La jerarquía de conceptos y la lógica fuzzy

D. Brignole — R. Entizne
Dto. de Matemática, U.N.del Sur, (8000) Bahía Blanca, Rca. Argentina
brignole@criba.edu.ar — rentizne@criba.edu.ar

Resumen

Se relacionan la jerarquía de conceptos originados por contextos multivaluados (Wille, [5]) con las EI y EII - álgebras (Xiaodong [6]) introducidas para definir el reticulado de los conjuntos fuzzy.

1 Introducción

El uso de aplicaciones valuadas en reticulados para la lógica y teoría de modelos se remonta a 1948 cuando A Mostowski [3] afirma que cualquier realización de una teoría formal no clásica está basada en un reticulado completo $\mathcal{L}$ cuya estructura se corresponde con el sistema de axiomas lógicos subyacente. En este contexto los símbolos predicado se interpretan como aplicaciones $\mathcal{L}$-valuadas.
Sin embargo no fue hasta 1965 que L.A. Zadeh [7], motivado por problemas de teoría de sistemas perfeccionó esta idea considerando a funciones valuadas en $([0,1], \leq)$ como funciones características de un nuevo tipo de subconjuntos, llamados conjuntos fuzzy.
Veinte años más tarde Goguen extiende esta idea al marco de la teoría de reticulados y llama a estos nuevos conjuntos $\mathcal{L}$-fuzzy conjuntos.
A partir de este momento surgen diversas estructuras ordenadas monoidales para el tratamiento de estos conjuntos. Las más frecuentes son: las *álgebras de Heyting* que se encuentran ligadas a trabajos intuicionistas; *MV-álgebras*, relacionadas con la lógica fuzzy positivista y las *estructuras de semigrupo* en el intervalo unitario real que conforman las *t-normas* y aparecen relacionadas con el tratamiento probabilístico de la lógica fuzzy.
La jerarquía de conceptos fue introducida con la intención de formalizar la lógica a partir de considerar un *concepto* determinado por su *extensión*, es decir, el conjunto de todos los objetos que pertenecen al concepto y su *intensión*, conformada por todos los atributos comunes a dichos objetos. En este trabajo presentaremos las definiciones establecidas por Rudolph Wille [5].

2 Conceptos previos

2.1 Jerarquía de conceptos

Definición 2.1 :(G, M, I) se dice un *contexto* si G es un conjunto de objetos, M un conjunto de atributos y I es una relación binaria entre G y M. Se indica por gIM que el objeto g posee la propiedad m.

Si consideramos los conjuntos definidos por:

$$A' = \{m \in M : gIm \text{ para todo } g \in A, \text{ siendo } A \subseteq G\}$$

$$B' = \{g \in G : gIm \text{ para todo } m \in B, \text{ siendo } B \subseteq M\}$$

vemos que la correspondencia establecida entre A y A' y B y B' establece una conexión de Galois entre 2^G y 2^M.

Definición 2.2 : Dado un contexto (G, M, I), un par (A, B) se dice un *concepto* si:
$A \subseteq G, B \subseteq M \quad A' = B$ y $B' = A$.
A se dice la *extensión* y B la *intensión* del concepto (A, B).

La jerarquía de conceptos está dada por la siguiente relación:

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \text{ si y sólo si } A_1 \subseteq A_2$$

o en forma equivalente:

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \text{ si y sólo si } B_2 \subseteq B_1$$

Si indicamos por $\mathcal{B}(G, M, I)$ al conjunto de conceptos del contexto (G, M, I) con esta relación de orden resulta $(\mathcal{B}(G, M, I), \leq)$ un reticulado completo, al que llamaremos *reticulado de conceptos*

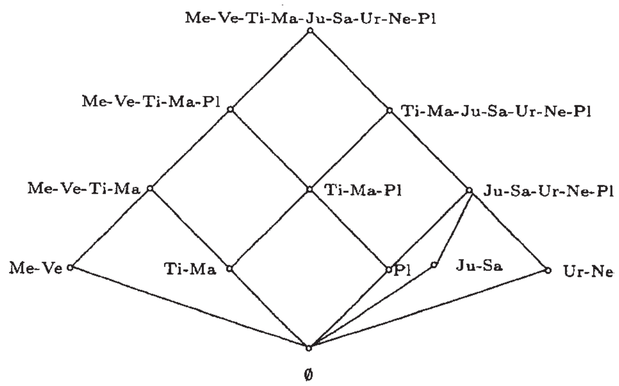
Ejemplo 2.1 Escribamos en primer lugar el ejemplo original de R. Wille:
El conjunto G de objetos son los planetas del sistema solar, las propiedades del conjunto M: ser de tamaño pequeño, ser de tamaño mediano, ser de tamaño grande, estar cerca del sol, estar lejos del sol, tener luna y no tener luna. La relación entre objetos y propiedades se indica en la siguiente tabla:

Planeta	pequeño	mediano	grande	cerca	lejos	si luna	no luna
Me	x			x			x
Ve	x			x			x
Ti	x			x		x	
Ma	x			x		x	
Ju			x		x	x	
Sa			x		x	x	
Ur		x			x	x	
Ne		x			x	x	
Pl	x				x	x	

Los conceptos de este contexto son, entonces:

($\{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Pl\}$, {pequeño})
($\{Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$, {tiene luna})
($\{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma\}$, {pequeño, cerca})
($\{Ti,\ Ma,\ \}$, {pequeño, tiene luna})
($\{Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$, {lejos, tiene luna})
($\{Me,\ Ve\}$, {pequeño, cerca, no tiene luna})
($\{Ti,\ Ma\}$, {pequeño, cerca, tiene luna})
($\{Pl\}$, {pequeño, lejos, tiene luna})
($\{Ur,\ Ne\}$, {mediano, lejos, tiene luna})
($\{Ju,\ Sa\}$, {grande, lejos, tiene luna})
($G,\ \emptyset$)
($\emptyset,\ M$)

y se representan por medio del siguente diagrama de Hasse:



El reticulado de conceptos es, según Wille, una respuesta básica a dos problemas importantes relativos a un contexto dado: La clasificación apropiada de los objetos y la

dependencia de los atributos. En este sentido, obtiene resultados acerca de la determinación de dicho reticulado, y de técnicas para representarlo.
Wille considera en particular *contextos multivaluados* (G, M, W, I) para representar atributos que puedan tomar distintos valores ya sean nominales (cerca, lejos, pequeño, mediano, etc.) o numéricos.

Definición 2.3 Un *contexto multivaluado* (G, M, W, I) es una 4-upla tal que G es un conjunto de objetos, M un conjunto de atributos, W un conjunto de valores y I es una relación binaria entre G y $M \times W$. Se indica por $gI(m, w)$ que el objeto g posee la propiedad m en grado w, o que g toma el valor w para el atributo m.
Si $|W| = n$, (G, M, W, I) es un contexto n-valuado.

En cualquier caso dicho contexto puede reducirse a un contexto 1-valuado considerando:

$$(G, M, W, I) = (G, M \times W, I).$$

En el caso en que W es un conjunto de números, cada atributo m puede considerarse como cierto tipo de *medida* de los objetos. Una *escala* será un contexto numérico Σ dado por $\Sigma = (G_\Sigma, M_\Sigma, I_\Sigma)$, donde G_Σ es ahora un conjunto de números. Se define una Σ-medida del contexto (G, M, I) como una función $\mu : G \to G_\Sigma$ tal que $\mu^{-1}(A)$ es una extensión de (G, M, I) para toda A extensión de $(G_\Sigma, M_\Sigma, I_\Sigma)$.
La escala $\Sigma_0 = (I\!R, M_0, \varepsilon)$ con $M_0 = \{(-\infty, r] : r \in I\!R\}$ se denomina *escala ordinal real.*
En este caso, los conceptos son de la forma: $((-\infty, a], \{(-\infty, r)\}_{r>a})$.[1]
Si A es una extensión de Σ_0, para que $\mu_m : G \to I\!R$ sea una Σ_0-medida, debe ser $\mu_m^{-1}(A)$ una extensión de (G, M, I).
Efectivamente:
Como $\mu_m^{-1}(A) = \mu_m^{-1}((-\infty, a]) = \{g \in G : \mu_m(g) \leq a\}$ basta tomar $B = \{(m, a)\}$, siendo $(m, a) \in M \times W$, para obtener $B' = \{g \in G : gI(m, a)\} = \{g \in G : \mu_m(g) \leq a\} = \mu_m^{-1}(A)$
Es decir, $\mu_m^{-1}(A)$ es una extensión de $(I\!R, M_0, \epsilon)$.

2.2 Conjuntos fuzzy

Zadeh (1965) introduce el concepto de *conjunto fuzzy* para el tratamiento de los predicados vagos, los que a diferencia de los predicados clásicos, no particionan el universo de definición en dos conjuntos: el subconjunto de los objetos que satisfacen la propiedad y el de los que no la satisfacen.
Un predicado vago originan sobre el universo un conjunto fuzzy A al cual los objetos $g \in G$ pertenecerán en distinto grado. Es decir, si la función característica de un conjunto clásico A es $\mu_A : G \to \{0, 1\}$, un conjunto fuzzy queda definido por su función característica $\mu_A : G \to [0, 1]$.

[1]Obviamente $x \in (-\infty, a]$ si y sólo si $x \in (-\infty, r)$, para todo $r > a$

Más aún, la familia de los conjuntos fuzzy cuyo universo es G es el conjunto $[0,1]^G$. Correspondiendo a los conectivos lógicos "y","ó", "no" se definen operaciones $\cap$, $\cup$, $\neg$, sobre los conjuntos fuzzy (a partir de sus funciones características) con las cuales $([0,1]^G, \cap, \cup, \neg)$ es un reticulado distributivo completo.
La forma de definir estas operaciones no es única, por el contrario existen infinitas alternativas reconociendo, la mayoría de ellas, la estructura de una T-norma para la conjunción y, en consecuencia, una S-norma para la disyunción.
Estas operaciones se elegirán de acuerdo a la situación que se desee modelizar. Las importantes aplicaciones de la lógica y teoría de conjuntos fuzzy en control, inteligencia artificial, etc., serán exitosas en cuanto la definición de las funciones características de los predicados vagos sea apropiada.

2.3 EI y EII álgebras

En su trabajo *The fuzzy sets and systems based on AFS structure, EI algebra and EII algebra* [6], Liu Xiaodong se propone acotar la arbitrariedad propia de la mayoría de los métodos usados para definir las funciones de pertenencia, mediante estructuras matemáticas.
A continuación indicaremos la definición de las mismas y sus resultados más importantes.

Definición 2.4 Sea M un conjunto de propiedades relativas a los elementos de un conjunto X, consideremos el conjunto EM de los elementos de la forma

$$\{\sum_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \subseteq M\}.^2$$

y la relación de equivalencia:

$\sum_{i\in I} A_i \sim \sum_{j\in J} B_j$ si y sólo si

para todoB_j $j \in J$ existe A_i $i \in I$ tal que $B_j \supseteq A_i$ y

para todoA_i $i \in I$ existe B_j $j \in J$ tal que $A_i \supseteq B_j$

Entonces el conjunto cociente $EM/\sim$, que por simplicidad seguiremos notando EM (y a

[2] es decir, son sumas formales de conjuntos de propiedades.

sus elementos $\sum_{i\in I} A_i$), con las operaciones binarias $+$ y $*$ definidas por:

$$\sum_{i\in I} A_i + \sum_{j\in J} B_j = \sum_{k\in I\cup J} C_i \quad \text{donde } C_i = A_i \text{ si } i \in I \text{ y } C_i = B_i \text{ si } i \in J$$

$$\sum_{i\in I} A_i * \sum_{j\in J} B_j = \sum_{i\in I, j\in J} A_i \cup B_j$$

y la relación de orden:

$$\sum_{i\in I} A_i \geq \sum_{j\in J} B_j \text{ si y sólo si para todo } B_j\ j \in J \text{ existe } A_i\ i \in I \text{ tal que } B_j \supseteq A_i$$

es la *EI-álgebra* $(EM, +, *, \leq)$ determinada por E y M. EM es un reticulado distributivo con primer elemento M y último elemento $\emptyset$.

Con estas definiciones la suma y el producto coinciden, respectivamente con el supremo y el ínfimo del reticulado EM.
Si $\sum\limits_{i\in I} A_i$, se reduce a A_1, éste se dice un un *concepto fuzzy molecular* y si $A_1 = \{p\}$, es un *concepto fuzzy atómico.*

En forma análoga define la EII álgebra asociada a E, X y M

Definición 2.5 Sean X, M dos conjuntos,

$$EXM = \{\sum_{k=1}^{n} a_k A_k,\ A_k \subseteq M,\ a_k \subseteq X\}$$

y la relación de equivalencia:

$\sum\limits_{i\in I} a_i A_i \sim \sum\limits_{j\in J} b_j B_j$ si y sólo si

para todo $B_j b_j$ $j \in J$ existe $A_i a_i$ $i \in I$ tal que $b_j \subseteq a_i$, $B_j \supseteq A_i$ y

para todo $A_i a_i$ $i \in I$ existe $B_j b_j$ $j \in J$ tal que $a_i \subseteq b_j$, $A_i \supseteq B_j$

Entonces el conjunto cociente $EXM/\!\sim$, que por claridad seguiremos notando EXM (y a sus elementos $\sum_{i\in I} a_i A_i$), con las operaciones:

$$\sum_{i\in I} a_i A_i + \sum_{j\in J} b_j B_j = \sum_{k\in I\cup J} c_k C_k \quad \text{donde } c_k C_k = a_k A_k \text{ si } k \in I \text{ y } c_k C_k = b_k B_k \text{ si } k \in J$$

$$\sum_{i\in I} a_i A_i * \sum_{j\in J} b_j B_j = \sum_{i\in I, j\in J} (a_i \cap b_j)(A_i \cup B_j) \text{ es la EII álgebra } (EXM, +, *, \leq)$$

$(EXM, \leq)$ es también un reticulado distributivo. Más aún, ambos (EM y EXM) son reticulados moleculares, lo que es equivalente a afirmar que son completamente distributivos (Wan Guo-Jun [2]).
Liu Xiaodong utiliza luego la estructura AFS (axiomatic fuzzy structure), introducida por Graver y Watkins [1]

Definición 2.6 Sean M, X conjuntos no vacíos, $\tau : X \times X \to 2^M$

Axioma 1: $\forall (x_1, x_2) \in X \times X, \tau(x_1, x_2) \subseteq \tau(x_1, x_1)$

Axioma 2: $\forall (x_1, x_2), (x_2, x_3) \in X \times X, \tau(x_1, x_2) \cap \tau(x_2, x_3) \subseteq \tau(x_1, x_3)$

(M, τ, X) es una *estructura AFS* si satisface los axiomas 1 y 2
Para cada (x, y), el subconjunto $\tau(x, y)$ de M es un conjunto de propiedades relativamente reflexivas, si satisfacen el axioma 1; transitivas, si satisfacen el axioma 2. Es decir, en una estructura AFS las propiedades de M permiten definir relaciones de orden.

Teorema 2.1 Si X y M son conjuntos y (M, τ, X) una AFS estructura, para todo $x \in X$, x induce un isomorfismo $\Phi_x : EM \to EXM$ y todo elemento en EM se corresponde con un único conjunto fuzzy de universo X tomando valores en EXM

A partir de este teorema resulta obvia la demostración de:

Teorema 2.2 Si X y M son conjuntos y (M, τ, X) una AFS estructura, todo concepto fuzzy sobre X puede ser representado a partir de conceptos fuzzy atómicos.

En particular, si tanto X como M son conjuntos finitos, admitiendo que toda propiedad m en M determina un orden $\leq_m$ sobre los elementos de X: $x_i \leq_m x_j$ si x_j posee la propiedad m en mayor grado que x_i, si se define $\tau(x_i, x_j) \leq M$ por: $m \in \tau(x_i, x_j)$ si y sólo si $x_i \geq_m x_j$, (M, τ, X) es una estructura AFS.

En estas condiciones la función de pertenencia de los subconjuntos fuzzy $A_k \subseteq X$, A_k determinado por el concepto fuzzy atómico m_k se define:

$$\mu_{A_k}(x) = \frac{|\{y \in X : y \leq_i x\}|}{|X|}, \quad x \in X$$

Utilizando la representación de un concepto fuzzy a partir de conceptos fuzzy atómicos, por los teoremas 2.1 y 2.2, es posible definir la función característica de un conjunto fuzzy cualquiera, obtenido por conjunciones y disjunciones de propiedades de M.
Las definiciones que se indican a continuación permiten obtener la función de pertenencia de todo subconjunto fuzzy determinado por una estructura AFS:

Si $A = A_1 \cap A_2$, entonces

$$\mu_A(x) = \mu_{\{m_1,m_2\}}(x) = \frac{|\{y \in X : y \leq_{m_1} x\} \cap \{y \in X : y \leq_{m_2} x\}|}{|X|}, \quad x \in X$$

Si $A = A_1 \cup A_2$, entonces

$$\mu_A(x) = \mu_{\{m_1\}+\{m_2\}}(x) = \frac{|\{y \in X : y \leq_{m_1} x\}|}{|X|} \vee \frac{|\{y \in X : y \leq_{m_2} x\}|}{|X|}, \quad x \in X$$

Ejemplo 2.2

Vamos a indicar un primer ejemplo muy sencillo en el cual la relación de orden que determina cada propiedad sobre el conjunto X sea trivial.

Sean las postulantes para el trabajo: Ana, Belén, Claudia, Débora, Erica, Florencia, Graciela, Hilda, Inés, Julieta. Representemos estas personas mediante el conjunto:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$$

Consideremos las propiedades: B: "tiene buena presencia", I: "tiene conocimientos de inglés", S: "Tiene buen manejo del software necesario" y el conjunto

$$M = \{B, I, S\}$$

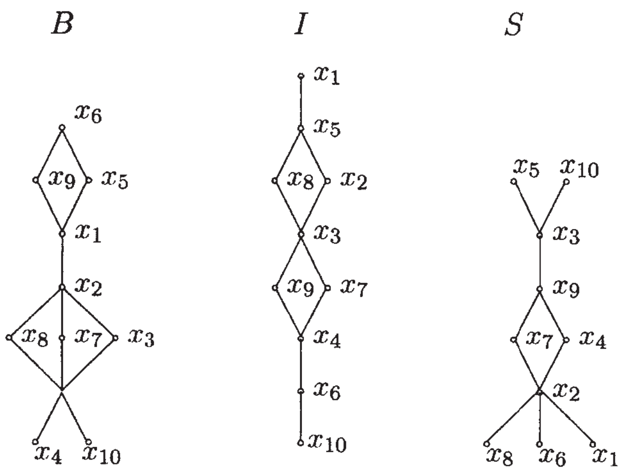
La siguiente tabla muestra el grado en que cada una de las postulantes satisface las condiciones en escala del 1 al 10.

o	B	I	S
x_1	7	10	3
x_2	5	7	4
x_3	4	6	8
x_4	2	3	6
x_5	8	8	10
x_6	9	2	3
x_7	4	4	6
x_8	4	7	3
x_9	8	4	7
x_{10}	2	1	10

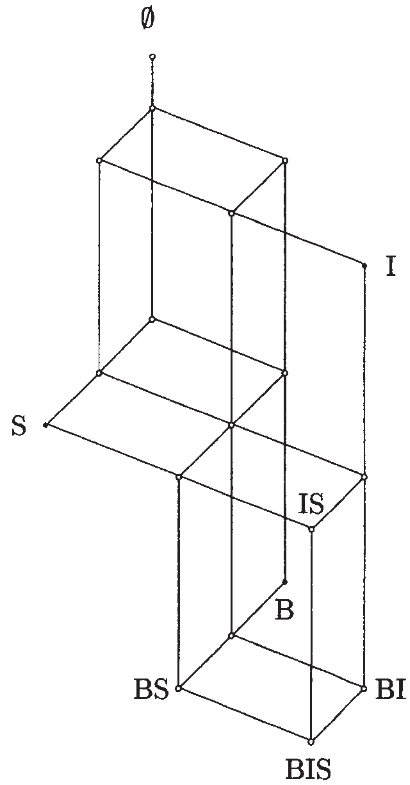
Si los conjuntos fuzzy definidos por las propiedades "tiene buena presencia", "tiene conocimientos de inglés", "maneja el software necesario" son, respectivamente, B, I, S, obtenemos la tabla de funciones de pertenencia siguiente:

μ	B	I	S
x_1	.7	1	.3
x_2	.6	.8	.4
x_3	.5	.6	.8
x_4	.2	.3	.6
x_5	.9	.9	1
x_6	1	.2	.3
x_7	.5	.5	.6
x_8	.5	.8	.3
x_9	.9	.5	.7
x_{10}	.2	.1	1

Los órdenes establecidos por cada una de las propiedades B, I, S son:



Resulta entonces el siguiente diagrama de Hasse para el álgebra EM:



En este diagrama, que corresponde a cualquier conjunto M con tres propiedades , podemos identificar el primer y último elemento del reticulado, respectivamente: M y $\emptyset$. Este conjunto vacío representa a los elementos de X sin ninguna restricción, es decir, $\mu_{\emptyset}(x) = 1$ para todo $x \in X$. Las propiedades de M están representadas por los conjuntos B, I y S

y los conceptos fuzzy moleculares por los conjuntos BI, BS y IS.

Notemos que estamos ante un reticulado distributivo libre con tantos generadores como propiedades tiene M al cual se le anãde un último elemento.
De acuerdo con estos conceptos podemos considerar eliminada la subjetividad en el caso de predicados de característica numérica[3].

3 Teoría formal de conceptos y conjuntos fuzzy

Teorema 3.1 Sea M un conjunto de proposiciones multivaluadas sobre un conjunto G (M, G conjuntos finitos). Los conjuntos fuzzy definidos por Liu Xiaodong quedan determinados por el contexto $(G, M \times W, I_{\leq})$ siendo W el conjunto de valores que toman las proposiciones de M e $I_{\leq}$ la escala real ordinal.

Sea $(G, M \times W, I_{\leq})$ un contexto lleno [4] y (A, B) los conceptos asociados.
Dado $m \in M$, consideremos el contexto $(G, \{m\} \times W, I_{\leq})$ y representemos sus conceptos por (A_m, B_m).
Entonces: si $m \in M$, para cada $g_0 \in G$ existe $r_0 \in W$ tal que $m(g_0) = r_0$ (por ser lleno).
Consideremos $(\{g_0\}''_m, \{g_0\}'_m)$ en $(G, \{m\} \times W, I_{\leq})$.

$$\{g_0\}'_m = \{(m, r) \in \{m\} \times W : m(g_0) \leq r\}$$

$$\{g_0\}''_m = \{g \in G : m(g) \leq r \text{ para todo } (m, r) \in \{g_0\}'_m\} =$$

$$= \{g \in G : m(g) \leq r \text{ para todo } r : m(g_0) \leq r\} =$$

$$= \{g \in G : m(g) \leq m(g_0)\}$$

Si definimos $\mu_m(g_0) = \dfrac{|\{g_0\}''_m|}{|G|}$ el valor obtenido coincide con el definido por L. Xiaodong

Para la conjunción de propiedades m y n (y por lo tanto para la intersección de los conjuntos fuzzy asociados a las propiedades m y n) consideremos las extensiones asociadas a g_0 en los contextos $(G, \{m\} \times W, I_{\leq})$ y $(G, \{n\} \times W, I_{\leq})$ y definamos

$$\mu_{m \wedge n}(g_0) = \frac{|\{g_0\}''_m \cap \{g_0\}''_n|}{|G|}$$

[3] Trillas [4]
[4] $(G, M \times W, I)$ es un *contexto lleno* si para cada $g_0 \in G$ existe $r_0 \in W$ tal que $m(g_0) = r_0$

que coincide nuevamente con la definición de Xiaodong.

Observemos que $\{g_0\}''_m \cap \{g_0\}''_n = \{g_0\}''_{m,n}$, es decir, es la extensión asociada a g_0 en el contexto $(G, \{m,n\} \times W, I_\leq)$.
En particular:
$\mu_{\bigwedge_{m\in M} m}(g_0) = \dfrac{|\{g_0\}''|}{|G|}$ en el contexto $(G, M \times W, I_\leq)$

Analicemos ahora la proposición $m \vee n$. En cada caso hemos "contado cuántos hay por debajo" de g_0 para cada proposición considerada. Para el caso de la disjunción asumiremos que la "cantidad que hay por debajo de uno u otro" es la mayor entre ambas, más formalmente, definimos:

$$\mu_{m\vee n}(g_0) = \max\{\mu_m(g_0), \mu_n(g_0)\}.$$

Consideremos ahora la relación de orden definida por Zadeh para conjuntos fuzzy:

$$A \leq B \text{ si y sólo si } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \text{para todo } x \in G$$

conjuntamente con las definiciones para $A \cup B$ y $A \cap B$, respectivamente los conjuntos fuzzy asociados a $a\vee b$ y $a\wedge b$. Resulta claro que: $\inf\{A, B\} = A\cap B$ y $\sup\{A, B\} = A\cup B$.
El reticulado distributivo libre generado por M más 1 , donde $\mu_1(g) = 1$ para todo $g \in G$ es la EI álgebra EM asociada al universo G.

Recíprocamente, obtuvimos el siguiente:

Teorema 3.2 Dado un universo G, todos los conjuntos fuzzy asociados a las proposiciones pertenecientes a un conjunto M, tomando valores en un conjunto W definen un reticulado de conceptos para el contexto $(G, M \times W, I_=)$, donde $gI(m,r)$ si $\mu_m(g) = r$, siendo sus conceptos de la forma

$$A = \bigcap_{m\in\mathcal{M}\subseteq M} \{(m, \mu_m(g_0))\}' = \bigcap_{i\in I} A_i, \qquad B = \bigcup_{i\in I} A_i'$$

En efecto:
Es claro que tales conjuntos fuzzy determinan un reticulado de conceptos según R. Wille.
Para cada $m \in M, g_0 \in G$, consideremos $(\{(m, \mu_m(g_0))\}', \{(m, \mu_m(g_0))\})$. Entonces, si (A, B) es un concepto, necesariamente A es intersección de algunos $\{(m, \mu_m(g_0))\}'$ y B es la unión de todos los $\{(m, \mu_m(g_0))\}$ que generaron a A. Más precisamente:

$$A = \bigcap_{m\in\mathcal{M}\subseteq M} \{(m, \mu_m(g_0))\}' = \bigcap_{i\in I} A_i, \qquad B = \bigcup_{i\in I} A_i'$$

En efecto:
si A no fuera de esta forma existiría un $g_1 \in G$ tal que $A = \bigcap(m,r)' \cup \{g_1\}$, entonces

$A = A'' = \bigcap(m,r)''' \cup \{g_1\}'' = \bigcap(m,r)' \cup \{g_1\}''$ de donde se deduce que $\{g_1\}'' = \{g_1\}$ y, es decir $\{g_1\} = \{(m, \mu_m(g_1))\}'$ para algún $m \in M$ y en consecuencia $A = \bigcap(m,r)' \cap \{(m, \mu_m(g_1))\}'$.

Ejemplo 3.1

Veamos en primer lugar cómo obtener a partir del reticulado de conceptos del ejemplo 2.2, considerándolo en esta ocasión como un contexto 3-valuado, el álgebra de conjuntos fuzzy según la definición de Liu Xiaodong:
$G = \{Mercurio,\ Venus,\ Tierra,\ Marte,\ Jupiter,\ Saturno,\ Urano,\ Neptuno,\ Pluton\ \}$
$M = \{$ T: es grande, D: está cerca del sol, L: tiene luna $\}$
$W = \{1, 2, 3\}$
y la relación $I_= \subseteq M \times W$ está dada por el siguiente cuadro:

	Me	*Ve*	*Ti*	*Ma*	*Ju*	*Sa*	*Ur*	*Ne*	*Pl*
T	1	1	1	1	3	3	2	2	1
D	1	1	1	1	2	2	2	2	2
L	1	1	2	2	2	2	2	2	2

Construyamos las extensiones asociadas a cada planeta para cada una de las propiedades.

T:
$\{Me\}''_T = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Pl\}$ $\mu_T(Me) = 5/9$
$\{Ve\}''_T = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Pl\}$ $\mu_T(Ve) = 5/9$
$\{Ti\}''_T = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Pl\}$ $\mu_T(Ti) = 5/9$
$\{Ma\}''_T = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Pl\}$ $\mu_T(Ma) = 5/9$
$\{Ju\}''_T = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_T(Ju) = 1$
$\{Sa\}''_T = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_T(Sa) = 1$
$\{Ur\}''_T = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_T(Ur) = 7/9$
$\{Ne\}''_T = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_T(Ne) = 7/9$
$\{Pl\}''_T = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Pl\}$ $\mu_T(Pl) = 5/9$

D:
$\{Me\}''_D = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma\}$ $\mu_D(Me) = 4/9$
$\{Ve\}''_D = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma\}$ $\mu_D(Ve) = 4/9$
$\{Ti\}''_D = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma\}$ $\mu_D(Ti) = 4/9$
$\{Ma\}''_D = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma\}$ $\mu_D(Ma) = 4/9$
$\{Ju\}''_D = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_D(Ju) = 1$
$\{Sa\}''_D = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_D(Sa) = 1$
$\{Ur\}''_D = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_D(Ur) = 1$
$\{Ne\}''_D = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_D(Ne) = 1$

$\{Pl\}''_D = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_D(Pl) = 1$

L:
$\{Me\}''_L = \{Me,\ Ve\}$ $\mu_L(Me) = 2/9$
$\{Ve\}''_L = \{Me,\ Ve\}$ $\mu_L(Ve) = 2/9$
$\{Ti\}''_L = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_L(Ti) = 1$
$\{Ma\}''_L = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_L(Ma) = 1$
$\{Ju\}''_L = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_L(Ju) = 1$
$\{Sa\}''_L = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_L(Sa) = 1$
$\{Ur\}''_L = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_L(Ur) = 1$
$\{Ne\}''_L = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_L(Ne) = 1$
$\{Pl\}''_L = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$ $\mu_L(Pl) = 1$

Calculando las intersecciones de las extensiones, o sea, las extensiones de las conjunciones, hemos obtenido el cuadro de las funciones de pertenencia para los conjuntos fuzzy atómicos y moleculares

	T	D	L	TD	TL	DL	TDL
Me	5/9	4/9	2/9	4/9	2/9	2/9	2
Ve	5/9	4/9	2/9	4/9	2/9	2/9	2
Ti	5/9	4/9	1	4/9	5/9	4/9	4
Ma	5/9	4/9	1	4/9	5/9	4/9	4
Ju	1	1	1	1	1	1	1
Sa	1	1	1	1	1	1	1
Ur	7/9	1	1	7/9	7/9	1	7
Ne	7/9	1	1	7/9	7/9	1	7
Pl	5/9	1	1	5/9	5/9	1	5

A partir de estos valores obtenemos las funciones de pertenencia para los restantes conjuntos utilizando la operación supremo.

Realicemos ahora, el camino inverso, es decir, obtengamos a partir de estos conjuntos fuzzy el reticulado de conceptos asociado al contexto $(G, M, I_=)$

$\{(T, 5/9)\}' = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Pl\}$
$\{(T, 7/9)\}' = \{Ur,\ Ne\}$
$\{(T, 1)\}' = \{Ju,\ Sa\}$
$\{(D, 4/9)\}' = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma\}$
$\{(D, 1)\}' = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$
$\{(L, 7/9)\}' = \{Me,\ Ve\}$

$\{(L,1)\}' = \{Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$

$\{(T,5/9),(D,4/9)\}' = \{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma\}$
$\{(T,5/9),(D,1)\}' = \{Pl\}$
$\{(T,5/9),(L,7/9)\}' = \{Me,\ Ve\}$
$\{(T,5/9),(L,1)\}' = \{Ti,\ Ma,\ Pl\}$
$\{(T,7/9),(D,1)\}' = \{Ur,\ Ne\}$
$\{(T,7/9),(L,1)\}' = \{Ur,\ Ne\}$
$\{(T,1),(D,1)\}' = \{Ju,\ Sa\}$
$\{(T,1),(L,1)\}' = \{Ju,\ Sa\}$
$\{(D,4/9),(L,7/9)\}' = \{Me,\ Ve\}$
$\{(D,4/9),(L,1)\}' = \{Ti,\ Ma\}$
$\{(D,1),(L,1)\}' = \{Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\}$

$\{(T,5/9),(D,4/9),(L,7/9)\}' = \{Me,\ Ve\}$
$\{(T,5/9),(D,4/9),(L,1)\}' = \{Ti,\ Ma\}$
$\{(T,5/9),(D,1),(L,1)\}' = \{Pl\}$
$\{(T,7/9),(D,1),(L,1)\}' = \{Ur,\ Ne\}$
$\{(T,1),(D,1),(L,1)\}' = \{Ju,\ Sa\}$

Para cada extensión obtenida se considera la unión de todas las intensiones obtenidas para obtener los conceptos:
$(\{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma,\ Pl\},\ \{(T,5/9)\})$
$(\{Ti,\ Ma,\ Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\},\ \{(L,1)\})$
$(\{Me,\ Ve,\ Ti,\ Ma\},\ \{(T,5/9)\},(D,4/9)\})$
$(\{Ti,\ Ma,\ Pl\},\ \{(T,5/9),(L,1)\})$
$(\{Ju,\ Sa,\ Ur,\ Ne,\ Pl\},\ \{(D,1),(L,1)\})$
$(\{Me,\ Ve\},\ \{(T,5/9),(D,4/9),(L,7/9)\})$
$(\{Ti,\ Ma\},\ \{(T,5/9),(D,4/9),(L,1)\})$
$(\{Pl\},\ \{(T,5/9),(D,1),(L,1)\})$
$(\{Ur,\ Ne\},\ \{(T,7/9),(D,1),(L,1)\})$
$(\{Ju,\ Sa\},\ \{(T,1),(D,1),(L,1)\})$

Estos conceptos, como era de esperar, coinciden con los obtenidos en el ejemplo 2.1

4 Conclusiones

Hemos establecido cómo obtener a partir de un reticulado de conceptos multivaluado (G,M,W,I), el reticulado completo asociado a la EGM álgebra según la construcción de Liu Xiaodong.

Y recíprocamente, cómo construir, a partir de la familia de los conjuntos fuzzy sobre un conjunto G asociados a un conjunto M de propiedades, un reticulado de conceptos.

Observemos que un conjunto M de propiedades sobre un conjunto X no determina unívocamente las funciones características $\mu_m : X \to [0,1]$, para $m \in M$.
Indiquemos com M_0 y M_1 dos posibles familias de funciones características asociadas a M y X.
Diremos que M_0 y M_1 son semejantes si para cada par (m_0, m_1), $m_0 \in M_0$, $m_1 \in M_1$, m_0, m_1 funciones características para una misma propiedad $m \in M$, se satisfacen:

$$m_0(x) = m_1(y) \text{ si y sólo si } m_1(x) = m_1(y)$$

$$m_0(x) < m_1(y) \text{ si y sólo si } m_1(x) < m_1(y)$$

Es claro que si M_0 y M_1 son semejantes el reticulado de conceptos que determinan es el mismo y que aplicando a ambos la construcción de Liu Xiaodong, se obtiene una úinica EII -álgebra EXM.

En conclusión, la definición de conjuntos fuzzy EXM permite establecer una correspondencia biunívoca entre éstos y los conceptos del contexto correspondiente.

Referencias

[1] J. E. Graver and M. E. Watkins, *Combinatorics with emphasis on the theory of graphs*, Springer, New York, [1977].

[2] W. Guo - Jun, *Theory of topological molecular lattices*, Fuzzy Sets and Systems, vol.47, n.3 ,[1992], 351 — 376.

[3] A. Mostowski, *Proof on non deducibility in intuicionistic functional calculus*, J. Simbolic Logic 13, [1948].

[4] E.Trillas, C. Alsina, J.M. Terricabras, *Introducción a la lógica borrosa*, Ariel Matemática, Barcelona, [1995].

[5] R. Wille, *Restructuring lattice theory: an approach based on hiererchies of concepts*, Orderer sets, D. Reidel Publishing Company, [1982], 445 — 470.

[6] L. Xiaodong, *The Fuzzy sets and systems based on AFS.structure, EI algebra and EII algebra*, Fuzzy Sets and Systems, vol.95, n.2, [1998], 179 — 188.

[7] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Inf. Control 8, [1965].