ACTAS DEL VI CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO
(2001), Páginas 137–148

C–álgebras $(n+1)$–valuadas con una operación adicional

Aldo V. Figallo

Resumen

En este trabajo iniciamos el estudio de los modelos algebraicos del fragmento del cálculo proposicional de Łukasiewicz $(n+1)$–valuado, $n \geq 1$, formulado en términos de la operación de implicacíon $\rightarrowtail$ y un operador modal $\triangle$ considerado por G. Moisil. Esta nueva clase ecuacional de álgebras, constituye la generalización natural de las $\triangle I_3$–álgebras introducidas en [2, 3].
Más precisamente, se definen aquí a las $\triangle C_{n+1}$–álgebras como álgebras $\langle A, \rightarrowtail, \triangle, 1\rangle$ de tipo $(2,1,0)$ tales que el reducto $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle$ es una C–álgebra y $\triangle$ es una operación que satisface ciertas identidades adicionales.

1 Introducción y Preliminares

Las C–álgebras [9] representan la contrapartida algebraica del fragmento implicativo de la lógica de Łukasiewicz infinito–valuada y ellas han sido muy estudiadas por varios autores bajo diferentes nombres.

En este artículo, definimos y estudiamos a las $\triangle C_{n+1}$–álgebras. Estas álgebras constituyen la generalización natural de las $\triangle I_3$–álgebras introducidas en [2, 3] y no es difícil de comprobar que estas álgebras son los modelos algebraicos del fragmento del cálculo proposicional de Łukasiewicz $(n+1)$–valuado, donde se consideran como conectivos primitivos a la implicación de Łukasiewicz y el operador de necesidad $\triangle$ definido por la fórmula $\triangle x = \sim (\sim x \rightarrow x)$, donde $\sim$ es la negación de Łukasiewicz y $\rightarrow$ es la implicación débil definida más adelante.

En la segunda sección indicamos algunas propiedades válidas en las $\triangle C_{n+1}$–álgebras. Verificamos que las $\triangle C_{n+1}$–congruencias de una $\triangle C_{n+1}$–álgebra $\langle A, \rightarrowtail, \triangle, 1\rangle$ coinciden con las C–congruencias de su reducto $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle$. Caracterizamos las $\triangle C_{n+1}$–álgebras subdirectamente irreducibles y comprobamos que esta clase de álgebras es semisimple.

En la tercer sección verificamos que en una C_{n+1}–álgebra $\langle A, \rightarrow, 1\rangle$ se puede definir a lo sumo una única operación unaria $\triangle$ sobre A de modo que $\langle A, \rightarrowtail, \triangle, 1\rangle$ sea una $\triangle C_{n+1}$–álgebra y señalamos como puede construirse en los casos posibles. Dicho método pone en evidencia que las $\triangle C_{n+1}$–álgebras son C_{n+1}–álgebras especiales.

En la cuarta y última sección establecemos una fórmula para obtener el número de elementos de la $\triangle C_{n+1}$–álgebra libre finitamente generada, en función de la valencia n y del número m, $m \geq 1$, de generadores libres.

Recordemos que una $C-$álgebra es un álgebra $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle$ de tipo $(2,0)$ satisfaciendo las siguientes identidades:

(C1) $1 \rightarrowtail x = x$,

(C2) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = 1$,

(C3) $(x \rightarrowtail y) \rightarrowtail ((y \rightarrowtail z) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)) = 1$,

(C4) $(x \rightarrowtail y) \rightarrowtail y = (y \rightarrowtail x) \rightarrowtail x$,

(C5) $((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (y \rightarrowtail x)) \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = 1$.

Es bien conocido que la variedad de las álgebras $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle$ de tipo $(2,0)$ que verifican (C1) a (C4) es la variedad de las álgebras duales de las $BCK-$álgebras conmutativas [7, 12, 13, 14] en el sentido que $y * x$ y 0 son reemplazados por $x \rightarrowtail y$ y 1 respectivamente.

En toda $C-$álgebra se verifica:

(C6) la relación $\leq$ definida por $x \leq y$ si, y sólo si $x \rightarrowtail y = 1$ es un orden parcial sobre A con último elemento 1. Además, $(A, \leq)$ es un semi-retículo superior donde $x \vee y = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail y$ es el supremo de los elementos x e y.

(C7) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = y \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$.

Una C^0-álgebra es un álgebra $\langle A, \rightarrowtail, 0, 1\rangle$ de tipo $(2,0,0)$ tal que $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle$ es una $C-$álgebra y 0 es el primer elemento para el orden $\leq$.

Denotaremos con $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C^0}$ las variedades de las $C-$álgebras y C^0-álgebras respectivamente. En [11], se muestra que $\mathbf{C^0}$ coincide con la variedad $\mathbf{W}$ de las álgebras de Wasjberg [5, 6, 9, 11]. Por otro lado, es bien conocido que, la variedad de las álgebras de Wasjberg es equivalente a la variedad de las $MV-$álgebras introducidas por C. Chang [1].

Si $\mathbf{K}$ es una de las variedades $\mathbf{C}$ o $\mathbf{C^0}$, denotaremos con $Con_{\mathbf{K}}(A)$, y $Hom_{\mathbf{K}}(A, B)$ a los conjuntos de las $\mathbf{K}$–congruencias y los $\mathbf{K}$–homomorfismos de A en B, respectivamente. Además, si $S \subseteq A$ es una $\mathbf{K}$–subálgebra de A escribiremos $S \triangleleft_{\mathbf{K}} A$. Denotaremos con $[G]_{\mathbf{K}}$ a la $\mathbf{K}$–subálgebra de A generada por G y en los casos que no haya lugar a confusión omitiremos al subíndice $\mathbf{K}$.

Sea $A \in \mathbf{K}$. $D \subseteq A$ es un sistema deductivo de A si verifica:

(D1) $1 \in D$,

(D2) si $x, x \rightarrowtail y \in D$, entonces $y \in D$.

Si $\mathcal{D}(A)$ es el conjunto de todos los sistemas deductivo de A, entonces:

(T1) $Con_{\mathbf{K}}(A) = \{R(D) : D \in \mathcal{D}(A)\}$, donde

$$R(D) = \{(x,y) \in A^2 : x \rightarrowtail y, y \rightarrowtail x \in D\}.$$

Si $R = R(D)$, denotaremos con A/D al álgebra cociente. Sea $h \in Hom_{\mathbf{K}}(A,B)$. El conjunto $Ker(h) = \{x \in A : h(x) = 1\}$ es llamado el núcleo de h. Es fácil de ver que si $h \in Hom_{\mathbf{K}}(A,B)$, entonces $Ker(h) \in \mathcal{D}(A)$ ([4, 9, 11]).

En [4] hemos definido la familia $T(A)$ de los elementos tarskianos de una $C-$álgebra A, donde $x \in T(A)$ si vale $x \rightarrowtail y = x \rightarrowtail (x \rightarrowtail y)$ para todo $y \in A$ y hemos probado que los elementos tarskianos pueden ser caracterizados de diferentes maneras. En efecto, se puede probar que vale:

(T2) Sea A una $C-$álgebra y $x \in A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $x \in T(A)$,

(ii) vale $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$ para todo $y, z \in A$,

(iii) se verifica $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = x$ para todo $y \in A$.

(T3) $T(A) \lhd A$.

Sea n un entero, $n \geq 1$. Una $C_{n+1}-$álgebra (o $C^0_{n+1}-$álgebra) es una $C-$álgebra (o C^0-álgebra) que satisface la identidad:

(C8) $(x^n \rightarrowtail y) \vee x = 1$,

donde $x^1 \rightarrowtail y = x \rightarrowtail y$ y $x^{k+1} \rightarrowtail y = x \rightarrowtail (x^k \rightarrowtail y)$, para $k = 1, 2, \ldots$.

En adelante para simplificar escribiremos $x \rightarrow y$ en lugar de $x^n \rightarrowtail y$. Denotaremos con $\mathbf{C_{n+1}}$ y $\mathbf{C^0_{n+1}}$ a las variedades de las $C_{n+1}-$álgebras y $C^0_{n+1}-$álgebras respectivamente.

A continuación, indicaremos una lista de propiedades válidas en las $C_{n+1}-$álgebras y para ver sus demostraciones el lector puede consultar [4] y [11].

(T4) Si $A \in \mathbf{C_{n+1}}$ y $D \subseteq A$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) D verifica (D2),

(ii) D verifica (D'2): if $x, x \rightarrow y \in D$, entonces $y \in D$.

(T5) Para toda $A \in \mathbf{C_{n+1}}$ se satisfacen las identidades:

(C9) $(x \rightarrow y) \rightarrowtail x = x$,

(C10) $x \rightarrow 1 = 1$

(C11) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$,

(C12) $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$,

(C13) $x \rightarrow (y \rightarrowtail z) = (x \rightarrow y) \rightarrowtail (x \rightarrow z)$,

(C14) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$,

(C15) $((x \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x = 1$.

(C16) $1 \rightarrow x = x$.

(T6) Sea $C_{n+1} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ el conjunto de fracciones racionales. Si definimos $x \rightarrowtail y = \min\{1, 1 - x + y\}$ para todos $x, y \in C_{n+1}$, entonces $\langle C_{n+1}, \rightarrowtail, 1\rangle \in \mathbf{C_{n+1}}$.

Si $\mathcal{M}(A)$ es el conjunto de todos los sistemas deductivos maximales de A, entonces:

(T7) Si $A \in \mathbf{C_{n+1}}$ tiene más de un elemento, A es isomorfa a una subálgebra de $P = \prod_{M \in \mathcal{M}(A)} A/M$. Además, si $A \in \mathbf{C^0_{n+1}}$ es finita se tiene que $A \simeq P$.

(T8) Si $A \in \mathbf{C_{n+1}}$ y $S \lhd A$, entonces para cada $D \in \mathcal{M}(S)$ existe un único $M \in \mathcal{M}(A)$ tal que $D = M \cap S$.

(T9) Si $A \in \mathbf{C_{n+1}}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes ([4]):

(i) $M \in \mathcal{M}(A)$,

(ii) A/M is simple,

(iii) $A/M \simeq C_{j+1}$ para algún j, $1 \leq j \leq n$.

2 $\triangle C_{n+1}$–álgebras

Definición 2.1 *Un álgebra $\langle A, \rightarrowtail, \triangle, 1\rangle$ de tipo $(2, 1, 0)$ es una $\triangle C_{n+1}$–álgebra si el reducto $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle$ es una C_{n+1}–álgebra y se satisfacen las identidades:*

(N1) $\triangle x \rightarrowtail y = x \rightarrow y$,

(N2) $\triangle(\triangle x \rightarrowtail y) = \triangle x \rightarrowtail \triangle y$.

Representaremos por $\triangle\mathbf{C_{n+1}}$ a la variedad de las $\triangle C_{n+1}$–álgebras. Además, si $A \in \triangle\mathbf{C_{n+1}}$ y $X \subseteq A$, denotaremos $\triangle X$ al conjunto $\{\triangle x : x \in X\}$.

Ejemplo 2.1 El algebra $C^{\triangle}_{n+1} = \langle C_{n+1}, \rightarrowtail, \triangle, 1\rangle$, donde $\langle C_{n+1}, \rightarrowtail, \triangle, 1\rangle$ es la indicada en (T6) y $\triangle$ está definida por la prescripción

$$\triangle x = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases},$$

es una $\triangle C_{n+1}$–álgebra.

Lema 2.1 *Si $A \in \triangle\mathbf{C_{n+1}}$ entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(N3) $\triangle x \leq x$,

(N4) $x \rightarrow \triangle x = 1$,

(N5) $\triangle\triangle x = \triangle x$,

(N6) $T(A) = \triangle A$,

(N7) *Si* $x \leq y$ *entonces* $\triangle x \leq \triangle y$,

(N8) $\triangle(x \rightarrowtail y) \leq \triangle x \rightarrowtail \triangle y$.

Dem. Es de rutina. ■

Lema 2.2 *Si* $A \in \triangle\mathbf{C}_{n+1}$ *y* $D \in \mathcal{D}(A)$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $x \in D$,

(ii) $\triangle x \in D$.

Dem.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia de (D1), (N4) y (D'2).
(ii) $\Rightarrow$ (i): Es consecuencia de (N3), (D1) y (D2). ■

Proposición 2.1 *Si* $A \in \triangle\mathbf{C}_{n+1}$ *entonces* $Con_{\triangle\mathbf{C}_{n+1}}(A) = Con_{\mathbf{C}}(A)$.

Dem. Solamente debemos probar que $Con_{\mathbf{C}}(A) \subseteq Con_{\triangle\mathbf{C}_{n+1}}(A)$.
Sea $R \in Con_{\mathbf{C}}(A)$. Por (T1) existe $D \in \mathcal{D}(A)$ tal que $R = R(D)$.
Sea $(x, y) \in R$, entonces (1) $x \rightarrowtail y \in D$, (2) $y \rightarrowtail x \in D$. Por (1) y el Lema 2.2 tenemos (3) $\triangle(x \rightarrowtail y) \in D$. De (3), (N8), (C6), (D1) y (D2) resulta (4) $\triangle x \rightarrowtail \triangle y \in D$. En forma análoga se prueba (5) $\triangle y \rightarrowtail \triangle x \in D$. De (4), (5) y (T1) tenemos que $(\triangle x, \triangle y) \in R$ y por lo tanto $R \in Con_{\triangle\mathbf{C}_{n+1}}(A)$. ■

De la Proposición 2.1, (T4), (T5) y resultados de A. Monteiro indicados en [10] tenemos que:

Proposición 2.2 *Sea* $A \in \triangle\mathbf{C}_{n+1}$ *con más de un elemento. Entonces todo sistema deductivo propio de* A *es intersección de sistemas deductivos maximales de* A. *Además las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A/M *es simple,*

(ii) $M \in \mathcal{M}(A)$,

(iii) *Si* $a \in A \setminus M$ *y* $b \in A$ *entonces* $\triangle a \rightarrowtail b \in M$.

Teniendo en cuenta la Proposición 2.1 y utilizando técnicas standarts se prueba:

Teorema 2.1 *Si* $A \in \triangle\mathbf{C}_{n+1}$ *tiene más de un elemento, entonces* A *es producto subdirecto de* $\triangle C_{n+1}-$*álgebras simples.*

El Teorema 2.2 que demostraremos a continuación suministra una descripción exacta de las $\triangle C_{n+1}-$álgebras simples.

Teorema 2.2 *Si* $\langle A, \rightarrowtail, \triangle, 1\rangle \in \triangle\mathbf{C}_{n+1}$ *es simple, entonces se verifican:*

(i) $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle \simeq S \lhd C_{n+1}$,

(ii) $\langle A, \leq \rangle$ *tiene primer elemento,*

(iii) *Si* $x \in A \setminus \{1\}$ *entonces* $\triangle x = 0$.

Dem.

(i) Como $\langle A, \rightarrowtail, \triangle, 1 \rangle$ es una $\triangle C_{n+1}-$álgebra simple tenemos que $\langle A, \triangle, 1 \rangle$ es una $C_{n+1}-$álgebra simple y por los casos (ii) y (iii) de (T9) tenemos que $A \simeq S \lhd C_{n+1}$.

(ii) Por (i) tenemos que A es finita y $\langle A, \leq \rangle$ es una cadena, luego tiene primer elemento.

(iii) Como A es simple entonces $\{1\}$ es sistema deductivo maximal. Sea $0 \in A$ el primer elemento y $x \in A \setminus \{1\}$, entonces por el caso (iii) de la Proposición 2.2 tenemos que $\triangle x \rightarrowtail 0 \in \{1\}$, luego $\triangle x \rightarrowtail 0 = 1$, de donde resulta $\triangle x = 0$ ■

Corolario 2.1 *Las únicas* $\triangle C_{n+1}-$*álgebras simples, salvo isomorfismos, son las álgebras* $C_{t+1}^{\triangle}$ *con* $1 \leq t \leq n$, *indicadas en el Ejemplo 2.1*

3 Construcción del operador $\triangle$

En esta sección determinaremos las clase de las $C_{n+1}-$álgebras que admiten una estructura de $\triangle C_{n+1}-$álgebras. En primer lugar probaremos la siguiente Proposición

Proposición 3.1 *Sea* $\langle A, \rightarrowtail, 1 \rangle \in \mathbf{C}_{n+1}$. *Entonces existe a lo sumo un operador* $\alpha : A \longrightarrow A$ *tal que* $\langle A, \rightarrowtail, \alpha, 1 \rangle \in \triangle \mathbf{C}_{n+1}$.

Dem. Sean α y β operaciones unarias sobre A de modo que $\langle A, \rightarrowtail, \alpha, 1 \rangle$ y $\langle A, \rightarrowtail, \beta, 1 \rangle$ son $\triangle C_{n+1}-$álgebras. Entonces

(1) $\alpha x \rightarrowtail \beta x = x \rightarrow \beta x = 1$ [(N1),(N4)]

(2) $\alpha x \leq \beta x$. [(1),(C6)]

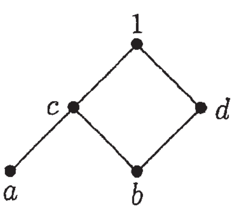
En forma análoga se prueba

(3) $\beta x \leq \alpha x$.

De (1), (3) y (C6) resulta $\beta x = \alpha x$. ■

Observación 3.1 De (N3), (N7) y (N5) resulta que para cada $A \in \triangle \mathbf{C}_{n+1}$ y $x \in A$, el conjunto $\{t \in T(A) : t \leq x\}$ tiene por último elemento a $\triangle x$.

Por otra parte, la $C_{2+1}-$álgebra $\langle A, \rightarrowtail, 1 \rangle$ cuyo diagrama de Hasse se indica a continuación:



$\rightarrow$	a	b	c	d	1
a	1	d	1	d	1
b	c	1	1	1	1
c	c	d	1	d	1
d	a	c	c	1	1
1	a	b	c	d	1

es tal que $T(A) = \{a, d, 1\}$ y $\{t \in T(A) : t \leq b\} = \emptyset$. Entonces esta álgebra no admite ninguna operación unaria adicional que la transforme en una $\triangle C_{2+1}-$álgebra.

Definición 3.1 *Diremos que $A \in \mathbf{C}_{n+1}$ es una $\sigma C_{n+1}-$algebra si para cada $x \in A$ el conjunto $\{t \in T(A) : t \leq x\}$ tiene último elemento que representaremos con σx.*

Con $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{C}_{n+1}$ representaremos la clase de las $\sigma C_{n+1}-$álgebras. Antes de demostrar el Teorema 3.1, que es el resultado central de este párrafo, probaremos:

Lema 3.1 *Sea $A \in \mathbf{C}_{n+1}$ y $t \in T(A)$. entonces $x \to t \in T(A)$ para todo $x \in A$.*

Dem. Supongamos que se verifican

(1) $t \in T(A), x \in A,$

y sea

(2) $z \in A.$

Entonces

$$
\begin{aligned}
(3)\ & ((x \to t) \rightarrowtail ((x \to t) \rightarrowtail z)) \rightarrowtail ((x \to t) \rightarrowtail z) \\
&= (((x \to t) \rightarrowtail z) \rightarrowtail (x \to t)) \rightarrowtail (x \to t) && [(C4)] \\
&= (x \to (((x \to t) \rightarrowtail z) \rightarrowtail t) \rightarrowtail (x \to t) && [(C7)] \\
&= x \to ((((x \to t) \rightarrowtail z) \rightarrowtail t) \rightarrowtail t) && [(C13)] \\
&= x \to ((t \rightarrowtail ((x \to t) \rightarrowtail z) \rightarrowtail ((x \to t) \rightarrowtail z)) && [(C4)] \\
&= x \to ((t \rightarrowtail z) \rightarrowtail ((x \to t) \rightarrowtail z)) && [((1),(C2),(C1)] \\
&= x \to ((x \to t) \rightarrowtail ((t \rightarrowtail z) \rightarrowtail z)) && [(C7)] \\
&= x \to ((x \to t) \rightarrowtail ((z \rightarrowtail t) \rightarrowtail t)) && [(C4)] \\
&= (x \to t) \rightarrowtail ((z \rightarrowtail t) \rightarrowtail (x \to t)) && [(C7)] \\
&= 1. && [(C2)] \\
(4)\ & (x \to t) \rightarrowtail ((x \to t) \rightarrowtail z) = (x \to t) \rightarrowtail z && [(3),(C2),(C6)]
\end{aligned}
$$

Luego de (4) $(x \to t) \in T(A)$. ■

Teorema 3.1 *Sea $\langle A, \rightarrowtail, \triangle, 1\rangle$ un álgebra de tipo $(2, 1, 0)$ tal que $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle \in \mathbf{C}_{n+1}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\langle A, \rightarrowtail, \triangle, 1\rangle \in \triangle\mathbf{C}_{n+1}$,

(ii) $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle \in \boldsymbol{\sigma}\mathbf{C}_{n+1}$.

Dem.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia de (N3), (N5), (N6) y (N7), donde $\sigma x = \Delta x$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por hipótesis $T(A)$ es condicionalmente completa, entonces para cada $x \in A$ existe $\sigma x = \max \{t \in T(A) : t \leq x\}$. Además, es claro que vale

(S1) $\sigma x \leq x$,

Por otra parte es fácil de verificar que valen:

(S2) $z \in T(A)$ implica $z = \sigma z$,

(S3) $\sigma x \rightarrowtail \sigma y \leq \sigma(\sigma x \rightarrowtail y)$,

Probemos ahora

(S4) $x \rightarrow \sigma x = 1$.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & x \rightarrow \sigma x \in T(A), & [\sigma x \in T(A), \text{ Lema } 2.2] \\
(2) & x \rightarrow \sigma x = \sigma(x \rightarrow \sigma x), & [(1),(S2)] \\
(3) & \sigma x = (x \rightarrow \sigma x) \rightarrowtail \sigma x & [(C9)] \\
 & \quad = \sigma(x \rightarrow \sigma x) \rightarrowtail \sigma x, & [(2)] \\
(4) & 1 = (\sigma(x \rightarrow \sigma x) \rightarrowtail \sigma x) \rightarrowtail \sigma x & [(3),(C6)] \\
 & \quad = (x \rightarrow \sigma x) \vee \sigma x & [(C6)] \\
 & \quad = x \rightarrow \sigma x. & [(S1)]
\end{array}
$$

(S5) $x \rightarrow y = \sigma x \rightarrowtail y$ (Axioma N1):

$$
\begin{array}{lll}
x \rightarrow y & = (x \rightarrow \sigma x) \rightarrow (x \rightarrow y) & [(C16),(S4)] \\
 & = x \rightarrow (\sigma x \rightarrow y) & [(C14)] \\
 & = \sigma x \rightarrow (x \rightarrow y). & [(C11)] \\
 & = \sigma x \rightarrow y & [(C14),(S1),(C16)] \\
 & = \sigma x \rightarrowtail y. & [\sigma x \in T(A)]
\end{array}
$$

(S6) $\sigma(\sigma x \rightarrowtail y) \leq \sigma x \rightarrowtail \sigma y$:

$$
\begin{array}{ll}
\sigma(\sigma x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (\sigma x \rightarrowtail \sigma y) = (\sigma x \rightarrowtail y) \rightarrow (\sigma x \rightarrowtail \sigma y) & [(S5)] \\
= (\sigma x \rightarrow y) \rightarrow (\sigma x \rightarrow \sigma y) & [\sigma x \in T(A)] \\
= \sigma x \rightarrow (y \rightarrow \sigma y) & [(C16)] \\
= 1. & [(S4),(C11)]
\end{array}
$$

Entonces por (C6) resulta (S6).

(S7) $\sigma(\sigma x \rightarrowtail y) = \sigma x \rightarrowtail \sigma y$ (Axioma N2):

Es consecuencia directa de (C6), (S3) y (S6). ■

Teorema 3.2 *Si* $\langle A, \rightarrowtail, \sim, 1\rangle \in \mathbf{W}_{n+1}$, *entonces* $\langle A, \rightarrowtail, 1\rangle \in \boldsymbol{\sigma}\mathbf{C}_{n+1}$ *y para cada* $x \in A$, *se verifica* $\sigma x = \sim (x \rightarrow \sim x)$.

Dem. Es de rutina ■

4 $\triangle C_{n+1}$−álgebras libres

En toda esta sección $\mathcal{M}(n,c) \in \triangle \mathbf{C}_{n+1}$ denota la $\triangle C_{n+1}$−álgebra con un conjunto G de generadores libres, $|G| = c$, donde c es un número cardinal.

Sea A un conjunto ordenado y $X \subseteq A$. Denotaremos con $\mu(X)$ al conjunto de todos los elementos minimales de X.

Lema 4.1 *Sea* $A \in \mathbf{C}$ *y* $X \subseteq A$. *Si* $[X]_{\triangle \mathbf{C}_{n+1}} = A$, *entonces* $\mu(\triangle X) = \mu(A)$.

Dem. Si $|A| = 1$, el Lema 4.1 vale. Asumamos ahora que $|A| > 1$. Si $z \in \mu(A)$, entonces $B = A \setminus \{z\}$ es una subálgebra de A. Si $z \notin X$, luego $X \subseteq B$ y $[X]_{\triangle \mathbf{C}_{n+1}} \neq A$ lo cuál es una contradicción. Tenemos así que $\mu(A) \subseteq X$ de donde se sigue $\mu(A) \subseteq \mu(\triangle X)$. Recíprocamente, si $t \in \mu(\triangle X)$, entonces $S = \{x \in A : x \not< t\}$ es una subálgebra de A y $x \not< t$ para todo $x \in X$. Luego tenemos $X \subseteq S$ y entonces $A = S$. Por lo tanto, $t \in \mu(A)$ y $\mu(\triangle X) \subseteq \mu(A)$. ■

Corolario 4.1 *Si* $A \in \mathbf{C}$ *y* $[X]_{\triangle \mathbf{C}_{n+1}} = A$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\triangle X = \mu(A)$,

(ii) X *es una anticadena.*

Lema 4.2 *Si* G *es un conjunto de generadores libres de* $\mathcal{M}(n,c)$ *tal que* $|G| = c$, *entonces* $\triangle G = \mu(\mathcal{M}(n,c))$.

Dem. Si $|G| = 1$, entonces por el Corolario 4.1 tenemos que $\triangle G = \mu(\mathcal{M}(n,1))$. Asumamos ahora que $|G| > 1$ y sean $g, g' \in G$ tales que $g \neq g'$. Si $g < g'$ podemos considerar la aplicación $f : G \longrightarrow C_{n+1}$ definida por $f(t) = 1$ si $t = g$ y $f(t) = 0$ en otro caso. Por lo tanto, existe $h \in Hom(\mathcal{M}(n,c), C_{n+1})$ que extiende a f. Entonces vale $h(g) = 1$ y $h(g') = 0$, lo cuál es una contradicción pues h is isótona. Si $g' < g$ la demostración es similar. Luego g and g' son incomparables y por el Corolario 4.1 tenemos que $\triangle G = \mu(\mathcal{M}(n,c))$. ■

Como consecuencia directa del Lema 4.2 tenemos

Lema 4.3 $\mathcal{M}(n,c) = \bigcup_{g \in G} [\triangle g, 1]$, *donde* $[a,b] = \{x \in A : a \leq x \leq b]\}$

Lema 4.4 $\mathcal{M}(n,m)$ *es finita.*

Dem. Teniendo en cuenta el Teorema 2.1, el Corolario 2.1, (T1), (T9) y la Proposición 2.1, para terminar la demostración de que $\mathcal{M}(n,m)$ es finita, resta probar que $\mathcal{M}(n,m)$ tiene un número finito de sistemas deductivos maximales, y esto es fácil de verificar. ■

Determinación de $|\mathcal{M}(n,m)|$

En lo que sigue m es un entero, $m \geq 1$ y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{M}(n,m)$. Por el Lema 4.3 podemos escribir

$$|\mathcal{M}(n,m)| = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{k+1}a_k. \tag{1}$$

donde

$$a_k = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq m} |\bigcap_{t=1}^{k}[\triangle g_{i_t}, 1]|. \tag{2}$$

Por la simetría del problema es suficiente computar $|\bigcap_{i=1}^{k}[g_i, 1]|$.

Sea $G_k = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$, $G_{m-k} = G \setminus G_k$ y $g_k^* = \bigvee_{i=1}^{k} g_i$. Entonces, es fácil ver que se verifica $N_k = \bigcap_{i=1}^{k}[g_i, 1] = [\triangle g_k^*, 1]$. Luego,

$$|\mathcal{M}(n,m)| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}|N_k|. \tag{3}$$

Como N_k es una C_{n+1}^0−subálgebra finita de $\mathcal{M}(n,m)$ con primer elemento $\triangle g_k^*$, por (T7) tenemos

$$N_k = \prod_{D\in\mathcal{M}(N_k)} N_k/D. \tag{4}$$

Por otra parte es fácil ver que para cada i tal que $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq k \leq m$, el conjunto $M_{i+1}(N_k) = \{D \in \mathcal{M}(N_k) : N_k/D \simeq C_{i+1}\}$ no es vacío. Entonces poniendo

$$\beta_{i+1,k}^n = |M_{i+1}(B_k)|, \tag{5}$$

por (4) y (5) tenemos

$$|N_k| = \prod_{i=1}^{n}(i+1)^{\beta_{i+1,k}^n}. \tag{6}$$

De (3) y (6)

$$|\mathcal{M}(n,m)| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}\prod_{i=1}^{n}(i+1)^{\beta_{i+1,k}^n}. \tag{7}$$

Además, se puede probar que $M_{i+1}(N_k)$ es el conjunto de los sistemas deductivos maximales M de $\mathcal{M}(n,m)$ que satisfacen:

(i) $N_k \not\subseteq M$,

(ii) Si $D = M \cap N_k$ entonces $N_k/D \simeq C_{i+1}^{\triangle}$.

Sea $H_{i+1,k}^n$ el conjunto de los $\triangle C_{n+1}$−homomorfismos h de $\mathcal{M}(n,m)$ en C_{i+1} tales que:

(MH0) $M = Ker(h)$,

(MH1) $N_k \not\subseteq Ker(h)$,

(MH2) $h(N_k) = C_{i+1}$.

Entonces, teniendo en cuenta (T8), se puede verificar que:

$$\beta^n_{i+1,k} = |M_{i+1}(B_k)| = |H^n_{i+1,k}| \tag{8}$$

Considerando los conjuntos

$$F^n_{i+1,k} = \{f \in C^G_{i+1} : f(G_k) \subseteq C_{i+1} \setminus \{1\}\},$$

$$T^n_{j+1,k} = \{f \in F^n_{i+1,k} : [f(G))] = C_{j+1} \lhd C_{i+1}\},$$

podemos escribir

$$\beta^n_{i+1,k} = |T^n_{i+1,k}|, \tag{9}$$

$$|F^n_{i+1,k}| = i^k \cdot (i+1)^{m-k}, \tag{10}$$

$$F^n_{i+1,k} = \bigcup_{j/i} T^n_{j+1,k}. \tag{11}$$

Como (11) es una unión disjunta, tomando cardinales, por (9) y (10) finalmente resulta:

$$\beta^n_{i+1,k} = i^k \cdot (i+1)^{m-k} - \sum_{j/i\, j\neq i} \beta^n_{j+1,k}. \tag{12}$$

La ecuación (12) permite calcular los números $\beta^n_{i+1,k}$ en forma recursiva.

Ejemplos 4.1 Ahora, aplicaremos los resultados para algunos valores de n. De (12) resulta:

(E1) $n = 1$:

$$\beta^1_{1+1,k} = 1^k \cdot 2^{m-k} - 0 = 2^{m-k},$$

$$|\mathcal{M}(2,m)| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \cdot \binom{m}{k} \cdot 2^{2^{m-k}}. \tag{13}$$

La fórmula (13) ha sido obtenida por A. Monteiro y L. Iturrioz en [8].

(E2) $n = 2$:

$$\beta^2_{1+1,k} = 2^k \cdot 3^{m-k} - \sum_{j/2,\, j\neq 2} \beta^2_{j+1,k} = 2^k \cdot 3^{m-k} - 2^{m-k},$$

$$|\mathcal{M}(2,m)| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \cdot \binom{m}{k} \cdot 2^{2^{m-k}} \cdot 3^{2^k \cdot 3^{m-k} - 2^{m-k}}. \tag{14}$$

La fórmula (14) fue obtenida para el caso de las $\triangle C_3$−álgebras. en [3].

(E3) $n = 3$:

$$\beta^3_{1+1,k} = 3^k \cdot 4^{m-k} - \sum_{j/3,\ j\neq 3} \beta^3_{j+1,k} = 3^k \cdot 4^{m-k} - 2^{m-k},$$

$$|\mathcal{M}(3,m)| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \cdot \binom{m}{k} \cdot 2^{2^{m-k}} \cdot 4^{3^k \cdot 4^{m-k} - 2^{m-k}}.$$

Referencias

[1] C. C. Chang, *Algebraic analysis of many valued logics*, Trans. Amer. Math. Soc., 88(1958), 467–490.

[2] A. V. Figallo, *Las álgebras de* $I_3 - \triangle$, Revista de la Unión Mat. Argentina, 30, 1(1981), 56.

[3] A. V. Figallo, $\triangle I_3-$*Algebras*, Rep. on Math. Logic, 24(1990), 3 –16.

[4] A. V. Figallo, $I_{n+1}-$*álgebras con operaciones adicionales*, Doctoral Thesis, Univ. Nac. del Sur, 1989, Bahía Blanca, Argentina.

[5] J. M. Font, A. Rodriguez and A. Torrens, *Wajsberg algebras*, Stochastica, 8, 1(1984), 5–31.

[6] R. Grigolia, *Algebraic analysis of Lukasiewicz - Tarski* $n-$*valued systems*, in R. Wojcicki and G. Malinowski (Eds.).

[7] K. Iseki and S. Tanaka, *An introduction to the theory of* BCK*-algebra*, Mat. Japonica, 23(1978), 1–26.

[8] L. Iturrioz and A. Monteiro, *Cálculo Proposicional implicativo clásico con n variables proposicionales*, Rev. de la Unión Mat. Argentina, 22(1966), 146.

[9] Y. Komori, *The separation theorem of the* $\aleph_0-$*valued Lukasiewicz propositional logic*, Reports of the Faculty of Sciences, Shizuoka University, 12(1978), 1–5.

[10] A. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting Simetriques*, Portugaliae Math., 39, 1–4(1980), 1–237.

[11] A. J. Rodriguez Salas, *Un estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Lukasiewicz*, Doctoral Thesis, Univ. de Barcelona (1980).

[12] S. Tanaka, *On* $\wedge$*-commutative algebras*, Math. Seminar Notes, 3(1975), 59–64.

[13] T. Traczyk, *On the variety of bounded commutative* BCK*-algebras*, Math. Japonica, 24, 3(1979), 283–292.

[14] H. Yutani, *Quasi-commutative* BCK*-algebras and conguence relations*, Math. Seminar Notes, 5(1977), 469–480.

Aldo V. Figallo. Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 8000 Bahía Blanca, Argentina.

Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de San Juan, 5400 San Juan, Argentina.

e-mail: mafiga@criba.edu.ar