

# Descripción de las cápsulas convexas de los conjuntos fraccionarios en las bases $-n + i$ y puntos dobles en el contorno para la base $-2 + i$ .

María del Carmen Moure

*Dpto. de Matemática, FCEYN,*

*Universidad Nacional de Mar del Plata.*

mcmoure@mdp.edu.ar

## Resumen

En la primera parte de este trabajo se prueba la existencia de infinitos puntos dobles en el contorno del conjunto de los fraccionarios en la base  $-2 + i$ . Se utilizan curvas recurrentes para describir dicho contorno. En la segunda parte se describen las cápsulas convexas de los fraccionarios en las bases  $b = -n + i$ . Se muestra que ésta resulta un polígono si y sólo si  $b/|b|$  es una raíz de la unidad. Además

(i) Si la cápsula convexa es un polígono, sus vectores normales exteriores están en las direcciones  $\pm \bar{b}^k i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, si  $n$  es el orden de  $b/|b|$  será un polígono de  $n$  lados si  $n$  es par y  $2n$  lados si  $n$  es impar.

(ii) Si la cápsula convexa no es un polígono, para cada punto expuesto  $x$  de  $F$  existe un único vector unitario  $u$  tal que  $F$  está contenido en el semiespacio  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}((z - x)\bar{u}) \leq 0\}$ , esto es que por cada punto extremo expuesto del conjunto hay un único hiperplano soporte.

## 1 Introducción.

Sean  $b \in \mathbb{C}$ ,  $|b| > 1$  y  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C}$ ;  $0 \in D$ . Se llaman los *enteros del sistema*  $(b, D)$  a los elementos del conjunto  $W = \left\{ \sum_{j=0}^M a_j b^j; a_j \in D \right\}$ . Los *fraccionarios* de  $(b, D)$  son los números del conjunto  $F = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j b^j; a_j \in D \right\}$ . Los números *representables* en  $(b, D)$  son los de  $G = \left\{ \sum_{j=-\infty}^M a_j b^j; a_j \in D \right\}$ .

A continuación enunciamos algunos resultados de la teoría de representabilidad que muestran la razón del estudio de las representaciones en las bases  $-n + i$ .

**Definición 1.1**  $(b, D)$  se dice un Sistema Numérico si todo entero gaussiano, esto es un elemento del conjunto  $E = \{p + iq; p, q \in \mathbb{Z}\}$  es representable en él como un entero del sistema.

**Teorema 1.1 (Kátai y Szabó)** Sean  $b = A + iB$ ,  $|b| > 1$ ,  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{Z}$  y  $D = \{0, 1, \dots, |b|^2 - 1\}$ .  $(b, D)$  es un sistema numérico si y sólo si se verifican

- i)  $A = \text{Re}(b) < 0$
- ii)  $B = \text{Im}(b) = \pm 1$

**Teorema 1.2** Si  $(b, D)$  es un sistema numérico entonces todo complejo es representable en el sistema.

En [2] se muestra que el contorno del conjunto de los fraccionarios para la base de Gauss  $-1 + i$  es un arco de Jordan. Su dominio interior es un dominio uniforme y su cápsula convexa un octógono<sup>1</sup>. En este trabajo veremos que el contorno del conjunto de los fraccionarios en la base  $-2 + i$  es una curva con infinitos puntos dobles. En los preliminares se presenta el resultado central de la teoría de curvas recurrentes [6]. En el marco de esta teoría aparece como un caso particular la generación de los contornos de compactos autosemejantes o autoafines en el plano [4], [13], [10] y con esta herramienta se prueba el resultado central de la primera parte.

En la segunda parte se obtienen las representaciones de los puntos extremos expuestos de las cápsulas convexas de los fraccionarios en las bases  $b = -n + i$ , lo que permite dar condiciones necesarias y suficientes sobre  $b$  para que éstas sean un polígono y dar descripciones generales para todos los casos. En particular podrían calcularse los vértices para el caso en que resulte un polígono, por ejemplo para  $b = -1 + i$ , y en todos los casos se obtienen aproximaciones como puede verse en un programa que se presenta al final del trabajo.

## 2 Nociones preliminares.

### 2.1 Curvas Recurrentes.

Sea  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$  un conjunto finito,  $S^*$  el semigrupo libre generado por  $S$  y  $G$  el grupo libre generado por  $S$ .  $\theta$  un endomorfismo de  $S^*$  que se extiende a  $G$  haciendo  $\theta(s^{-1}) = \theta(s)^{-1}$ . Sea  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d \leq r$ , un homomorfismo y  $L_\theta$  el endomorfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^d \\ \downarrow \theta & & \downarrow L_\theta \\ G & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^d \end{array} \quad (1)$$

$L_\theta$  se llama una representación de  $\theta$ . Entonces

$$f\theta^n = L_\theta^n f, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

<sup>1</sup>Rafael Panzone me sugirió el estudio de las curvas recurrentes y la conjetura de los puntos dobles de este contorno.

Consideremos ahora una aplicación  $K[\cdot] : S \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ , los subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^d$ , que se extiende a palabras no vacías en  $S^*$  pidiendo que para todo par de palabras no vacías  $V, W$  en  $S^*$

$$K[VW] = K[V] \cup (K[W] + f(V)) \quad (3)$$

Un importante ejemplo de tal aplicación es la poligonal definida por (3) y para cada  $s \in S$

$$K[s] = \{tf(s) : 0 \leq t \leq 1\} \quad (4)$$

**Teorema 2.1** *Sea  $\theta$  un endomorfismo de  $S^*$  tal que  $\theta(s) \neq e$  (la palabra vacía) para todo  $s \in S$ , sea  $L_\theta$  una representación de  $\theta$  y  $L_\theta$  es expansiva. Entonces, para cualquier palabra  $W \in S^*$  existe un compacto  $K_\theta(W)$  tal que*

$$L_\theta^{-n} K[\theta^n W] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_\theta(W)$$

en la métrica de Hausdorff. El conjunto  $K_\theta(W)$  es una curva y no depende de la elección de  $K[\cdot]$ .

Vayamos a un caso particular [4], [13], [10].

Sea  $G$  el grupo libre generado por  $a$  y  $b$ . Consideremos un endomorfismo  $\theta : G \rightarrow G$  tal que  $\theta(a)$  y  $\theta(b)$  son ambas palabras no vacías.

Consideremos también un homomorfismo  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\{f(a), f(b)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^2$  positivamente orientada;  $f$  determinado por  $f(a)$ ,  $f(b)$ , y las relaciones

$$f(V^{-1}) = -f(V) \text{ y } f(V.W) = f(V) + f(W)$$

Sea  $L_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal que

$$f\theta = L_\theta f, \quad (5)$$

Entonces  $L_\theta(f(a)) = f(\theta(a)) = m_{aa}f(a) + m_{ba}f(b)$ ;  $L_\theta(f(b)) = f(\theta(b)) = m_{ab}f(a) + m_{bb}f(b)$  donde  $m_{\alpha\beta}$  es el número de ocurrencias de  $\alpha$  en  $\theta(\beta)$  contando  $\alpha^{-1}$  como ocurriendo -1 veces. Así

$$M_\theta = \begin{pmatrix} m_{aa} & m_{ab} \\ m_{ba} & m_{bb} \end{pmatrix} \quad (6)$$

es la matriz de  $L_\theta$  con respecto a la base  $\{f(a), f(b)\}$ .

**Observación 2.1** *Si la matriz de  $\theta$ ,  $M_\theta$  es tal que existe una matriz no singular  $T = (t_{ij})$ , tal que  $M_\theta = T^{-1}LT$ , donde  $L$  es una semejanza, entonces el homomorfismo  $f$ , dado por*

$$f(a) = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix}; f(b) = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix}$$

dará la transformación lineal  $L_\theta = L$ , una semejanza.

Notar que la existencia de  $T$  sólo depende de la traza y el determinante de  $M_\theta$  y siempre podemos escoger  $T$  (la matriz cambio de base) de manera que resulte  $\{f(a), f(b)\}$  positivamente orientada.

Asignamos a cada palabra  $W \in G$  una poligonal en  $\mathbb{R}^2$  de la siguiente manera: si  $W = s_1 s_2 \dots s_n$  con  $s_i \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ , y consideremos la secuencia de puntos en  $\mathbb{R}^2$  dada

por  $x_0 = (0, 0)$ ,  $x_1 = f(s_1)$ , ...,  $x_i = f(s_1 s_2 \dots s_i) = f(s_1) + f(s_2) + \dots + f(s_i)$ , uniendo secuencialmente estos puntos por segmentos dirigidos obtenemos una poligonal dirigida que llamaremos  $K[W]$ .

Por una adaptación del teorema 2.1 al caso de grupos libres [6], [4], tenemos entonces que si  $L_\theta$  es expansiva la sucesión  $L_\theta^{-n} K[\theta^n W]$  converge en la métrica de Hausdorff a una curva  $K_\theta(W)$  para cualquier palabra  $W \in G$ .

Algunos segmentos de estas poligonales pueden ser atravesados más de una vez. Imponemos la convención de que cada segmento recorrido en una dirección cancela al mismo segmento recorrido en dirección opuesta. De esta manera, por ejemplo, si  $W$  es una palabra reducida tal que  $f(W) = 0$  y  $V$  es cualquier palabra en  $G$

$$K[VWV^{-1}] = K[W] + f(V) \quad (7)$$

Consideremos  $W_0 = aba^{-1}b^{-1}$  y sean

$$K_n := L_\theta^{-n} K[\theta^n W_0]$$

Entonces, ya que  $f(\theta^n W_0) = 0$  para todo entero  $n \geq 0$ ,  $K_n$  es una poligonal cerrada en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $K_n$  es simple estará bien determinado el compacto definido como la clausura de la región encerrada por  $K_n$ . Tenemos entonces el siguiente teorema presentado en [13], que contiene a otro que se da en [10], que a su vez corrige al dado en [6]

**Teorema 2.2** Sean

(1)  $\theta : G \langle a, b \rangle \rightarrow G \langle a, b \rangle$  un endomorfismo,  
 (2)  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homomorfismo tal que  $\{f(a), f(b)\}$  es una base positivamente orientada de  $\mathbb{R}^2$ ,

(3) la transformación lineal  $L_\theta$  que satisface (5) es expansiva, y

(4)  $K_1$  es una poligonal simple (cerrada).

Sea  $L$  el reticulado generado por  $f(a)$  y  $f(b)$  y  $Q$  el paralelogramo determinado por  $f(a)$  y  $f(b)$ . Para un punto  $x \in L$ , sea  $Q_x$  la traslación de  $Q$  a  $x$ . Sea  $D$  el conjunto de puntos  $x$  de  $L$  tales que  $Q_x$  está encerrado por  $L_\theta(K_1)$ . Entonces

(i)  $K_n$  es una poligonal simple (cerrada)  $K_n = \partial T_n$  donde  $T_0 = Q$  y

$$T_{n+1} = \bigcup_{d \in D} L_\theta^{-1}(T_n + d),$$

donde la unión es esencialmente disjunta.

(ii) Para cada  $n$ ,  $\{T_n + x : x \in L\}$  es un embaldosado del plano.

Es bien conocido que existe un único compacto  $T$  tal que

$$T = \bigcup_{d \in D} L_\theta^{-1}(T + d),$$

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$$

donde la convergencia es en la métrica de Hausdorff, y tenemos que existe una curva  $K_\theta$  tal que

$$K_\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial T_n$$

Puede ocurrir que  $K_\theta \neq \partial T$ . El siguiente teorema [13] da las condiciones bajo las cuales esta indeseable situación no ocurre.

**Teorema 2.3** *Bajo las hipótesis del teorema anterior son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- (1)  $\mathcal{L}^2(T) = \mathcal{L}^2(Q)$ .
- (2)  $K_\theta = \partial T$ .
- (3)  $K_\theta$  no es una curva que llena región del plano que contiene un disco.
- (4)  $\{T + x : x \in L\}$  es un embañosado del plano.

### 3 Puntos dobles en el contorno del conjunto de los fraccionarios en la base $-2+i$ .

El conjunto de los fraccionarios en la base  $b := -2 + i$  es el compacto

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} d_i b^{-i} : d_i \in D = \{0, 1, 2, 3, 4\} \right\} = \bigcup_{d \in D} b^{-1}(F + d)$$

de manera que  $F$  es el único compacto invariante por la familia de contracciones  $\psi_j(z) = b^{-1}(z + j)$ ,  $j : 0, 1, \dots, 4$

I.- Veremos que la curva generada por el siguiente endomorfismo  $\theta$  será el contorno del conjunto de los fraccionarios en la base  $-2 + i$ . Sea  $\theta$  definido por

$$\begin{aligned} \theta(a) &= a^5 b a^{-7} \\ \theta(b) &= (a^2 b^{-1})^2 a^{-5} \end{aligned}$$

La matriz de  $\theta$  es por lo tanto  $M_\theta = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , de determinante 5, cuyos autovalores son:  $-2 + i$  y  $-2 - i$

$$M_\theta = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \sqrt{5} R_\varphi$$

donde  $R_\varphi$  es la rotación de ángulo  $\varphi$ ;  $\cos \varphi = -2/\sqrt{5}$ ;  $\sin \varphi = 1/\sqrt{5}$ .

De aquí que si  $f(a) = e_1$  y  $f(b) = e_2$ , será  $L_\theta = \sqrt{5} R_\varphi$ , que es una semejanza expansiva. Observemos que para  $z \in \mathbb{C}$ ,  $L_\theta(z) = (-2 + i)z$ .

Ahora

$$L_\theta(K_1) = K[\theta(aba^{-1}b^{-1})] = K[a^5 b a^{-5} b^{-1}]$$

es una poligonal cerrada simple recorrida positivamente que encierra los paralelogramos  $Q_d$  para  $d \in \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)\}$ . Se cumplen entonces las hipótesis del teorema 2.2 de manera que podemos afirmar que  $K_n = L_\theta^{-n} K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})]$  son poligonales cerradas simples recorridas positivamente y  $K_n = \partial T_n$  donde  $T_0$  es  $Q$  el cuadrado determinado por  $f(a)$  y  $f(b)$ , y

$$T_{n+1} = \bigcup_{i=0}^4 L_\theta^{-1}(T_n + (i, 0))$$

sabemos también que esta sucesión de compactos converge en la métrica de Hausdorff al compacto  $T$  tal que

$$T = \bigcup_{j=0}^4 L_\theta^{-1}(T + (j, 0))$$

escrito de otra forma

$$T = \bigcup_{j=0}^4 (-2+i)^{-1} (T+j)$$

que es el conjunto de los fraccionarios en la base  $-2+i$ .

Ahora el teorema 2.3 afirma que si  $K_\theta$  es una curva que no llena una región del plano que contiene un disco, entonces  $K_\theta = \partial T$ . Pero sabemos [8] que  $\dim(K_\theta) = 2 \frac{\log \lambda}{\log 5}$  con  $\lambda \simeq 3.6494359$  por lo tanto  $\dim_H(K_\theta) < 2$ . Así  $K_\theta = \partial T$ .

II.- El endomorfismo  $\theta$  sufre fuertes cancelaciones y esto dificulta su tratamiento. Para saltar esta dificultad definiremos un nuevo endomorfismo que se vinculará al anterior como veremos a continuación.

Sea  $\hat{G} = \hat{G} \langle A, B, C \rangle$ ,  $\hat{\theta} : \hat{G} \rightarrow \hat{G}$  el endomorfismo definido por

$$\hat{\theta}(A) = AB^5A^{-1}, \hat{\theta}(B) = ACB^{-3}A^{-1}, \hat{\theta}(C) = AB^{-1}$$

$g : \hat{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , el homomorfismo determinado por

$$g(A) = (-2, -1), g(B) = (1, 0), g(C) = (1, 1)$$

es claro que  $g(\hat{G}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = f(G)$  y si  $L_\theta = \sqrt{5}R_\varphi$  donde  $R_\varphi$  es la rotación tal que  $\varphi = \text{Arg}(-2+i)$ , esto es  $L_\theta(z) = (-2+i).z$ , resulta que

$$g\hat{\theta} = L_\theta g \quad (8)$$

Consideremos el homomorfismo  $\Gamma : \hat{G} \rightarrow G$  definido por

$$\Gamma(A) = a^5, \Gamma(B) = ba^{-2}, \Gamma(C) = a^{-3}b^{-1}$$

entonces es fácil comprobar que

$$\Gamma\hat{\theta} = \theta\Gamma \quad (9)$$

y

$$f\Gamma = L_\theta g \quad (10)$$

Ahora observemos que  $\Gamma(ABC) = \theta(aba^{-1}b^{-1})$  y esta igualdad junto con (9) nos dice que

$$\Gamma\hat{\theta}^n(ABC) = \theta^{n+1}(aba^{-1}b^{-1})$$

definimos entonces la aplicación  $\hat{K}$  que a cada palabra en  $\hat{G}$  asigna una poligonal en  $\mathbb{R}^2$  de la siguiente manera: si  $W \in \hat{G}$

$$\hat{K}[W] = L_\theta^{-1}K[\Gamma W]$$

de esa forma  $L_\theta^{-n}\hat{K}[\hat{\theta}^n(ABC)] = L_\theta^{-(n+1)}K[\theta^{n+1}(aba^{-1}b^{-1})] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_\theta$  en la métrica de Hausdorff. Notar que para cada  $S \in \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}\}$ ,  $\hat{K}[S]$  es una poligonal que va del  $(0,0)$  hasta  $L_\theta^{-1}f\Gamma(S) = g(S)$  por (10). Entonces si  $S_1, S_2 \in \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}\}$  y  $S_1S_2$  es distinto de  $(BA)^{\pm 1}, (AC)^{\pm 1}, (CB)^{\pm 1}$ , es decir que no hay cancelaciones en  $\Gamma(S_1S_2)$  se tiene

$$\hat{K}[S_1S_2] = \hat{K}[S_1] \cup (\hat{K}[S_2] + g(S_1)) \quad (11)$$

Finalmente observemos que el nuevo endomorfismo  $\hat{\theta}$  sufre todavía algunas cancelaciones que se eliminan ahora fácilmente definiendo un nuevo endomorfismo de  $\hat{G}$  que será de la forma  $\hat{\theta}_V$  donde  $\hat{\theta}_V(S) = V\hat{\theta}(S)V^{-1}$  con  $V \in \hat{G}$ . No es difícil ver que para cualquier palabra  $W \in \hat{G}$ , tal que  $g(W) = (0, 0)$  se tiene (ver (7)).

$$\hat{K}[\hat{\theta}_V^n(W)] = \hat{K}[\hat{\theta}^n(W)] + \sum_{i=0}^{n-1} g(\hat{\theta}^i(V)) \quad n \in \mathbb{N}$$

y ya que  $L_\theta^{-1}$  es una contracción

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_\theta^{-n} \hat{K}[\hat{\theta}_V^n(W)] = \lim_{n \rightarrow \infty} L_\theta^{-n} \hat{K}[\hat{\theta}^n(W)] + P_V \quad (12)$$

donde por (8)

$$P_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} L_\theta^{-n} g(\hat{\theta}^i(V)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n L_\theta^{-i} g(V)$$

En nuestro caso sea  $\bar{\theta}(S) = A^{-1}\hat{\theta}(S)A$ . esto es

$$\bar{\theta}(A) = B^5, \bar{\theta}(B) = CB^{-3}, \bar{\theta}(C) = B^{-1}A$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L_\theta^{-n} \hat{K}[\bar{\theta}^n(ABC)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} L_\theta^{-n} \hat{K}[\hat{\theta}^n(ABC)] + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n L_\theta^{-i} g(A^{-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} L_\theta^{-n} \hat{K}[\hat{\theta}^n(ABC)] - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \end{aligned}$$

y vale la siguiente:

**Proposición 3.1**  $\bar{\theta}^k(ABC)$  no sufre cancelaciones para ningún  $k \in \mathbb{N}$  y los productos  $(BA)^{\pm 1}$ ,  $(AC)^{\pm 1}$  y  $(CB)^{\pm 1}$  no se presentan en  $\bar{\theta}^k(ABC)$  para ningún  $k \in \mathbb{N}$

*Prueba.* Es inmediato ver que  $\bar{\theta}$  sólo sufre cancelaciones en palabras de la forma  $\dots UV \dots$  donde  $UV = (AC)^{\pm 1}$  o  $UV = (BA)^{\pm 1}$ , pero estas combinaciones no aparecen en  $ABC$ , por lo tanto no hay cancelaciones en  $\bar{\theta}(ABC)$ . Siguiendo, el producto  $UV = (AC)^{\pm 1}$  no aparece en ningún  $\bar{\theta}(S)$ ,  $S \in \{A, B, C\}$  y sólo aparece en una palabra  $\bar{\theta}(W)$  si  $W$  es de la forma  $\dots ST \dots$  con  $ST = (CB)^{\pm 1}$ , pero  $(CB)^{\pm 1}$  se presenta en  $\bar{\theta}(W)$  sólo si  $W$  es de la forma  $\dots (BA)^{\pm 1} \dots$ . Finalmente  $(BA)^{\pm 1}$  aparece en alguna palabra  $\bar{\theta}(W)$  sólo si  $W$  contiene un producto  $(AC)^{\pm 1}$ , esto no da un "circuito cerrado" de productos de pares de letras tales que ninguno de ellos aparecerá en  $\bar{\theta}^k(ABC)$  para ningún  $k \in \mathbb{N}$ . ■

Estamos ahora en condiciones de mostrar el resultado central:

**Teorema 3.1** La frontera del conjunto  $T$  de los fraccionarios en la base  $-2 + i$  tiene infinitos puntos dobles.

Bastará considerar los vértices de  $L_\theta^{-k} \hat{K}[\bar{\theta}^k(ABC)]$ .

Por la proposición (3.1) se tiene que vale siempre (11). Se obtiene una fórmula recurrente para  $\theta(U) = S_{U_1} \dots S_{U_{l(U)}}$

$$\begin{aligned} L_\theta^{-(n+1)} \hat{K}[\bar{\theta}^{n+1}(U)] &= L_\theta^{-1} \left( L_\theta^{-n} \hat{K}[\bar{\theta}^n(S_{U_1} \dots S_{U_{l(U)}})] \right) \\ &= L_\theta^{-1} \left( \bigcup_{i=1}^{l(U)} L_\theta^{-n} \hat{K}[\bar{\theta}^n(S_{U_i})] + g(S_{U_1} \dots S_{U_{i-1}}) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

De un paso al siguiente se reemplaza cada subpoligonal de la forma  $L_\theta^{-n} \hat{K}[U] + \mathbf{w}$  con  $U \in \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}\}$  en  $L_\theta^{-n} \hat{K}[\bar{\theta}^n(ABC)]$  por la poligonal  $L_\theta^{-(n+1)} \hat{K}[\bar{\theta}U] + \mathbf{w}$  cuyos extremos coinciden y permanecen en los pasos siguientes.

Convenimos en llamar vértices sólo a los extremos de estas subpoligonales  $L_\theta^{-n} \hat{K}[U] + \mathbf{w}$  con  $U \in \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}\}$ . Los vértices del primer paso serán entonces

$$\{0, g(A), g(A) + g(B), g(A) + g(B) + g(C) = 0\}$$

En el paso siguiente tendremos:

Entre 0 y  $g(A)$  ya que  $\bar{\theta}(A) = B^5$  aparecen los vértices

$$L_\theta^{-1} \{0, g(B), \underline{2g(B)}, 3g(B), 4g(B), 5g(B)\}$$

donde  $L_\theta^{-1}(5g(B)) = L_\theta^{-1}(g(\bar{\theta}A)) = g(A)$ .

Entre  $g(A)$  y  $g(A) + g(B)$ :

$$L_\theta^{-1} \{0, g(C), g(C) - g(B), \underline{g(C) - 2g(B)}, g(C) - 3g(B)\} + g(A).$$

Elegimos los vértices subrayados para comenzar a construir dos sucesiones de vértices que convergen a un punto doble:

$$v_1^{(1)} = L_\theta^{-1}(2g(B)), \quad v_1^{(2)} = L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A)$$

Entre  $L_\theta^{-1}(2g(B))$  y el siguiente, la poligonal que los une es  $L_\theta^{-1} \hat{K}[B] + L_\theta^{-1}(2g(B))$  tenemos entonces que la poligonal que los une en el paso siguiente es  $L_\theta^{-2} \hat{K}[\bar{\theta}B] + L_\theta^{-1}(2g(B))$  y por lo tanto los vértices que aparecen son

$$L_\theta^{-2} \{0, g(C), g(C) - g(B), \underline{g(C) - 2g(B)}, g(C) - 3g(B)\} + L_\theta^{-1}(2g(B))$$

Por el otro lado entre  $L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A)$  y el siguiente, la poligonal que los une es  $L_\theta^{-1} \hat{K}[B^{-1}] + L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A)$  tenemos entonces que la poligonal que los une en el paso siguiente es  $L_\theta^{-2} \hat{K}[\bar{\theta}B^{-1}] + L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A)$  y por lo tanto los vértices que aparecen son

$$\begin{aligned} &L_\theta^{-2} \{0, g(B), \underline{2g(B)}, 3g(B), 3g(B) - g(C)\} \\ &+ L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A) \end{aligned}$$

Elegimos ahora

$$\begin{aligned} v_2^{(1)} &= L_\theta^{-2}(g(C) - 2g(B)) + L_\theta^{-1}(2g(B)) \\ v_2^{(2)} &= L_\theta^{-2}(2g(B)) + L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A) \end{aligned}$$

Entre  $v_2^{(1)}$  y el vértice que sigue en este paso la poligonal que los une es  $L_\theta^{-2}\hat{K}[B^{-1}] + L_\theta^{-2}(g(C) - 2g(B)) + L_\theta^{-1}(2g(B))$  y por lo tanto la poligonal que los une en el paso siguiente es  $L_\theta^{-3}\hat{K}[\bar{\theta}B^{-1}] + L_\theta^{-2}(g(C) - 2g(B)) + L_\theta^{-1}(2g(B))$  y los vértices que se resultan son

$$L_\theta^{-3} \left\{ 0, g(B), \underline{2g(B)}, 3g(B), 3g(B) - g(C) \right\} \\ + L_\theta^{-2}(g(C) - 2g(B)) + L_\theta^{-1}(2g(B))$$

Entre  $v_2^{(2)}$  y el siguiente en este paso la poligonal que los une es  $L_\theta^{-2}\hat{K}[B] + L_\theta^{-2}(2g(B)) + L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A)$  y por lo tanto la poligonal que los une en el paso siguiente es  $L_\theta^{-3}\hat{K}[\bar{\theta}B] + L_\theta^{-2}(2g(B)) + L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A)$  y los vértices que se aparecen son

$$L_\theta^{-3} \left\{ 0, g(C), \underline{g(C) - g(B)}, \underline{g(C) - 2g(B)}, g(C) - 3g(B) \right\} \\ + L_\theta^{-2}(2g(B)) + L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A)$$

Ahora serán

$$v_3^{(1)} = L_\theta^{-3}(2g(B)) + L_\theta^{-2}(g(C) - 2g(B)) + L_\theta^{-1}(2g(B)) \\ v_3^{(2)} = L_\theta^{-3}(g(C) - 2g(B)) + L_\theta^{-2}(2g(B)) + L_\theta^{-1}(g(C) - 2g(B)) + g(A)$$

Así repitiendo recurrentemente los dos últimos pasos tendremos

$$v_n^{(1)} = \begin{cases} 2L_\theta^{-n}g(B) + v_{n-1}^{(1)} & n \text{ impar } n > 1 \\ L_\theta^{-n}(g(C) - 2g(B)) + v_{n-1}^{(1)} & n \text{ par } n > 1 \end{cases} \\ v_n^{(2)} = \begin{cases} L_\theta^{-n}(g(C) - 2g(B)) + v_{n-1}^{(2)} & n \text{ impar } n > 1 \\ 2L_\theta^{-n}g(B) + v_{n-1}^{(2)} & n \text{ par } n > 1 \end{cases}$$

Es claro que  $v^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^{(1)}$  y  $v^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^{(2)}$  pertenecen a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_\theta^{-n}\hat{K}[\bar{\theta}^n(ABC)] = \lim_{n \rightarrow \infty} L_\theta^{-n}\hat{K}[\hat{\theta}^n(ABC)] - \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

y que si  $\prec$  indica el orden del recorrido de la curva entonces  $0 \prec v^{(1)} \prec g(A) \prec v^{(2)} \prec g(A) + g(B) \prec 0$ . Ahora

$$v^{(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} 2L_\theta^{-(2j+1)}g(B) + \sum_{j=1}^{\infty} L_\theta^{-2j}(g(C) - 2g(B)) \\ = (2g(B)(-2+i)^{-1} + (-2+i)^{-2}(g(C) - 2g(B))) \frac{1}{1-(-2+i)^{-2}} \\ = (-11 - 7i)/10$$

y

$$v^{(2)} = \sum_{j=0}^{\infty} L_\theta^{-(2j+1)}(g(C) - 2g(B)) + \sum_{j=1}^{\infty} 2L_\theta^{-2j}g(B) + g(A) \\ = ((-2+i)^{-1}(g(C) - 2g(B)) + (-2+i)^{-2}2g(B)) \frac{1}{1-(-2+i)^{-2}} + g(A) \\ = (-11 - 7i)/10$$

Este punto doble en la curva original  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_\theta^{-n} \hat{K}[\bar{\theta}^n(ABC)]$  será  $-\frac{11}{10} - \frac{7}{10}i + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = -\frac{3}{5} - \frac{i}{5}$ . Podemos observar que éste es el punto fijo de la transformación  $\psi_3(z) = b^{-1}(z+2)$ .

Así hemos encontrado un punto doble en la curva  $K_\theta = \partial T$  .. Veamos ahora que en cualquier sección continua de  $\partial T$  hay infinitos puntos dobles.

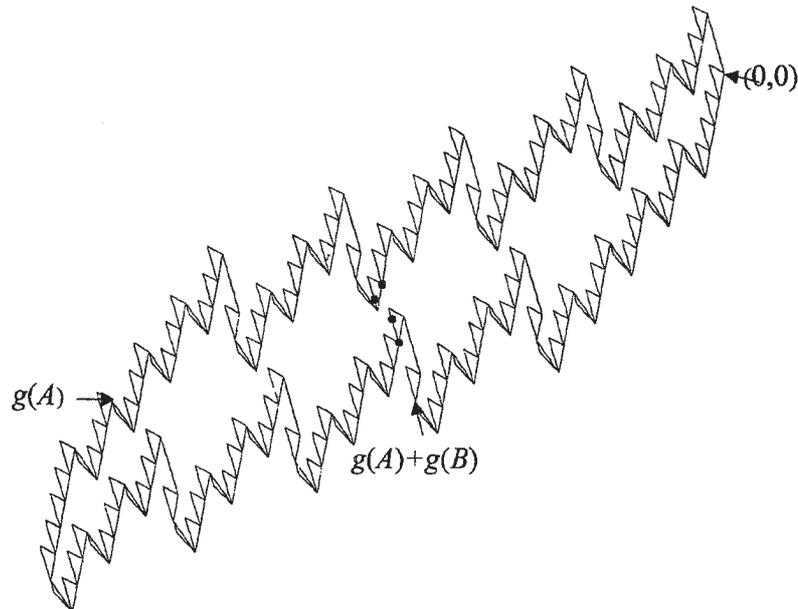
Es fácil ver que nuestro endomorfismo  $\bar{\theta}$  tiene la propiedad de que existe  $N$  suficientemente grande tal que para  $n \geq N$ , la palabra  $\bar{\theta}^n(S)$  contiene la letra  $T$  para cualquier par de letras  $S, T$  en  $\{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}\}$ . Esto implica que la poligonal  $L_\theta^{-n} \hat{K}[\bar{\theta}^n(S)]$  contiene una subpoligonal de la forma  $L_\theta^{-n} \hat{K}[T] + \alpha$ . Es claro entonces que para cualquier sección continua de  $\partial T$  existe  $K$  suficientemente grande tal que los extremos de alguna subpoligonal  $L_\theta^{-K} \hat{K}[B] + \alpha$  pertenecen a tal sección, pero entonces estos vértices y todos los de  $L_\theta^{-(K+k)} \hat{K}[\bar{\theta}^k B] + \alpha$  pertenecen a la misma sección para todo  $k$ . Observemos ahora que

$$\bar{\theta}^2(B) = B^{-1}A(B^3C^{-1})^3$$

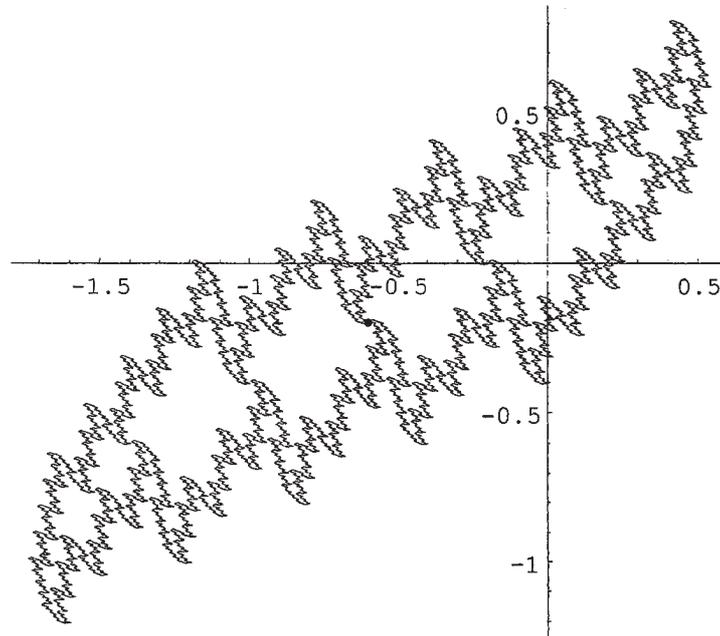
y entonces

$$L_\theta^{-(K+2)} \hat{K}[\bar{\theta}^2 B] + \alpha = L_\theta^{-(K+2)} \left( \hat{K}[B^{-1}] \cup \left( \hat{K}[AB] - g(B) \right) \cup \dots \right)$$

pero en  $\hat{K}[AB]$  puede repetirse el proceso descrito por el que encontramos el primer punto doble. ■



Contornos para  $n=3, n=4$ , puntos  $v_3^{(1)}, v_3^{(2)}, v_4^{(1)}, v_4^{(2)}$ .



Contorno para  $n = 6$  y punto fijo de  $\psi(z) = (-2 + i)^{-1}(z + 2)$ .

## 4 Sobre la Cápsula Convexa del conjunto de los fraccionarios en las bases $-n + i$ .

### 4.1 Caracterización de los puntos extremos expuestos de un compacto.

Sea  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  es un compacto y  $C(K)$  es su cápsula convexa. Un punto  $x \in K$  es un punto extremo de  $K$  si no existen  $y, z$  en  $K$  tales que  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$  con  $0 < \lambda < 1$ .

Si  $x$  no es extremo  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$  con  $0 < \lambda < 1$  entonces para cualquier  $u \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot u = \lambda(y \cdot u) + (1 - \lambda)(z \cdot u) \leq \max\{y \cdot u, z \cdot u\}$$

y la igualdad ocurre sólo si  $y \cdot u = z \cdot u$ , esto es si  $u \perp y - z$ . De manera que si para algún  $u$ , que convenimos unitario,  $x$  es el único elemento en  $K$  tal que  $x \cdot u = \max\{z \cdot u : z \in K\}$  entonces  $x$  es un punto extremo llamado *punto expuesto* de  $K$ . Si  $x$  es extremo expuesto de  $K$ , existe un hiperplano por  $x$ ,  $H = \{y \in \mathbb{R}^n : (y - x) \cdot u = 0\}$  tal que  $H \cap K = \{x\}$  y  $K$  está totalmente contenida en el semiespacio  $\{y \in \mathbb{R}^n : (y - x) \cdot u \leq 0\}$  de manera que  $x \cdot u = \max\{z \cdot u : z \in K\}$  y  $x$  es el único que realiza el máximo. En resumen  $x$  es un extremo expuesto de  $K$  si y sólo si existe algún hiperplano  $H$  soporte de  $K$  tal que  $H \cap K = \{x\}$ . Vale el siguiente teorema [14]:

**Teorema 4.1** *Todo compacto convexo en  $\mathbb{R}^n$  es la clausura de la cápsula convexa de sus puntos expuestos.*

Y vale que  $C(K)$  es un polígono si y sólo si  $K$  tiene finitos puntos expuestos.

Convenimos en decir que  $x$  es extremo expuesto en una dirección  $u$  si  $x \cdot u = \max\{z \cdot u : z \in K\}$  y  $x$  es el único que realiza el máximo. Si en una dirección  $u$  no hay punto expuesto, esto es existen por lo menos dos puntos  $x \neq y$  tales que

$$y \cdot u = x \cdot u = \max\{z \cdot u : z \in K\}$$

entonces para  $\lambda \in (0, 1)$

$$\lambda y + (1 - \lambda)x = \max\{z \cdot u : z \in K\}$$

el segmento está en el borde de la cápsula convexa de  $K$  y si  $n = 2$ ,  $u$  es un vector normal exterior a dicha cápsula convexa.

## 4.2 Estudio de las cápsulas convexas del conjunto de los fraccionarios en las bases $-N + i$ .

Dado  $n \in \mathbb{N}$  y el conjunto  $F$  de los fraccionarios en la base  $b = -n + i$

$$F = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d_k b^{-k} : d_k \in D = \{0, 1, \dots, n^2\} \right\}$$

Si  $z = x + iy$ ,  $u = a + ib$  resulta  $(x, y) \cdot (a, b) = xa + yb = \operatorname{Re}(z\bar{u})$ . Sea ahora  $z = \sum_{k=1}^{\infty} d_k b^{-k} \in F$ ,  $u \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re}(z\bar{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u})$$

y observemos que

$$\max\{d \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) : d \in D\} : \begin{cases} \text{se realiza sólo en } d = n^2 & \text{si } \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) > 0 \\ \text{se realiza sólo en } d = 0 & \text{si } \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) < 0 \\ \text{es igual para todo } d & \text{si } \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) = 0 \end{cases}$$

tenemos entonces  $F$  tiene un punto expuesto en la dirección  $u$  si y sólo si  $\operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) \neq 0$  para todo  $k \geq 1$  y en ese caso el punto expuesto es

$$z_u = n^2 \sum_{k \in N(u)} b^{-k}, \quad N(u) = \{k \in \mathbb{N} : \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) > 0\}$$

y si  $\operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) = 0$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , el borde de la cápsula convexa contiene un segmento en una dirección perpendicular a  $u$ .

Ahora  $\operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) = 0$  si y sólo si  $b^{-k}\bar{u} = \alpha i$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o equivalentemente si  $u = -\alpha \bar{b}^k i$ . Por lo tanto la cápsula convexa de  $F$  será un polígono si y sólo si las direcciones de  $b^k$  son finitas, es decir si  $b/|b|$  es una raíz de la unidad.

La cápsula convexa de  $F$  será un polígono de  $n$  lados si  $n$  es el orden de  $b/|b|$  y  $n$  es par pues en este caso  $(b/|b|)^{n/2} = -1$ , cada dirección  $b^j$ ,  $j \leq n/2$  tendrá su opuesta en  $b^{j+n/2}$ ; y será de  $2n$  lados si el orden  $n$  es impar.

En todos los casos (polígono o no) para cada dirección  $u = \pm \bar{b}^k i$  hay un segmento en el borde de la cápsula convexa perpendicular a  $u$  y de menor longitud a medida que aumenta  $k$ . En efecto, por ejemplo, para  $k = 1$ ,  $u = \bar{b}i = (-n - i)i = 1 - ni$ ,  $z \in F$

$$\begin{aligned} \max \{ \operatorname{Re}(z\bar{u}) : z \in F \} &= \max \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d_k \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) : d_k \in D \right\} \\ &= \max \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d_k \operatorname{Re}(b^{-(k-1)}(-i)) : d_k \in D \right\} \\ &= \max \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} d_k \operatorname{Re}(b^{-(k-1)}(-i)) : d_k \in D \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

de manera que si  $z_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k b^{-k}$  realiza el máximo (único o no) en la dirección  $i$ ,  $b^{-1}(d + z_0)$  realiza el máximo (14) para todo  $d \in D$  y el segmento  $[b^{-1}z_0, b^{-1}(n^2 + z_0)]$  está incluido en la frontera de la cápsula convexa. Tomando  $u = -\bar{b}i$  se tiene que el segmento  $[b^{-1}z_1, b^{-1}(n^2 + z_1)]$ , paralelo al anterior, también forma parte del borde de la cápsula convexa para  $z_1 \in F$  que realiza el máximo en la dirección  $-i$ .

Hemos probado entonces parte del siguiente teorema.

**Teorema 4.2** Si  $b = -n + i$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , la cápsula convexa del conjunto de los fraccionarios en la base  $b$

$$F = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d_k b^{-k} : d_k \in D = \{0, 1, \dots, n^2\} \right\}$$

resulta un polígono si y sólo si  $b/|b|$  es una raíz de la unidad. Además:

(i) Si la cápsula convexa es un polígono, sus vectores normales exteriores están en las direcciones  $\pm \bar{b}^k i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, si  $n$  es el orden de  $b/|b|$  será un polígono de  $n$  lados si  $n$  es par y  $2n$  lados si  $n$  es impar.

(ii) Si la cápsula convexa no es un polígono, para cada punto expuesto  $x$  de  $F$  existe un único vector unitario  $u$  tal que  $F$  está contenido en el semiespacio  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}((z-x)\bar{u}) \leq 0\}$

**Prueba.** Queda probar el punto (ii). Para esto probaremos el siguiente lema.

**Lema 4.1** Si  $z \in \mathbb{C}$  y  $|z| = 1$  entonces  $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$  es finito o es denso en la circunferencia unidad  $S$ .

**Prueba del lema.** Si  $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$  no es finito es un conjunto infinito en el compacto circunferencia unidad, luego existe un punto de acumulación  $z_0 \in S$  y una sucesión  $(z^{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $z^{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} z_0$ . Así dado  $\varepsilon > 0$  existe  $j_0$  tal que si  $j \geq j_0$ ,  $|z^{n_j} - z^{n_{j_0}}| < \varepsilon$ , y ya que  $|z| = 1$ , esto es  $|z^{n_j - n_{j_0}} - 1| < \varepsilon$ . De esta forma  $\{(z^{n_j - n_{j_0}})^k : k \in \mathbb{N}\}$  forman sobre  $S$  una sucesión de puntos a distancia menor que  $\varepsilon$ . ■

Supongamos que  $b/|b|$  no es una raíz de la unidad y  $x$  es un punto expuesto de  $F$ , esto es que existe un  $u \in \mathbb{C}$ ,  $|u| = 1$  tal que

$$\operatorname{Re}(z\bar{u}) < \operatorname{Re}(x\bar{u}) \quad \forall z \in F, z \neq x$$

entonces como hemos visto  $\operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) \neq 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^* b^{-k} \quad \text{con} \quad d_k^* = \begin{cases} n^2 & \text{si } \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) > 0 \\ 0 & \text{si } \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Supongamos que existe  $v \neq u$ ,  $|v| = 1$  y  $\operatorname{Re}(z\bar{v}) \leq \operatorname{Re}(x\bar{v})$  para cualquier  $z = \sum_{k=1}^{\infty} d_k b^{-k} \in F$ , entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{v}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} d_k^* \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{v})$$

para cualquier sucesión  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  en  $D$ . Entonces

$$\begin{aligned} d_k^* &\geq d \text{ para cualquier } d \in D \text{ si } \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{v}) > 0 \\ d_k^* &\leq d \text{ para cualquier } d \in D \text{ si } \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{v}) < 0 \end{aligned}$$

por (15) se sigue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) &> 0 \text{ si } \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{v}) > 0 \\ \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) &< 0 \text{ si } \operatorname{Re}(b^{-k}\bar{v}) < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Ahora claramente  $v \neq -u$  y podemos escribir  $u = e^{i\alpha}$ ,  $v = e^{i\beta}$  eligiendo la determinación del argumento para que  $|\alpha - \beta| < \pi$ , y supongamos, sin por ello perder generalidad, que  $\alpha < \beta$ . Según el lema 4.1 existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $b^{-k}i = |b^{-k}| e^{i\theta}$  con  $\alpha < \theta < \beta$  y así  $0 < \theta - \alpha < \beta - \alpha < \pi$ ,  $-\pi < \alpha - \beta < \theta - \beta < 0$ . Tenemos entonces

$$b^{-k} = |b^{-k}| e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$$

luego para tal  $k$

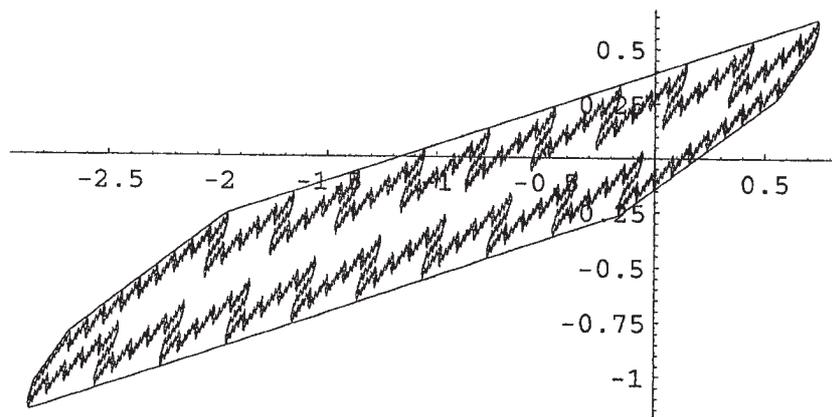
$$\operatorname{Re}(b^{-k}\bar{u}) = \operatorname{Re}\left(|b^{-k}| e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} e^{-i\alpha}\right) = |b^{-k}| \cos\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

y

$$\operatorname{Re}(b^{-k}\bar{v}) = \operatorname{Re}\left(|b^{-k}| e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} e^{-i\beta}\right) = |b^{-k}| \cos\left(\theta - \beta - \frac{\pi}{2}\right) < 0$$

lo que contradice (16). ■

A continuación se presenta la figura y el programa que siguiendo los resultados que se han mostrado grafica una aproximación del borde de la cápsula convexa del conjunto de los fraccionarios para la base  $-3 + i$  con diez pares de lados paralelos y precisión del orden de  $|-3 + i|^{-50}$ .



El conjunto de los fraccionarios en la base  $3+i$   
y el borde de su cápsula convexa.

```

base=-3+I;mm=50;nn=10;
For[j=1,j<=nn,j++,uc1[j]=-base^j*I;
For[i=1,i<=mm,i++,
  d[i]=Which[Re[((base)^(-i))*uc1[j]]<=0,0,Re[((base)^(-
i))*uc1[j]]>0,9]];
z1=N[Sum[((base)^(-i))*d[i],{i,1,mm}]];
z2=z1+((base)^(-j))*9;
lado1[j]=Graphics[{Thickness[0.0012],
  Line[{Re[z1],Im[z1]},{Re[z2],Im[z2]}]}]];
lado1=Table[lado1[j],{j,nn}];
For[j=1,j<=nn,j++,uc1[j]=base^j*I;
For[i=1,i<=mm,i++,
  d[i]=Which[Re[((base)^(-i))*uc1[j]]<=0,0,Re[((base)^(-
i))*uc1[j]]>0,9]];
z1=N[Sum[((base)^(-i))*d[i],{i,1,mm}]];
z2=z1+((base)^(-j))*9;
lado2[j]=Graphics[{Thickness[0.0012],
  Line[{Re[z1],Im[z1]},{Re[z2],Im[z2]}]}]];
lado2=Table[lado2[j],{j,nn}];
Show[{dibu,lado1,lado2},AspectRatio -> Automatic]

```

## Referencias

- [1] Bedford, Tim, Dimension and Dynamics for Fractal Recurrent Sets. *J. London Math. Soc.* (2) 33 (1986) 89-100.
- [2] Benedek, A. and Panzone, R., The set of Gaussian Fractions, *Actas 2<sup>o</sup> Congreso "Dr. A.R. Monteiro"*. Univ. Nac. del Sur, (1993) 11-40.
- [3] Benedek, A. and Panzone, R., On some notable plane sets, II: dragons, *Rev. Unión Mat. Arg.*, 39(1994) 76-89.
- [4] Dekking, F.M., Replicating Superfigures and Endomorphisms of Free Groups, *Journal of Combinatorial Theory Series A* 32, 315-320 (1982).
- [5] Dekking, F.M., Recurrent Sets: A Fractal Formalism. Report 82-32. Technische Hogeschool. Delft 1982.
- [6] Dekking, F.M., Recurrent Sets, *Advances in Mathematics* 44, 78-104 (1982).
- [7] Falconer, K., Fractal Geometry, John Wiley, (1990).
- [8] Ito, Shunji, On the Fractal Curves induced from the Complex Radix Expansion, *Tokyo J. Math.* Vol 12, No.2, 299-320 (1989).
- [9] Kátai, I. and Szabó, J., Canonical Number Systems for Complex Integers, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 37(1975) 255-260.
- [10] Moure, M.del C., Figuras Replicantes planas obtenidas vía Endomorfismos de Grupos Libres. *Tesis Magister*, UNS (1997).
- [11] Moure, M.del C., Puntos dobles en el contorno del conjunto de los fraccionarios en la base  $-2+i$ , Informe Técnico Interno N° 64, INMABB-UNS.
- [12] Panzone, Pablo, A note on the convex hull of self-similar sets. *Actas 2<sup>o</sup> Congreso "Dr. A.R. Monteiro"*. Univ. Nac. del Sur, (1993) 57-64.
- [13] Vince, A., Self-Replicating tiles and their boundary, *Discrete & Computational Geometry* 21, 463-476 (1999).
- [14] Webster, R., Convexity, Oxford Univ. Press (1994).