac{\left(\frac{b-a}{x-b}\right)^{\alpha+j-k}}{\left(1+\frac{b-a}{x-b}\right)^{\alpha+\beta+j-k}} \right]$$

$$= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta+j}}{\Gamma(\beta)} \frac{(\alpha)_{j+1}}{(\alpha+\beta)_{j+1}} \Omega_{\alpha,\beta} \left(\frac{b-a}{x-b} \right) -$$

(6.1)

$$- (b-a)^{\alpha+j} \frac{(x-b)^{\beta}}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{j} \frac{(-\alpha-j)_k}{(-\alpha-\beta-j)_{k+1}} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^k$$

Usando ahora el lema 2 tenemos:

$${}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha} f(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{(\alpha+j)!} {}_bI_x^{-\beta} (x-a)^{\alpha+j} + {}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha+n} f^{(n)}(x)$$

(6.2)

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(a) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(x-a)^{\alpha+\beta+j}}{(\alpha+\beta)_{j+1}} \Omega_{\alpha,\beta} \left(\frac{b-a}{x-b} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{(b-a)^{\alpha+j}}{(\alpha+j)!} (x-b)^{\beta} \sum_{k=0}^{j} \frac{(-\alpha-j)_k}{(-\alpha-\beta-j)_{k+1}} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^k \right] + \ldots$$

Por otra parte:

(6.3)

$$\frac{1}{(\alpha+j)!} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{(-\alpha-j)_k}{(-\alpha-\beta-j)_{k+1}} = - \binom{\alpha+\beta+j-k-1}{\beta-1} \frac{1}{(\alpha+\beta+j)!}$$

Reemplazando (6.3) en (6.2) obtenemos:

$${}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha} f(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{(\alpha+\beta+j)!} \left[(x-a)^{\alpha+\beta+j} \quad I_{\frac{x-b}{x-a}}(\alpha,\beta) \; + \right.$$

$$\left. + \, (x-b)^{\beta} \, (b-a)^{\alpha+j} \sum_{k=0}^{j} \binom{\alpha+\beta+j-k-1}{\beta-1} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{k} \right] + \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{(\alpha+\beta+j)!} \left[(x-a)^{\alpha+\beta+j} \quad I_{\frac{x-b}{x-a}}(\alpha,\beta) \; + \right.$$

$$\left. + \, (x-b)^{\beta} \, (b-a)^{\alpha+j} \sum_{h=0}^{j} \binom{\alpha+\beta+h-1}{\beta-1} \left(1 - \frac{x-b}{x-a} \right)^{h-j} \right] + \ldots$$

y tenemos la tesis.

Proposición 7.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ t.q. $\mathbb{R}(\alpha) > 0$, $\mathbb{R}(\beta) > 0$ y $a < b < x$ nos. reales.

Dada una función $\mathbb{C}$-valuada $f \in \mathbb{L}^{1}_{loc}(\mathbb{R})$ resulta:

$${}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha} \, f(x) = {}_{b}I_x^{-\alpha-\beta} \, f(x) \; +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j-\alpha}{j} \frac{(x-b)^{j+\beta}}{j+\beta} \int_a^b (x-y)^{\alpha-j-1} \, f(y) \, dy$$

Demostración:

$${}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha} \, f(x) =$$

$$(7.1) \qquad = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_b^x (x-u)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^u (u-v)^{\alpha-1} \, f(v) \, dv \right) du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left[\int_a^b f(v) \, \Psi_{\alpha,\beta}^{b,x}(v) \, dv + \int_b^x f(v) \, \Psi_{\alpha,\beta}^{v,x}(v) \, dv \right]$$

Usando (3.1) y (5.2) :

$$(7.2) \qquad \Psi_{\alpha,\beta}^{v,x}(v) = (x-v)^{\alpha+\beta-1} \, \Omega_{\alpha,\beta}(0) = (x-v)^{\alpha+\beta-1} \, B(\alpha,\beta)$$

Por otra parte, usando el lema 3 y (5.2) se tiene :

$$\Psi_{\alpha,\beta}^{b,x}(v) = (x-v)^{\alpha+\beta-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \frac{1}{j+\beta} \left[\frac{x-v}{x-b} \right]^{-j-\beta} \qquad (7.3)$$

Reemplazamos (7.2) y (7.3) en (7.1) :

$${}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha} f(x) = {}_bI_x^{-\alpha-\beta} f(x) +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} \frac{(x-b)^{j+\beta}}{j+\beta} \int_a^b (x-y)^{\alpha-j-1} f(y)\, dy$$

$$= {}_bI_x^{-\alpha-\beta} f(x) +$$

$$(7.4) \qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j-\alpha}{j} \frac{(x-b)^{j+\beta}}{j+\beta} \int_a^b (x-y)^{\alpha-j-1} f(y)\, dy$$

quedando probada nuestra afirmación.

<u>**Observación 8.**</u>

Con la notación anterior :

$$(8.1) \qquad \int_a^b (x-y)^{\alpha-j-1} f(y)\, dy = {}_aI_x^{-\alpha+j} f(x) - {}_bI_x^{-\alpha+j} f(x)$$

toda vez que $\mathbb{R}(\alpha) > j$ .En tales casos podemos reemplazar las integrales por diferencias de derivadas fraccionarias en el sentido de Riemann-Liouville. Sin embargo, es inmediato que para valores grandes de j la expresión del miembro derecho de (8.1) no tiene sentido alguno.En particular,en el caso $\alpha \in \mathbb{N}$ la serie en (7.4) se reduce a una suma finita, esto es, la suma extendida a aquellos índices $j = 0, 1, \ldots, \alpha-1$; en cada sumando es aplicable la relación (8.1).Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ escribimos:

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=N}^{\infty} \binom{j-\alpha}{j} \frac{(x-b)^{j+\beta}}{j+\beta} \int_a^b (x-y)^{\alpha-j-1} f(y)\, dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=N}^{\infty} \binom{j-\alpha}{j} \frac{(x-b)^{j+\beta}}{j+\beta} \int_a^b (x-y)^{\alpha-j-1} \; | f(y) | \; dy$$

$$(8.2) \qquad \leq \frac{(x-b)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \; \| f \|_{L^1(a,b)} \sum_{j=N}^{\infty} \binom{j-\alpha}{j} \frac{1}{j+\beta}$$

$$\leq \frac{(x-b)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \; \| f \|_{L^1(a,b)}$$

toda vez que $N \in \mathbb{N}$, $[\alpha] \leq N$. En consecuencia:

$$\Big| {}_{b,a}I_x^{\beta,\alpha} f(x) - {}_bI_x^{-\alpha-\beta} f(x) -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{[\alpha]-1} \binom{j-\alpha}{j} \frac{(x-b)^{j+\beta}}{j+\beta} \left[{}_aI_x^{-\alpha+j} - {}_bI_x^{-\alpha+j} \right] f(x) \Big|$$

$$(8.3) \qquad \leq \frac{(x-b)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \; \| f \|_{L^1(a,b)} \sum_{j=[\alpha]}^{\infty} \binom{j-\alpha}{j} \frac{1}{j+\beta}$$

Bibliografia:

[1] Osler, T. J.; "*Leibnitz rule for fraccional derivatives and an application to infinite series*"; SIAM JOURNAL APPLIED MATH. 18 (1970), pp. 658-674 MR 41 5562.

[2] Mohammed Ali Al Bassam; "*Some properties of Holmgren-Riesz transform*"; ANN. della SCUOLA NORMALE SUPERIORE di PISA, Series III, Vol. XV, I-II (1961), pp. 1-24.

[3] B. Ross; "*The development of the gamma function and a profile of fractional calculus*"; N. Y. University dissertation, 1974, Chapter V, pp. 142-210. UNIVERSITY MICROFILMS, Ann. Arbor, Mich., # 74- 17154, PO # 45122.