Notas del curso: Lemas de cubrimiento

II Congreso en homenaje a Antonio Monteiro

Bahía Blanca, Abril de 1993

L. Forzani y R. Macías

Introducción

Estas notas fueron preparadas para auxiliar el curso de tres horas que fui invitado a dictar en el II Congreso "Antonio Monteiro". Están dirigidas a alumnos de matemática y se ha tratado de coordinar su desarrollo con el curso "Integrales Singulares", dictado simultáneamente por H. Aimar. Por lo expresado sólo se esperan conocimientos básicos de Análisis Real y su propósito es más bien una introducción e ilustración del tema antes que un desarrollo completo. He elegido un estilo coloquial que hace más fácil la escritura y espero que la lectura. El enfoque de estas notas refleja nuestra experiencia y preferencias. Estas notas deben mucho a los libros de M. de Guzmán que se mencionan en la bibliografía y cuya lectura es fuertemente recomendable a quien quiera enterarse del tema. Para su preparación solicité y obtuve la colaboración de L. Forzani, quien trabajó intensamente en problemas relacionados para la realización de su tesis de doctorado. Hemos incluido algunas de sus demostraciones de los lemas de cubrimiento que simplifican y aclaran las demostraciones clásicas que pueden encontrarse en libros de textos.

Como era de esperar el resultado final de estas notas no contiene todo lo que creemos importante, ni tan siquiera lo que hubieramos deseado incluir. Sólo deseamos que ellas puedan servir de sustento para hacer más agradable el cursado.

Roberto Macías

1. Convergencia puntual y operadores maximales

En la resoluci ́on de problemas por métodos analíticos, la aproximación por medio de una sucesión de operadores es una de las herramientas más poderosas y usuales. Por lo tanto, el estudio de los problemas de convergencia asociados es un punto de investigacion central en análisis.

Quizás los ejemplos más familiares sean las series de Fourier y la transformada de Hilbert que definiremos en seguida y que de alguna manera serán paradigmas de las situaciones que se intentarán considerar.

La serie de Fourier de una función $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, periódica de período 2π está definida como

$$Sf(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad c_k = \int_a^b f(t)e^{-iktx}dt.(1.1)$$

En realidad se entiende Sf como el límite, en algún sentido, de las sumas parciales

$$S_n = \sum_{-n}^{n} c_k e^i kx.$$

Similarmente para dar un significado a la transformada de Hilbert de $f(x), x \in \mathbb{R}$, definida por

$$Hf(x) = \int \frac{f(x-t)}{t} dt, \tag{1.2}$$

se recurre al estudio de sus truncaciones

$$H_\epsilon f(x) = \int_{|t|\geq\epsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt,$$

y nos enfrentamos al problema de estudiar su convergencia cuando ε tiende a cero.

Hay una gama muy grande de formas de convergencias posibles para estos límites: en distintas normas funcionales, siendo las más usuales las normas L^p; en medida; en casi todo punto; etc. De todas ellas, la más natural es la de la convergencia puntual o en casi todo punto y es, al mismo tiempo, la de más delicado tratamiento; por lo que se trata de buscar variantes al problema de determinar qué condiciones deben imponerse a f para asegurar su existencia.

Supongamos que se tiene una sucesión de operadores T_k definidos en algún $L^p(\mathbb{R}_n)$. La convergencia puntual estaría demostrada si

(1.3) $$C(s,f) = |\{x : limsup_{k,j}|T_k f(x) - T_j f(x)| > s\}| = 0$$

Si además es conocido que los T_k son lineales y que convergen puntualmente para toda $g \in C_0(\mathbb{R}_n)$, tomando $h = f - g$, se tiene

$$C(s,f) = C(s,h).$$

En consecuencia si, se sabe algo más, por ejemplo que C(s,h) converge a cero cuando $||h||_p$ tiende a cero se obtiene el resultado deseado.

Se puede obtener una simplificación del problema considerando en lugar de C(s,f) el conjunto

(1.4) $$C^*(s,f) = \{x : sup_k|T_k f(x)| > s\};$$

puesto que claramente $|C^*(s,f)| \geq |C(s,f)|$.

Es costumbre usar la notación

$$T^*(f) = sup_k|T_k f(x)|.$$

Por otra parte, para una función dada f(x) se tiene la desigualdad de Chevichev,

$$|\{x : |f(x)| > s\}| \leq \int_{f(x)>s} \frac{|f(x)|^p}{s^p} dx.$$

Lo que implica

$$|\{x : |f(x)| > s\}| \leq \frac{1}{s^p} \int |f(x)|^p dx. \tag{1.5}$$

Entonces, si supiéramos que el operador T^* cumple

$$||T^* f||_p \leq ||f||_p, \tag{1.6}$$

es decir que T^* es acotado en $L^p(I\!R^n)$, o expresado de otra forma, es de tipo fuerte (p,p), resulta, usando (1.5)

$$|C(s,f)| \leq |\{x : |T^* f(x)| > s\}| \leq \frac{1}{s^p} ||T^* f||_p^p \leq \frac{C}{s^p} ||f||_p^p.$$

La última desigualdad nos muestra que —C(s,f)— converge a cero con la norma p de f, que es el resultado buscado. Podemos observar que habría sido suficiente requerir

$$|\{x : |T^* f(x)| > s\}| \leq \frac{C}{s^p} ||f||_p^p.$$

Esto es T^*, es de tipo débil $(2,2)$. Enunciamos a continuación un resultado sorprendente y profundo de a A. P. Calderón, anunciado en 1959 por A. Zygmund en su libro, [Z] ("Trigonometric Series", tomo II, pp 165), que demuestra que no se ha perdido mucha información en esta línea de razonamiento.

Teorema: Supongamos que $Sf(x)$ converge en casi todo punto para toda $f(x) \in$ Ł^2. Sea $S^* = sup_n |S_n f(x)|$. Entonces S^* es de tipo débil (p,p). Esto es,

$$|\{x : |S^* f(x)| > s\}| \leq \frac{A}{s^2} ||f||_2^2.$$

Este Teorema y el lema que enunciamos a continuación y que sirve de base para su demostración, arrojan mucha luz sobre el comportamiento de operadores maximales y son el punto de partida y la idea central, de poderosas generalizaciones, entre las que cabe mencionar especialmente a las realizadas por E. Stein, S. Sawyer y E. Nikishin.

Lema: Sea $\{E_k\}$ una sucesión de conjuntos periódicos, tales que $\sum |E_k| = \infty$, entonces existen números $x_k \in [0, 2\pi)$ tales que todo punto pertenece a infinitos conjuntos $x_k + E_k$.

2. Operador maximal de Hardy Littlewood

El operador maximal más simple y que surge de una manera natural al estudiar *derivación de integrales* es el de Hardy-Litlewood. Supongamos que queremos determinar para cuales $x \in I\!R$ se tiene que

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-y)dy \tag{2.1}$$

Si la función f es continua en x, esto es claramente cierto. Repitiendo el razonamiento del parágrafo anterior, podemos considerar, $h = f - g$, con $f \in L^1(I\!R)$ y $g \in C_0(I\!R)$. Entonces denotando

$$m_\varepsilon(f)(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-y)dy, \tag{2.2}$$

Si el resulatdo es cierto para casi todo punto, será posible probar que

$$|\{x \in I\!R : \limsup |f(x) - m_\varepsilon(f)(x)| > s\}| = 0.$$

Por la desigualdad triangular,

$$|f(x) - m_\varepsilon(f)(x)| \leq |h(x)| + |g(x) - m_\varepsilon(g)(x)| + |m_\varepsilon(h)(x)|.$$

Como para la función g el resultado es cierto, se tiene

$$|\{x \in I\!R: \limsup |f(x) - m_\varepsilon(f)(x)| > s\}| \leq |\{x \in I\!R: |h(x)| > \frac{s}{2}\}|+$$

$$|\{x \in I\!R: \limsup |m_\varepsilon(h)(x)| > \frac{s}{2}\}|$$

Nuevamente es, más simple considerar el conjunto

$$|\{x \in I\!R: Mh(x) > \frac{s}{2}\}|$$

donde

$$Mh(x) = \sup_{\varepsilon>0} m_\varepsilon(h)(x) \tag{2.3}$$

En consecuencia, si se sabe

$$|\{x : Mh(x) > s\}| \leq \frac{C}{s}||h(x)||_1 \tag{2.4}$$

se tiene

$$|\{x \in I\!R: \limsup |f(x) - m_\varepsilon(f)(x)| > s\}| \leq \frac{C}{s}||h||_1 + \frac{C}{s}||h||_1$$

por la densidad de C_0 en $L^1(I\!R)$, se concluye que (2.1) vale para casi todo punto de $I\!R$.

El operador $Mf(x)$ definido en (2.3) es el Operador Maximal de Hardy-Littlewood, y la propiedad fundamental (2.4) que nos permitió demostrar el Teorema de derivación de Lebesgue (2.1), es el tipo débil $(1,1)$ deMf.

Tanto el Teorema de derivación de Lebesgue como su demostración tienen una generalización inmediata al caso de más dimensiones. Esto es, para toda $f \in L^1(I\!R^n)$, vale

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy, \tag{2.5}$$

para casi todo $x \in I\!R^n$. Para la demostración del teorema es necesario considerar el operador maximal de Hardy-Litlewood, para una función f localmente integrable con respecto a la medida de Lebesgue en $I\!R^n$

Centrado

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

donde el supremo se toma sobre las bolas euclídeas de $I\!R^n$ con centro en x.

Hemos usado la notación M_c para distinguir la versión centrada de la

No centrada

$$M f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|} \int_{B} |f(y)|dy,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas euclídeas de $I\!R^n$ que contienen a x.

Como se ha observado, es necesario demostrar el tipo débil del operador maximal, para lo cual debemos medir el conjunto $|\{x : M_c f(x) > s\}|$. Esto nos lleva al estudio de propiedades que permitan efectuar estimaciones de estas medidas. Los resultados conocidos están contenidos en los llamados *lemas de cubrimientos*. Antes de estudiar este problema, observemos que la estrecha relación entre la medida de Lebesgue y la distancia euclídea de $I\!R^n$ puesta de manifiesto en la *"duplicación"*; $|B(x,2r)| = 2^n|B(x,r)|$, hace que las funciones maximales $M_c f$ y $M f$ sean equivalentes puntualmente y que, por consiguiente, los operadores maximales M y M_c tengan las mismas propiedades de acotación y tipo en espacios de Lebesgue. Esta situación se extiende inmediatamente al contexto de espacios de tipo homogéneo (X, d, μ), que consideraremos más adelante, y cuya característica esencial es la relación entre la casi-distancia d y la medida μ reflejada en la propiedad de duplicación. Esta misma propiedad es suficiente para probar el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y),$$

definido en $L^1_{loc}(X, d, \mu)$; a partir del Lema de Wiener, que siempre es válido cuando existe alguna medida con la propiedad de duplicación de las d-bolas en X.

3. Lemas de Cubrimiento

$\mathcal{B}$. *Si $\mathcal{I}$ es una familia finita de intervalos acotados de números reales entonces es posible elegir una subfamilia $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}$ que cubre lo mismo que $\mathcal{I}$ tal que ningún número real está en más de dos miembros de $\mathcal{J}$.*

$\mathcal{W}$. *Si $\mathcal{I}$ es una familia finita de intervalos acotados de números reales entonces es posible elegir una subfamilia $\mathcal{H}$ de $\mathcal{I}$ cuyos triples cubren al menos lo mismo que $\mathcal{I}$ tal que ningún número real está en más de un miembro de $\mathcal{H}$.*

Estos enunciados constituyen los puntos de partida para el desarrollo de las técnicas de cubrimiento de Besicovitch y Wiener respectivamente. Aún cuando en $\mathcal{B}$ es posible el solapamiento de dos intervalos elegidos mientras que $\mathcal{W}$ provee intervalos disjuntos, el hecho esencial que en el caso de que la medida no duplique hace preferible $\mathcal{B}$ a $\mathcal{W}$ es que los intervalos que cubren son de la familia original y no necesitan ser duplicados o modificados. En la demostración de $\mathcal{B}$ en una dimensión se advierte que intervienen propiedades de orden de $\mathbb{R}^1$ de los que $\mathcal{W}$ podría prescindir. Esta observación adquiere su real dimensión en la generalizaciones de $\mathcal{W}$ a estructuras más generales como la de espacios de tipo homogéneo en los cuales las formas de las bolas pueden ser muy arbitrarias. Por el contrario, en un trabajo reciente de E. Sawyer y R. Wheeden [S-W] se prueba que una generalización a espacios de tipo homogéneo arbitrarios del Lema de Besicovitch no es posible. El ejemplo de Sawyer y Wheeden se construye en el grupo de Heinsenberg. Es sabido de los trabajos de L. Caffarelli y C. Calderón [C-C] que para rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados, asociados a la norma del máximo cuando se consideran homogeneidades mixtas, el Lema de Besicovitch es válido. Sin embargo el Lema de Besicovitch no es invariante por cambio de casi distancias equivalentes.

Presentamos a continuación un lema que tiene su origen en un resultado clásico de Besicovitch (1945), del cual daremos dos demostraciones debidas a L. Forzani [F], que recogen ideas de S. Chanillo y B. Muckenhoupt, [Ch-M], y A. P. Calderón. [C], y que representan una notable simplificación a las que por ejemplo se pueden encontrar en [G1] y [G2].

(3.1) **Lema de Besicovitch:** Sea I un conjunto de índices. Para cada $i \in I$ está dado un punto $x_i \in \mathbb{R}^n$ y un número $r_i \in \mathbb{R}^+$. Sea $B_i = B(x_i, r_i)$ entonces existe un sucesión $\{B-k\} \subset \{B_i\}_{i \in I}$ de modo que (3.1.1) $\{x_i : \ i \in I\} \subset \bigcup_{j \in J} B_j$; (3.1.2) existe una constante C, que sólo depende de la dimensión, tal que

$\sum_k \chi_{B_k}(z) \leq C.$

Supuesto el Lema de Besicovitch, la demostración del tipo débil $(1,1)$ de M es inmediata.

Para cada $x \in \{x : Mf(x) > s\}$ sea $B_x^* = B(y_x, r_x)$ tal que $x \in B_x^*$ y

$$\frac{1}{|B_x^*)|}\int_{B_x^*} f(t)dt > s.$$

Por simples consideraciones métricas $B(y_x, r_x) \subset B(x, 2r_x) = B_x$; entonces

$$\frac{1}{|B_x)|}\int_{B_x} f(t)dt > \frac{s}{2^n}.$$

Aplicando Besicovitch se tiene que

$$\begin{aligned}
|\{x : Mf(x) > s\}| &\leq |\bigcup_k B_k| \\
&\leq \sum_k |B_k| \\
&\leq \frac{2^n}{s}\sum_k \int_{B_k} f(t)dt \\
&\leq \frac{2^n}{s}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)(\sum_k \chi_{B_k}(t))dt \\
&\leq C\frac{2^n}{s}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)dt
\end{aligned}$$

Lo que nos da el tipo débil de $(1,1)$ de M.

Demostración del lema de Besicovitch: Trabajaremos con cubrimientos finitos. Los casos generales de cubrimientos infinitos pueden obtenerse usando la idea de A. P. Calderón [C] que consiste en clasificar las bolas del cubrimiento dado en familias, cada una de las cuales contiene bolas de esencialmente el mismo radio y trabajar dentro de estas familias y con bolas de distintas familias separadamente.

El problema será estimar la medida del solapamiento por constantes que sólo dependan de la dimensión.

Para ellos usaremos la homotecia de razón $\frac{1}{r}$ desde un punto z de $I\!R^n$

$$T_r^z(x) = \frac{x-z}{r} + z$$

Sus propiedades elementales son útiles en todos los lemas de cubrimiento en los que se puede aplicar la técnica de S. Chanillo y B. Muckenhoupt. Es claro que T_r^z transforma rectas en rectas paralelas y esferas en esferas. Si B es una bola con centro x y radio R tal que $z \in B$, entonces, claramente, $z \in T_r^z(B) = B(T_r^z(x), \frac{R}{r})$ y, si además $r_1 \geq r_2$ entonces $T_{r_1}^z(B) \subset T_{r_2}^z(B)$. En efecto; sea $y \in T_{r_1}^z(B)$ entonces

$$\begin{aligned} |y - T_{r_2}^z(x)| &\leq |y - T_{r_1}^z(x)| + |T_{r_1}^z(x) - T_{r_2}^z(x)| \\ &< \frac{R}{r_1} + |x-z|[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}] \\ &< \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} - \frac{R}{r_1} = \frac{R}{r_2} \end{aligned}$$

Demostración del Lema de Besicovitch para I finito: Sean $I_1 = I; \alpha_1 \in I_1$ tal que $r_{\alpha_1} = \max_{\alpha \in I_1} r_\alpha$; $x_1 = x_{\alpha_1}; r_1 = r_{\alpha_1}$ y $B_1 = B(x_1, r_1)$. Construidos $I_1, ..., I_{k-1}; r_1, ..., r_{k-1}; B_1, ..., B_{k-1}$ definimos $I_k = \{\alpha \in I : x_\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i\}$; elegimos $\alpha_k \in I_k$ tal que $r_k = r_{\alpha_k} = \max_{\alpha \in I_k} r_\alpha$ y $B_k = B(x_k, r_k)$. Sea $J = \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$ donde N es el primer entero para el cual $I_{N+1} = \emptyset$, de donde (3.1.1) se concluye inmediatamente.

Probaremos ahora (3.1.2). Sea z un punto en M de las bolas B_j elegidas. Suponemos, por simplicidad de notación, que $z \in \bigcap_{j=1}^{M} B_j$, y que B_j ha sido elegida antes que B_{j+1}. El Lema estará probado si se demuestra que

(3.1.3) existe C que solo depende de n tal que $M \leq C$.

Primera demostración de (3.1.3).

Por nuestra selección $T^z_{r_k}(x_k) \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} T^z_{r_k}(B_i)$, para $k \leq M$. Por ser $r_k \leq r_i$ para $i < k$, $z \in B_i$ obtenemos que $B(T^z_{r_i}(x_i), 1) = T^z_{r_i} B_i \subset T^z_{r_k} B_i$. Así

(3.1.4) $\{B(T^z_{r_k}(x_k), 1/2)\}_{k=1}^M$ son disjuntas y

(3.1.5) $\bigcup_{k=1}^M B(T^z_{r_k}(x_k), \frac{1}{2}) \subset B(z, 2)$.

En efecto si $y \in B(T^z_{r_k}(x_k), \frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned} |y - z| &\leq |y - T^z_{r_k}(x_k)| + |T^z_{r_k}(x_k) - z| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{|x_k - z|}{r_k} \\ &< 2 \end{aligned}$$

De (3.1.4) y (3.1.5) obtenemos que

$$M = \frac{2^n}{w_n} \sum_{k=1}^{M} |B(T^z_{r_k}(x_k), \frac{1}{2})| \leq \frac{2^n}{w_n} |B(z, 2)| = 4^n$$

con w_n la medida de la bola unitaria; esto prueba (3.1.3).

Segunda demostración de (3.1.3).

Sea $\beta_{i,j}$ el ángulo entre los vectores $x_i - z$ y $x_j - z$, veamos que $\beta_{i,j} \geq \frac{\pi}{3}$. En efecto, sea $i < j$ y consideremos el triángulo cuyos lados son los vectores $x_i - z; x_j - z$ y $x_i - x_j$, por nuestra selección $|x_i - z| < r_i \leq |x_i - x_j|$ y $|x_j - z| < r_j \leq |x_i - x_j|$ y entonces por la ley del seno tenemos que $\beta_{i,j} \geq \frac{\pi}{3}$. Por consiguiente, el conjunto de puntos $S = \left\{\frac{z - x_i}{|z - x_i|}\right\}_{i=1}^M$ de la esfera unitaria S^{n-1} de $I\!R^n$ está disperso en el sentido que dos puntos distintos de S están a distancia mayor que 1 y por consiguiente el cardinal de S está acotado por una constante fija que sólo depende de n.

4. Descomposición de Calderón - Zygmund de una función

Nos ocuparemos ahora de una idea desarrollada por Calderón y Zygmund [C-Z], para el tratamiento de integrales singulares y que se ha transformado en una herramienta fundamental en los más diversos contextos, siendo, por ejemplo, la idea básica que lleva a la descomposición atómica de los espacios de Hardy H^p.

(4.1) **Teorema:** Dada una función $f \in L^1(I\!R^n)$, $f \geq 0$ y $s > 0$ existe una sucesión de cubos disjuntos (salvo los bordes) Q_i que cumplen

(4.1.1) $\lambda < \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f < 2^n\,\lambda$,

(4.1.2) $f(x) = b(x) + g(x)$,

(4.1.3) $b(x) = \sum_i (f(x) - \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f)\chi_{Q_i}(x)$,

(4.1.4) sop $b(x) \subset \cup Q_i$,

(4.1.5) $g(x) = f(x) < \lambda$ si $x \notin \cup_i Q_i$,

(4.1.6) $g(x)\chi_{Q_i}(x) = \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f < 2^n\,\lambda$.

Demostración: Como $f \in L^1(I\!R^n)$. Supongamos que el soporte de f está contenido en Q, un cubo centrado en cero tal que, $M(f,Q) = \frac{1}{|Q|}\int_Q f \leq \lambda$. Subdividimos Q en 2^n cubos Q_i^1 de lados la mitad de los de Q. Si alguno de ellos cumple $m(f, Q_i^1) \geq \lambda$ lo apartamos para nuestra sucesión y cumple (4.1.1). De lo contrario, continuamos subdividiéndolos. Si un x no está en la unión de los cubos elegidos, significa que $m(f,Q) \leq \lambda$ para todo cubo que lo contiene. Por lo tanto por el teorema de diferenciación de Lebesgue $f(x) \leq \lambda$, para casi todo x fuera de la unión de los Q_i. El resto de las propiedades se siguen de la definición de b. Si el soporte de f no es compacto comenzamos con un cubo de medida mayor que $\frac{1}{\lambda}||f||_1$ y subdividimos todo el espacio, en cubos de igual tamaño.

5. Espacios de tipo homogéneo

Las propiedades métricas de los espacios euclídeos tienen suma importancia en la obtención de los resultados precedentes, incluso en la descomposición de Calderón - Zygmund parecen intervenir los ejes coordenados. En un artículo de R. Coifman y M. de Guzmán [C-G], publicado en el número de la Revista de la UMA en homenaje a A. González Domínguez, se observa que era posible relajar la desigualdad triangular satisfecha por la métrica. Llevó algún tiempo entender la naturaleza de espacios de medida, con una métrica que cumple esta condición triangular más relajada. Este concepto fue evolucionando sobre todo hasta llegar a la comprensión de la relación entre la topología y la métrica, las que se creía necesario imponer por separado. Así en [C-W1] se generaliza la exigencia de homogeneidad, en [M] , modificando otra vez la definición se desarrollan sus propiedades demostrando que era posible definir y obtener las propiedades básicas de interpolación de los espacios de Hardy, H^p; los resultados obtenidos fueron recogidos en el trabajo [C-W2], que sirvió para dar difusión a estos espacios. No obstante, recién en [M-S] se llega a dilucidar el juego de las distintas estructuras, métrica, topológica y de medida que intervienen en estos espacios y se llega a la definición que es la hoy adoptada.

(5.1) **Definición:** Sea X un conjunto. Se dice que una función no negativa $d(x,y)$ definida en $X \times X$ es una *casi-distancia* si satisface

(5.1.1) $d(x,y) = 0$ si y sólo sí $x = y$,

(5.1.2) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,\, y \in X$,

(5.1.3) existe una contante K finita tal que

$$d(x,y) \leq K(d(x,z) + d(z,y)) \ \forall x,\, y,\, z \in X.$$

Los subconjuntos $\{(x,y): d(x,y) < \epsilon\}$ de $X \times X$ definen una base de una estructura uniforme metrizable en X. Nos referiremos a esta topología como la $d-$topología. Las bolas abiertas $B(x,r) = \{y: d(x,y) < r\}$, forman una base de entornos de x para la $d-$topología, inducida por la estructura uniforme.

(5.2) **Definición:** Llamaremos *espacio de tipo homogéneo* (X, d, μ) a un conjunto X provisto de una casi-distancia $d(x,y)$ y de una medida positiva μ, definida en una $\sigma-$ álgebra de subconjuntos de X que contiene a los conjuntos $d-$ abiertos y las bolas $B(x,r)$, tal que existe una constante A satisfaciendo,

(5.2.1) $0 < \mu(B(x,2r)) \leq A\mu(B(x,r))$, para todo $x \in X$, $r > 0$.

Para ilustrar su comportamiento demostraremos algunos resultados aparecidos en [C-G].

(5.3) **Lema tipo Wiener:** Sea I un conjunto de índices tales que para cada $i \in I$ están dados un punto $x(i)$, perteneciente un conjunto acotado de X, y un número $r(i) > 0$. Entonces existe una sucesión de índices de I tales que si $x_k = x(i_k)$, $r_k = r(i_k)$, $B_k = B(x_k, r_k)$, se tiene

(5.3.1) $B_k \cap B_j = \emptyset$, $k \neq j$,

(5.3.2) $\{x(i): i \in I\} \subset \cup_{k=1}^{\infty} 5KB_k$,

(5.4) **Lema de tipo Whitney.** Sea $U \subsetneq X$, abierto y acotado. Dada una constante $C \geq 1$, existe una sucesión de bolas $B_j = B(x_j, r_j)$ tales que

(5.4.1) $U = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$,

(5.4.2) $B(x_j, 3CKr_j)$ contiene un punto del complemento de U.

(5.4.3) $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{B_j}(x) \leq D$, $D = D(K, C)$.

Con estos lemas es posible demostrar el tipo débil del operador maximal y la descomposición de Calderón-Zygmund, supondremos en adelante que vale el Teorema de derivación de Lebesgue, para lo cual es suficiente que la medida μ sea regular.

(5.5) **Definición:** Si f es localmente integrable definida en X, se define la función maximal $Mf(x)$, (no centrada)

$$Mf(x) = sup\{\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f|d\mu : x \in B = B(x,r)\}$$

(5.6) Vale el tipo débil $(1,1)$ para el operador maximal M. Es decir, existe C_0 tal que para toda $f \in L^1(X)$,

(5.6.1) $\mu(\{x \in X : Mf(x) > s\} \leq \frac{C_0}{s}||f(x)||$.

(5.7) **Descomposición de Calderón-Zygmund:** Sea $f \leq 0$, $f \in L^1(X)$, con soporte acotado, el conjunto $\{x \in X : Mf(x) > s\}$ es abierto. Además ya que por el Teorema de Derivación de Lebesgue, $f(x) \leq Mf(x)$,

(5.7.1) $f(x) \leq Mf(x) \leq s \quad si\ x \notin U_s$

Si $\mu(X) = \infty$, entonces U_s es abierto, acotado y distinto de X. Si $\mu(X) < \infty$, entonces X_s es acotado y; si tomamos $s > \frac{C_0}{\mu(X)}||f(x)||_1$; también U_s es abierto, acotado y distinto de X. Utilizando Whitney, (5.4), resulta $U_s = \cup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j)$. Además existe $y_j \in B(x_j, 3CKr_j)$,$y_j \notin U_s$. Por lo tanto, usando (5.1.3) y (5.2.1) , se tiene

(5.7.2) $\frac{1}{\mu(B_j)}\int_{B_j} fd\mu \leq \frac{C'}{\mu(B(x_j,3CKr_j))}\int_{B(x_j,3CKr_j)} fd\mu \leq C'Mf(y) \leq s$.

Por otra parte $\sum_{j=1}^{\infty}\chi_j(x)$ está acotada por una constante finita, de modo que podemos definir

$$b_i(x) = f(x)\ \frac{\chi_i(x)}{\sum\chi_j(x)} - [\frac{1}{\mu(B_i)}\int_{B_i} f\frac{\chi_i}{\sum\chi_j}d\mu\ ]\ \chi_i(x).$$

Tomando

(5.7.3) $b(x) = \sum b_i(x)$,

(5.7.4) $g(x) = f(x) - b(x)$,

se tiene por definición de b_i, (5.7.1), (5.4.3) y (5.7.2.)

(5.7.5) $\int b_i(x) d\mu(x) = 0$,

(5.7.6) $g(x) = f(x) \leq s, \quad si\ x \notin U_s$ y

(5.7.7) $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(B_i)} [\int_{B_i} f \frac{\chi_i}{\sum \chi_j} d\mu]\, \chi_i(x) \leq Ds, \quad si\ x \in U_s$.

Por otra parte, usando el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal,(5.6), y (5.4.3) obtenemos

(5.7.8) $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq C|U_s| \leq \frac{C}{s} ||f||_1$.

6. Cubrimientos por bolas no centradas, variantes del Lema de Besicovitch, el Lema de Morse

Como mencionamos en la introducción, la importancia de los Lemas de tipo Besicovitch, radica en que las bolas de la familia seleccionada no necesitan ser ampliadas para cubrir el conjunto de todos los centros. En los operadores que estudiaremos en los Capítulos 3 y 4, notaremos que surge la necesidad de investigar la validez de lemas de cubrimiento de tipo Besicovitch con bolas no centradas. Por ejemplo la siguiente familia de bolas surgirá naturalmente al analizar el operador maximal del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck: dados $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ y $0 < r < 1$ sea $B_{y,r} = B(\frac{y}{r}, |y|\frac{1-r}{r})$. Sea $\mathcal{B}$ la familia de tales bolas. Es claro que $y \in \partial B$ para toda B en $\mathcal{B}$. Sea $E = S^{n-1}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$. Si para cada $y \in E$

consideramos la bola cerrada $\overline{B}_{y,\frac{1}{2}} = \overline{B}(2y,1)$, es claro que tenemos un cubrimiento de E que no admite subcubrimientos con solapamiento finito. Si en cambio el problema nos permite dilatar levemente el diámetro de las bolas $B(2y,1)$ para tener en su lugar bolas de la forma $B(2y, 1+\epsilon)$ con $\epsilon > 0$ pequeño, resulta claro de consideraciones geométricas elementales que son necesarias de orden de $\epsilon^{-\frac{n-1}{2}}$ de tales bolas para cubrir E. Esto indica que el solapamiento de dichas bolas es de ese mismo orden.

El siguiente resultado es un lema debido a Morse (1947) (Ver[G2]) en el que el lema de Besicovitch se extiende a formas geométricas mas generales que bolas. La demostración que daremos es una extensión de la primera prueba del Lema (3.1).

(6.1) Lema: Morse (1947). Sea I un conjunto finito. Supongamos que para cada $\alpha \in I$ existe x_α en $\mathbb{R}^n$, y un conjunto $H(x_\alpha)$ con las siguientes propiedades:

(6.1.1) existen un $m > 0$, y para cada $\alpha \in I$ un r_α tales que $B(x_\alpha, r_\alpha) \subset H(x_\alpha)$ $\subset B(x_\alpha, m\, r_\alpha)$;

(6.1.2) para $z \in H(x_\alpha)$, $H(x_\alpha)$ contiene a la cápsula convexa de $\{z\} \cup \overline{B}(x_\alpha, r_\alpha)$.

Entonces podemos seleccionar una subfamilia J de I que satisface:

(6.1.3) $\{x_\alpha : \ \alpha \in I\} \subset \bigcup_{\alpha \in J} H_\alpha$,

(6.1.4) existe una constante C que sólo depende de la dimensión tal que

$\sum_{\alpha \in J} \chi_{H_\alpha}(x) \leq C\, m^n$.

Demostración: Sean $I_1 = I$, $\alpha_1 \in I_1$ tal que $r_1 = r_{\alpha_1} = \max_{\alpha \in I_1} r_\alpha$ y $H_1 = H_{\alpha_1}$. Construidos $I_1, ... I_{k-1}; r_1, ..., r_{k-1}; H_1, ..., H_{k-1}$ definimos $I_k = \{\alpha \in I : x_\alpha \notin$

$\bigcup_{j=1}^{k-1} H_j\}$, elegimos ahora $\alpha_k \in I_k$ tal que $r_k = r_{\alpha_k} = \max_{\alpha \in I_k} r_\alpha$ y $H_k = H_{\alpha_k}$. Sea $J = \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$ donde N es el primer entero para el cual $I_{N+1} = \emptyset$, de aquí sigue (6.1.3). Probaremos ahora (6.1.4). Sea z un punto en M de los conjuntos H_j elegidos. Suponemos, por simplicidad de notación, que $z \in \cap_{i=1}^{N} H_i$, y que H_i ha sido elegido antes que H_{i+1}. Por nuestra selección $T_{r_k}^z(x_k) \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} T_{r_k}^z(H_i)$ donde r_k denota el radio de $B_k = B(x_k, r_k) \subset H_k$. De la propiedad (6.1.2), del hecho que $r_k \leq r_i$, para $1 \leq i \leq k-1$ y como $z \in H_i$ tenemos que $B(T_{r_i}^z(x_i), 1) = T_{r_i}^z(B_i) \subset T_{r_k}^z(H_i)$. En efecto, si $x \in T_{r_i}^z(B_i)$ entonces $r_i(x-z)+z \in B_i$ luego el segmento de recta que une a z con $r_i(x-z)+z$ está contenido en H_i; como $r_k(x-z)+z$ pertenece a dicho segmento tenemos que $x \in T_{r_k}^z(H_i)$. Por consiguiente $T_{r_k}^z(x_k) \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} T_{r_i}^z(B_i)$ y así resulta que las bolas $B(T_{r_i}^z(x_i), \frac{1}{2})$ son disjuntas dos a dos. Como además $\bigcup_{i=1}^{N} B(T_{r_i}^z(x_i), \frac{1}{2}) \subset B(z, m)$ tenemos (6.1.4):

$$\sum_{\alpha \in J} \chi_{H_\alpha}(z) \leq C\, m^n.$$

(6.2) **Corolario:** Sea I un conjunto finito y ϵ un número positivo menor que uno. Para cada $\alpha \in I$ está dada una bola $B_\alpha = B(y_\alpha, r_\alpha)$ y un punto $x_\alpha \in (1-\epsilon)B_\alpha$. Entonces existe una subfamilia J de I tal que

(6.2.1) $\{x_\alpha : \ \alpha \in I\} \subset \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$,

(6.2.2) existe una constante C que sólo depende de la dimensión tal que

$\sum_{\alpha \in J} \chi_{B_\alpha}(x) \leq C\, \epsilon^{-n}$.

Demostración: Tomemos $H(x_\alpha) = B_\alpha$, $r_\alpha = \epsilon\, r_\alpha$ y $m = \frac{2}{\epsilon}$ en el Lema (6.1) y obtenemos el resultado.

El Lema de Chanillo y Muckenhoupt y generalizaciones

En los lemas anteriores los cubrimientos obtenidos son subcubrimientos por bolas de la familia original que no necesitan ser ampliadas, como sucede en espacios de tipo homogéneo con el Lema de Wienner. Aún en el caso de espacios métricos, en los que $K = 1$, el factor de dilatación que define $\tilde{B}$ es una constante fija mayor que uno. Una situación intermedia entre Besicovitch y Wiener fue introducida por Chanillo-Muckenhoupt en [Ch-M]. Se pretende cubrir con dilataciones pequeñas (factor cercano a uno) admitiendo un solapamiento mayor en las bolas elegidas. Si B es una bola y α es un número real positivo, denotaremos con αB la bola concéntrica con B cuyo radio es α veces el radio de B.

(6.3) **Lema de Chanillo-Muckenhoupt:** Sea $0 < \delta < \frac{1}{2}$ fijo. Sea I un conjunto finito de índices y para cada α en I sea B_α una bola euclídea en $\mathbb{R}^n$. Existen un subconjunto J de I y una constante C que sólo depende de la dimensión tales que

(6.3.1) $\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \subset \bigcup_{\beta\in J}(1+\delta)B_\beta$,

(6.3.2) $\sum_{\beta\in J} \chi_{B_\beta}(x) \leq C\ \delta^{-n}$

Probaremos la siguiente extensión de (6.3.2) en la que se inspira la idea del Lema (3.19), que usaremos en la demostración del tipo débil (1.1) del operador maximal del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck.

(6.3.3) existe una constante C_n que sólo depende de la dimensión de modo que

para $\delta < \gamma < 1$ vale la desigualdad

$\sum_{\beta\in J} \chi_{\gamma B_\beta}(x) \leq C\ (\frac{\gamma}{\delta})^n$

Demostración: Sean $I_1 = I$, $\alpha_1 \in I_1$ tal que $r_1 = r_{\alpha_1} = \max\{r_\alpha : \alpha \in I_1\}$ y $B_1 = B_{\alpha_1}$. Construidos $I_1, ..., I_{k-1}; r_1, ..., r_{k-1}; B_1, ..., B_{k-1}$; definimos $I_k = \{\alpha \in I : B_\alpha \not\subset \bigcup_{j=1}^{k-1}(1+\delta)B_j\}$, elegimos ahora $\alpha_k \in I_k$ tal que $r_k = r_{\alpha_k} = \max\{r_\alpha : \alpha \in I_k\}$ y $B_k = B_{\alpha_k}$. Sea $J = \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$ donde N es el primer entero para el cual $I_{N+1} = \emptyset$, con esta selección la propiedad (6.3.1) resulta inmediata. Demostraremos ahora (6.3.3). Sea z un punto en M de las bolas $\gamma\ B_i$ elegidas. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z = 0$ y que $0 \in \cap_{i=1}^{M} \gamma\ B_i$, y que B_i ha sido elegida antes que B_{i+1}. Para $k = 1, ..., M$ el proceso de selección nos asegura que

$$T_{r_k}(B_k) \not\subset \bigcup_{i=1}^{k-1} T_{r_k}(B_i). \tag{6.3.4}$$

Observemos ahora que

$$|T_{r_k}(x_k) - T_{r_i}(x_i)| \geq \delta,$$

donde x_i es el centro de B_i. En efecto, si $|T_{r_k}(x_k) - T_{r_i}(x_i)| \leq \delta$, entonces para $z \in T_{r_k}(B_k)$ tenemos que

$$\begin{aligned} |z - T_{r_k}(x_i)| &\leq |z - T_{r_k}(x_k)| + |T_{r_k}(x_k) - T_{r_i}(x_i)| + |T_{r_i}(x_i) - T_{r_k}(x_i)| \\ &< 1 + \delta + \frac{r_i}{r_k}\gamma - \gamma \\ &< \frac{r_i}{r_k}(1+\delta), \end{aligned}$$

lo cual es absurdo por (6.3.4). De aquí que las bolas $\{B(T_{r_i}(x_i), \frac{\delta}{2})\}_{i=1}^{M}$ son disjuntas dos a dos. Además es claro que todas estas bolas estan contenidas en $B(0, 2\gamma)$. Así ,

$$M\delta^n \leq C\gamma^n,$$

de donde se concluye (6.3.3).

Referencias:

[A-F] Aimar, H. and Forzani, L., "Weighted weak type inequalities for certain maximal functions". Studia Mathematica 101 (1) (1991), 105-111.

[C] Calderón, A.P.,Notas de Curso.

[C-C] Caffarelli, L y Calderón, C.P., " On the Abel summability of multiple Jacobi Series " .Collquium Mathematicum 30 (1974), 277-288.

[C-G] Coifman, R.R. y Guzmán, M. de,"Singular integrals and multipliers on homogeneous spaces ", Revista de la Unión Matemática Argentina, 25 (1970), 137-143.

[C-W1] Coifman, R.R. y Weiss, G.,"Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certain Escpaces Homogenes ". Lecture Notes in Mathematics No. 242. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1971.

[C-W2] Coifman, R.R. y Weiss, G.,"Extensions of Hardy spaces and their use in analysis". Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569-645.

[Ch-M] Chanillo, S. and Muckenhoupt,B., "Nodal Geometry on Riemannian Manifolds". J. Differential Geometry, Vol 33 (4), 1991.

[F] Forzani, L., "Análisis en el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck: Lemas de cubrimiento de tipo Besicovitch y su aplicación al estudio del operador maximal de Orstein-Uhlenbeck ". Tesis Doctoral. Universidad Nacional de San Luis. 1993

[G1] Guzmán, M. de , "Real Variable Methods in Fourier Analysis". Mathematics Studies 46. North-Holland, New York, 1981.

[G2] Guzmán, M. de, "Differentiation of Integrals in $\mathbb{R}^n$". Lecture Notes in Mathematics No.481, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1975.

[M] Macías, R. A.,"Interpolation Theorems on Generalized Hardy Spaces",Tesis Doctoral. Washington University, Saint Louis. Mo. 1974.

[M-S] Macías, R. A. y C. Segovia,"Lipchitz functions on spaces of homogeous type",Advances in Mathematics, 33 (1979), 257-270.

[S-W] Sawyer, E. and Wheeden, R. L.,"Weighted Inequalities for Fractional Integrals on Euclidean and Homogeneous Spaces", preprint.

[Z] Zygmund, A., "Trigonometric Series". Cambridge University Press. Cambridge (1968).