POSTERS

TILINGS ASSOCIATED WITH NUMBER SYSTEMS AND THE GEOMETRY OF SETS DERIVED FROM THE BASES –n+i

Agnes I. Benedek and Rafael Panzone

INMABB, Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina

rpanzone@infovia.com.ar

ABSTRACT. The number system with base $b=-n+i$, $n \in \{1,2,\ldots\}$, and set of ciphers (digits) $D=\{0,1,\ldots,n^2\}$ gives rise to a tiling of the plane in which each tile touches exactly six different tiles whenever $n \neq 2$. Instead, if $n=2$, each tile touches ten different tiles but it is in contact with four of them in only a finite set of points. The cardinalities of these sets are given. The tiles are con-gruent and if $F(n)$ denotes the central one then it holds that $1 < s = \dim_H(\partial F(n)) = \log\lambda/\log|b| < 2$ where λ is the spectral radius of a nonnegative matrix associated with the number system.

Results on a sufficiently general family of tilings that includes those mentioned above and where the preceding equalities and inequalities hold are proved. Precisely, we show among other results that if E denotes the boundary of the central tile F of a plane tessellation derived from a number system of base b then:

a) the box dimension of $E := \partial F$ exists,

b) $s=\dim_H E = \dim_B E$,

c) $H^s(E) > 0$,

d) $1 \le s < 2$,

e) $s = \dfrac{\log\lambda}{\log|b|}$ where λ is the spectral radius of a nonnegative matrix Q associated with the number system,

f) λ is an eigenvalue of Q that may have a geometric dimension greater than one,

g) if 1 is in the spectrum of Q then in certain situations F and a neighboring tile have only a finite contact whose cardinality can be evaluated.

Path Integral Quantization of a Riemannian Manifold

Walter Reartes

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina

reartes@mail.uns.edu.ar

In this work a path integral quantization for a compact Riemannian manifold is developed. The method starts with the classical Lagrangian and then, what may be called an infinitesimal geometrization of path integral quantization, is constructed. Specifically, the relationship between the infinitesimal propagator and the quantum mechanical evolution equation obtained from it is studied.

An old question about the quantization on a Riemannian manifold remains: does the curvature induces a potential term in the Hamiltonian at the quantum level?, and, what is the expresion of this potential?

A partial answer to the question is obtained from the results in this work. The curvature-induced potential term in the quantum Hamiltonian has the form $(\alpha/3)R$ where R is the scalar curvature and α a real number which depends on the nature of the propagated object: 0 for functions, 1 for volumes and α for α-densities, a generalization of $1/2$-densities. However it must be noted that if the definition of the Laplace operator is extended to include α-densities then the factor is absorbed in its definition.

This results coincide with the corresponding for the quantization of the metric Hamiltonian of a Riemannian manifold in *geometric quantization.*

DISEÑO DE SISTEMAS DINÁMICOS ALGEBRAICOS CON BASES DE GROEBNER

G. CALANDRINI[†‡], E. PAOLINI y J. MOIOLA[*†]

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR, Departamento de Ingeniería Eléctrica
Avda. Alem 1253 (8000) Bahía Blanca - Argentina
‡ Departamento de Matemática, Univ. Nac. del Sur
**Mathematical Institute, University of Cologne, 50931 Cologne, Germmy*
† CONICET

Una representación clásica de sistemas dinámicos autónomos es a través de la descripción en el espacio de variables de estados: un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden con n variables de estado $x_1, \ldots, x_n$, en el cual las primeras derivadas de cada variable se explicitan en función de las variables de estado. Desde un punto de vista algebraico, los sistemas dinámicos se pueden estudiar como relaciones algebraicas entre las variables de estado y sus primeras derivadas. Entonces, una descripción algebraica de un sistema dinámico podría consistir en el conjunto de todos los polinomios en el anillo $k[x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n]$ que se anulan, cuando las variables toman los valores de una trayectoria del sistema en estudio (el cuerpo k puede ser $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Q}$ o bien funciones racionales de parámetros del sistema).

Esta descripción algebraica está directamente conectada con los conceptos algebraicos de *ideales y variedades*, y permite trabajar con técnicas algebraicas como, por ejemplo, las bases de Groebner. Estas bases constituyen un tipo especial de conjuntos generadores de ideales polinómicos y una de sus propiedades es la eliminación de variables en sistemas de ecuaciones polinómicas. A partir de un conjunto finito de polinomios generadores, el algoritmo ideado por Buchberger permite calcular una base de Groebner para cualquier ideal.

En este trabajo se propone el diseño o síntesis de un sistema dinámico, es decir encontrar un conjunto de relaciones entre las variables y sus derivadas temporales que cumplan ciertas especificaciones de diseño. Se asume que estas relaciones son algebraicas, y tienen la forma de polinomios en las distintas variables y sus derivadas de primer orden.

La especificación de diseño es la ecuación paramétrica $x_d(t)$ de una trayectoria en $\boldsymbol{R}^n$, y el propósito es encontrar un sistema dinámico en el cual una de sus soluciones sea la trayectoria propuesta. Además se requiere que la *órbita*, el lugar geométrico γ o imagen de $x_d(t)$ en el espacio de estados, sea *asintóticamente estable*, es decir que toda solucion permanezca en un entorno de γ, arbitrariamente pequeño, siempre que la condición inicial esté dentro de cierto entorno, y que la distancia entre la solución y el conjunto γ tienda a cero cuando t tiende a infinito. Para analizar la estabilidad de la órbita se utiliza la teoría de Lyapunov, y en particular el Teorema de LaSalle, construyendo una función semidefinida positiva que se anula sobre la órbita.

El metodo se ejemplifica con la síntesis de un sistema que tiene como órbita deseada un toro en $\boldsymbol{R}^3$.

REFERENCIAS

Alwash, M. A, M., "Periodic solutions of a quartic differential equation and Groebner bases," *J. Comput. Appl. Math.*, **75**, (1), 67-76, (1996).

Buchberger, B., "Ein algorithmisches Kriterium für die Losbarkeit eines algebraischen Gleichungsystems," *Aequationes Mathematicae*, **4**,374-383, (1970).

Buchberger, B. Introduction to Groebner bases. Logic of computation, Marktoberdorf, 35-66, (1995)

Cox, D., J. Little, y D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geomety and Commutative Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, (1992).

Fliess, M. "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics," *Trans. Aut. Control*, **35**, 9, 994-1001, (1990).

Fortell, H. "Algebraic approach to normal forms and zero dynamics, " *Technical Report, Department of Electrical Engineering*. Linköping University. Linköping, Sweden, (1995).

Forsman, K. "Elementary aspects of constructive commutative Algebra," PhD. thesis, *Department of Electrical Engineering*. Linköping University. Linköping, Sweden, (1995).

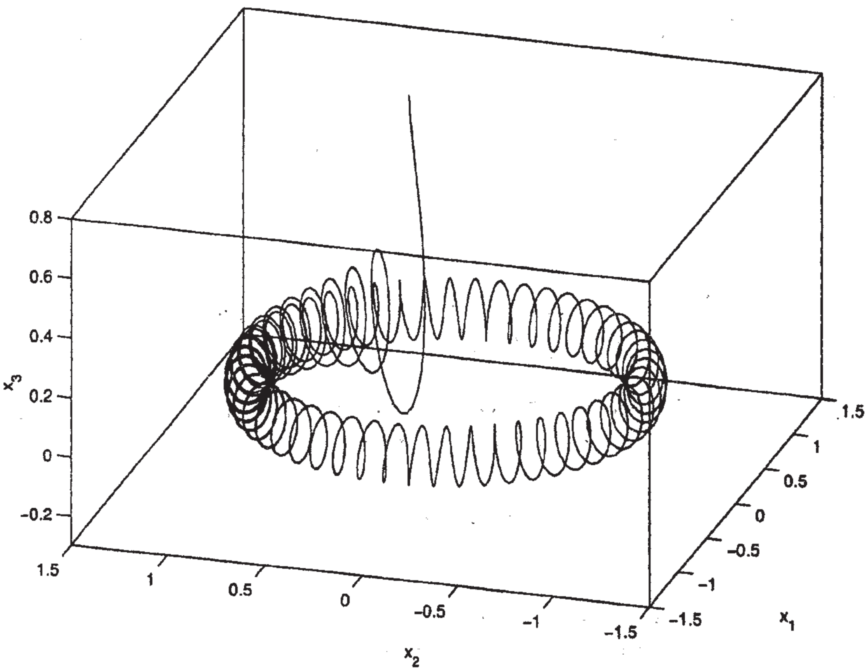
Glad S. T. y L. Ljung. "Model structure identifiability and persistence of excitation," *Proc. 29th CDC-IEEE*, **6**, 3236-3240, Honolulu, Hawaii, (1990).

Glad, S. T. "Differential algebraic modelling of nonlinear systems," En: *Realization and Modelling in Systems Theory*. Proc. of the International Symposium MTNS-89. Editores: M. A. Kaashoek, J.H. van Schuppen and A.C.M. Ran, 1,97-105. Birkhauser, (1990).

Jirstrand, M. "Algebraic methods for modeling and design in control," *PhD. thesis, Department of Electrical Engineering*. Linköping University. Linköping, Sweden, (1996).

Khalil, H.K., *Nodinear Systems*, 2da. Edición, Prentice Hall, (1996).

Kreuzer, M., y L. Robbiano, *Computational Commutative Algebra 1*, Springer, (2000).



LA BELLEZA DEL INFINITO

Egüez, Rina E. — Ibañez, María I. — Funes, Héctor N.
Facultad de Ciencias Naturales — C.I.U.N.Sa.
Universidad Nacional de Salta, Bs. As. 177. Salta (4400). R. Argentina.

Como extensión al medio de un proyecto de investigación sobre fractales, se dictó un curso de capacitación para docentes de E.G.B. 3. Una de las actividades propuestas era demostrar que el perímetro del Copo de nieve de Koch es infinito y que el área encerrada por el mismo es finita y estácontenida dentro de un cuadrado de lado $2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. Este resultado sorprendente motivó al grupo de trabajo a profundizar en el infinito matemático.

En una de las bellas paradojas de Zenón, la de *Aquiles y la tortuga*, en la que Aquiles y la tortuga hacen una carrera y siendo la velocidad de Aquiles superior a la de la tortuga, ésta nunca es alcanzada, se puede visualizar lo infinitamente pequeño.
Borges matematiza en su famoso cuento *El Aleph* cuando dice acerca de la primera letra del alfabeto hebreo: "Para la Mengenlehre es el símbolo de los números transfinitos en los que el todo no es mayor que alguna de las partes". A partir de la paradoja de Galileo y más de dos siglos después, Georg Cantor crea su Teoría de Conjuntos alrededor del infinito matemático. El conjunto de los números naturales y el conjuntos de los números reales son los poseedores de los cardinales transfinitos más importantes, llamados respectivamente *Aleph- cero* y la *potencia del continuo*. Estos números infinitos de diferente magnitud son una imagen de lo infinitamente grande.
Un fractal es el resultado de la iteración infinita de un proceso geométrico bien definido e intuitivamente es aquel en el que el todo está contenido en las partes, a diferente escala. Y es un conjunto fractal, llamado Conjunto de Cantor, el que guarda en sus entrañas la belleza de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño.

SISTEMAS LAGRANGIANOS NO HOLONÓMICOS

EL SNAKEBOARD

Sebastián Pueblas.

Departamento de Física. Universidad Nacional del Sur.
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina

El estudio sistemático de sistemas Lagrangianos tiene amplio interés, tanto teórico como aplicado. Hernán Cendra, Jerrold Marsden y Tudor Ratiu publicaron, en Abril del ano 2000, un trabajo, Geometric Mechanics, Lagrangian Reduction, and Nonholonomic Systems (CMR), en el que realizan una formulacion intrínseca de la teoría de reducción para sistemas Lagrangianos no holonómicos. En ese trabajo se plantean, como un ejemplo de aplicación del formalismo desarrollado, las. ecuaciones concernientes a un artefacto denominado "snakeboard", las que presentan, en principio, dificultad para su resolución.

El snakeboard es una versión modifícada del skateboard, en la cual los dos pares de ruedas pueden girar independientemente sobre un eje perpendicular a la tabla, incorporando además un rotor en el centro que podría modelar un cierto control sobre el aparato. La tabla es modelada como un cuerpo rígido y las ruedas se encuentran en los extremos de la misma. Las variables que determinan la configuración del sistema se muestran en la figura 1.

El objetivo de este trabajo es obtener información acerca de la evolución del sistema resolviendo el sistema de ecuaciones para ciertas condiciones iniciales particulares, dando especial importancia a las soluciones para las cuales los dos pares de ruedas rotan a velocidad angular constante. Además, se hará un breve estudio del caso en el que los pares de ruedas rotan con la misma velocidad.

Hay varios aspectos que motivan este trabajo. En primer lugar, el conocimiento del snakeboard tiene interés tecnológico, en particular, en el área de control. Hay distintas aplicaciones prácticas similares o derivadas del snakeboard para cuya implementación resultan útiles las soluciones analíticas. Por otro lado, en la resolución de las ecuaciones diferenciales que aparecen en este problema se utilizan técnicas que podrían eventualmente ser aplicadas a otros problemas de la física y la ingeniería.