ACTAS DEL VIII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO
(2005), Páginas 87–98

LA ECUACIÓN CUÁNTICA DE YANG-BAXTER EN EL CONTEXTO DE CARCAJ

NICOLÁS ANDRUSKIEWITSCH

Éste es el texto de la conferencia dictada en el VIII Congreso Monteiro el 27 de mayo de 2005. Se discute la ecuación de trenzas, también llamada ecuación cuántica de Yang-Baxter, en diversos contextos, para luego mostrar recientes resultados del autor y colaboradores acerca de soluciones de esta ecuación en el contexto de carcaj.

Agradezco al comité organizador por la cordial invitación.

1. El grupo de trenzas

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos el grupo simétrico en n letras $\mathbb{S}_n$. Sea $s_i = (i, i+1)$. Entonces $\mathbb{S}_n$ está generado por $s_1, \dots, s_{n-1}$ con relaciones

$$\begin{aligned} s_i^2 &= e, \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j &= s_j s_i, \quad |i-j| > 1. \end{aligned}$$

En 1925, Artin introdujo el *grupo de trenzas* $\mathbb{B}_n$. Se puede definir como el grupo generado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ con relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Hay importantes definiciones alternativas en topología. Es evidente que existe un epimorfismo de grupos $\mathbb{B}_n \to \mathbb{S}_n$.

El grupo de trenzas tiene interesantes propiedades; por ejemplo, el siguiente resultado es de fines de la década de 1950.

Teorema. *El grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ es* residualmente finito. *Esto es, dado $x \in \mathbb{B}_n$, $x \neq e$, existe un morfismo de grupos $\pi : \mathbb{B}_n \to F$, donde F es finito, tal que $\pi(x) \neq e$.*

Sin embargo la descripción explícita de los cocientes de $\mathbb{B}_n$ aún no está completa.

Sólo recientemente se pudo demostrar que el grupo de trenzas admite una representación lineal fiel.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 17B37; 81R50.
Financiado por CONICET, Fundación Antorchas, TWAS (Trieste), Agencia Córdoba Ciencia, Foncyt-ANPCyT y Secyt (UNC).

Teorema. [B, K]. *El grupo de trenzas* $\mathbb{B}_n$ *es lineal.*

2. La ecuación de trenzas

Sea V un espacio vectorial complejo. Un isomorfismo lineal $c : V \otimes V \to V \otimes V$ se dice una solución de la *ecuación de trenzas* si

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c). \tag{1}$$

En tal caso, el par (V, c) se dice un "espacio vectorial trenzado". Algunos autores llaman a (1) la *ecuación cuántica de Yang-Baxter* (QYBE, por sus siglas en inglés).

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Entonces

$$\sigma_i \mapsto \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes c \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes n-i-1}}$$

define un morfismo de grupos $\mathbb{B}_n \to GL(V^{\otimes n})$. Estas representaciones de los grupos de trenzas son importantes en varias áreas de la matemática y la física teórica.

La clasificación de las soluciones de la ecuación de trenzas se conoce sólo en $\dim V = 2$.

<u>Método de Drinfeld para construir soluciones de QYBE.</u>

En su famoso reporte en el ICM de 1986 [D1], Drinfeld propuso un método para construir soluciones de la ecuación de trenzas.

Definición. (Drinfeld). Un *álgebra de Hopf cuasitriangular* es un par (H, R) donde H es un álgebra de Hopf y $R \in H \otimes H$ es inversible tal que

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23}, \tag{2}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}, \tag{3}$$

$$\tau(\Delta(x)) = R\Delta(x)R^{-1}, \tag{4}$$

$x \in H$. Aquí, τ es la transposición usual, $R_{12} = R \otimes \mathrm{id}$, $R_{23} = \mathrm{id} \otimes R$, $R_{23} = \tau_{23}R_{12}$.

Si (H, R) es un álgebra de Hopf cuasitriangular entonces R satisface

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{5}$$

Propiamente, (5) es la ecuación cuántica de Yang-Baxter; R suele llamarse una R-matriz universal. La relación con la ecuación de trenzas es la siguiente. Si V es un H-módulo, se define $c : V \otimes V \to V \otimes V$ por la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \otimes V \arrow[rr, "\tau"] & & V \otimes V \\ & V \otimes V \arrow[ul, "R"] \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces c es solución de la ecuación de trenzas, gracias a (5).

<u>Construcción de álgebras de Hopf cuasitriangulares.</u>

Necesitamos entonces encontrar álgebras de Hopf cuasitriangulares. Una manera universal fue propuesta, nuevamente, por Drinfeld.

Dada H un álgebra de Hopf, que supondremos de dimensión finita para evitar complicaciones técnicas, se le asocia un álgebra de Hopf cuasitriangular, llamada el *doble de Drinfeld* de H, de la siguiente manera: como espacio vectorial,

$$D(H) = H^* \otimes H;$$

aquí, se considera un producto "torcido" por un cociclo conveniente y el coproducto (esencialmente) tensorial. Existe $\mathscr{R} \in D(H) \otimes D(H)$ "canónica" tal que $(D(H), \mathscr{R})$ es cuasitriangular. Además, si (H,R) es cuasitriangular, se tiene un epimorfismo $(D(H), \mathscr{R}) \to (H,R)$. Para más detalles ver [Mj].

En resumen, dada cualquier álgebra de Hopf de dimensión finita, las representaciones de su doble de Drinfeld dan lugar a soluciones de la ecuación de trenzas (1).

Cabe preguntarse: ¿Toda solución de la ecuación de trenzas (1) aparece así? La respuesta es afirmativa si nos restringimos a soluciones no degeneradas, omitimos el requerimiento de finitud de la dimensión, y consideramos comódulos en lugar de módulos (representaciones). Es decir, se asocia un álgebra de Hopf (co)cuasitriangular "universal" a una solución de la ecuación de trenzas. La construcción se realiza en dos pasos. En el primer paso, se le asocia una biálgebra (co)cuasitriangular, llamada la *biálgebra FRT*, ver [FRT] o el libro [Mj] para más detalles. El pasaje de esta biálgebra a un álgebra de Hopf es más delicado y en total generalidad, se debe a Hayashi [H1].

3. La ecuación de trenzas en el contexto de conjuntos

Sea X un conjunto no vacío. Una biyección $c : X \times X \to X \times X$ se dice una solución de la *ecuación de trenzas en el contexto de conjuntos* (o QYBE conjuntista) si

$$(c \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times c)(c \times \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \times c)(c \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times c). \tag{6}$$

En tal caso, el par (X,c) se dice un "conjunto trenzado".

Si $c^2 = \mathrm{id}$, c se dice una *simetría*.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Entonces

$$\sigma_i \mapsto \mathrm{id}_{X^{i-1}} \times c \times \mathrm{id}_{X^{n-i-1}}$$

define un morfismo de grupos $\mathbb{B}_n \to \mathrm{Aut}(X^n)$.

Sea (X,c) un conjunto trenzado. Sea $V = \mathbb{C}X$ — el espacio vectorial de base X. Entonces la extensión de c a un isomorfismo de $V \otimes V$ es una solución de QYBE (1).

Motivado en parte por esta observación, Drinfeld propuso en [D2] el siguiente problema.

Problema. *Estudiar la QYBE conjuntista.*

Se introduce la siguiente notación: si $c : X \times X \to X \times X$ es una función biyectiva, $\rightharpoonup, \leftharpoonup: X \times X \to X$ son las funciones dadas por

$$c(x,y) = (x \rightharpoonup y, x \leftharpoonup y),$$

$x,y \in X$. Se dice que c es *no degenerada* si $x \rightharpoonup \_\_, \_\_ \leftharpoonup y : X \to X$ son biyectivas.

El siguiente resultado fue obtenido por Etingof, Schedler y Soloviev en 1999, en el caso de simetrías; y por Lu, Yan y Zhu en 2000, en el caso de trenzas generales.

Teorema. [ESS, LYZ1]; ver también [T2].

(a). G grupo, $\rightharpoonup, \leftharpoonup: G \times G \to G$ *acciones tales que* $\forall x,y \in G$

$$\begin{aligned} x \rightharpoonup fg &= (x \rightharpoonup f)((x \leftharpoonup f) \rightharpoonup g), \\ xy \leftharpoonup g &= (x \leftharpoonup (y \rightharpoonup g))(y \leftharpoonup g), \\ xy &= (x \rightharpoonup y)(x \leftharpoonup y). \end{aligned}$$

Entonces c es solución de QYBE conjuntista.

(b). Hay una correspondencia biyectiva entre

- grupos trenzados $(G, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$.
- triples (G, N, π), donde G y N son grupos y $\pi : G \to N$ es un 1-cociclo biyectivo.

En tal caso $(G, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ se dice un *grupo trenzado* (Takeuchi).

Posteriormente, Soloviev dio una caracterización de las soluciones conjuntistas no degeneradas de QYBE en términos de representaciones de grupos trenzados (ver [S]). Las soluciones conjuntistas no degeneradas de QYBE indescomponibles con un número primo de elementos fueron clasificadas en [EGS]; la prueba usa la clasificación de los grupos finitos simples.

4. La ecuación de trenzas en el contexto de carcaj

Recordemos que un carcaj (como el nombre lo indica) es un conjunto de flechas. Formalmente, un carcaj es una colección de conjuntos y funciones $(\mathscr{A}, \mathscr{P}, \mathfrak{p}, \mathfrak{f} : \mathscr{A} \to \mathscr{P})$; $\mathfrak{p}$ se dice el origen y $\mathfrak{f}$ el fin. Los elementos de $\mathscr{A}$ se llaman flechas y los de $\mathscr{P}$, puntos. Dados puntos P, Q, denotamos $\mathscr{A}(P,Q)$ al conjunto de flechas $P \to Q$, esto es flechas α tales que $\mathfrak{p}(a) = P$, $\mathfrak{f}(a) = Q$. Los morfismos de carcaj se definen de forma evidente; son mapas entre las flechas y entre los conjuntos, que preservan origen y fin.

Denotamos por $\mathrm{Quiv}(\mathscr{P})$ a la categoría de carcaj con base fija $\mathscr{P}$; un morfismo en $\mathrm{Quiv}(\mathscr{P})$ es la identidad en $\mathscr{P}$.

$\mathrm{Quiv}(\mathscr{P})$ es una categoría monoidal: dados $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{Quiv}(\mathscr{P})$ se define su producto tensorial $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ como el producto fibrado $\mathscr{A}\, {}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{B}$, esto es

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} := \mathscr{A}\, {}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{B} = \{(a,b) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B} : \mathfrak{f}(a) = \mathfrak{p}(b)\};$$

es un carcaj sobre $\mathscr{P}$ con $\mathfrak{p}(a,b) = \mathfrak{p}(a)$, $\mathfrak{f}(a,b) = \mathfrak{f}(b)$. El objeto identidad para este producto tensorial es $\mathbf{1} = (\mathscr{P}, \mathscr{P}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$.

Problema. *Estudiar la QYBE en el contexto de carcaj.*

Esto es, dado $\mathscr{A}$ carcaj sobre $\mathscr{P}$, un morfismo biyectivo de carcaj $c: \mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A} \to \mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A}$ se dice una solución de la *ecuación de trenzas en el contexto de carcaj* (o QYBE en carcaj) si

$$(c\times \mathrm{id})(\mathrm{id}\times c)(c\times \mathrm{id}) = (\mathrm{id}\times c)(c\times \mathrm{id})(\mathrm{id}\times c): \mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A} \to \mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A}. \quad (7)$$

En tal caso, $(\mathscr{A}, c)$ se dice un carcaj trenzado.

La idea es seguir la estrategia de [ESS, LYZ1] con“grupoides” en lugar de “grupos”. Antes de desarrollar esta idea, discutimos la motivación que nos lleva a considerar este problema.

Supongamos que $\mathscr{P}$ es finito y sea $R = \mathbb{C}^{\mathscr{P}}$; es un álgebra conmutativa semisimple de dimensión finita — y toda álgebra conmutativa semisimple de dimensión finita es isomorfa a un $\mathbb{C}^{\mathscr{P}}$. Considerando el espacio vectorial engendrado por un carcaj, se obtiene un functor monoidal

$$(\mathrm{Quiv}(\mathscr{P}), {}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\text{linealización}} (\mathrm{Bimod}\, R, \otimes_R)\cdot$$

En particular, si$(\mathscr{A}, c)$ es un carcaj trenzado, se obtiene una solución de QYBE en la categoría de bimódulos. A su vez las categorías de bimódulos son importantes por la siguiente razón.

Se conoce en la literatura como *categoría de fusión* a una categoría tensorial semisimple con ciertas condiciones de finitud, ver por ejemplo [ENO]. Estas categorías son de importancia en varias áreas de matemática y física teórica.

El siguiente importante resultado fue probado por Hayashi [H2]; de hecho, él prueba que R se puede elegir conmutativa. Posteriormente, Ostrik lo extendió precisando qué tipo de álgebras semisimples R pueden aparecer [O].

Teorema. *Dada una categoría de fusión $\mathscr{C}$, existe un álgebra semisimple de dimensión finita R y un funtor de fibra $\mathscr{C} \to \mathrm{Bimod}\, R$.*

En palabras llanas, toda categoría de fusión se “representa” en una categoría de bimódulos sobre un álgebra separable. El estudio de las categorías de fusión trenzadas requiere el estudio de las soluciones de QYBE en la categoría de bimódulos; el estudio de los carcaj trenzados es relevante a estos efectos.

5. Grupoides

Recordemos que un grupoide se puede definir como una categoría cuyos morfismos son todos inversibles. Intuitivamente, podemos pensar que un grupoide es un “objeto grupo en la categoría de carcaj”. A los efectos de esta exposición, podemos definir formalmente un grupoide como un carcaj $(\mathscr{G}, \mathscr{P}, \mathfrak{p}, \mathfrak{f} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{P})$, munido de morfismos de grupoides:

$$m : \mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{G} \qquad \text{(producto parcialmente definido)}$$

$$\iota : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{G}, \quad P \mapsto \iota(P) = \mathrm{id}_P, \quad P \in \mathscr{P}, \qquad \text{(identidad)}$$

$$\mathscr{S} : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{G}^{\mathrm{op}}, \quad a \mapsto \mathscr{S}(a) = a^{-1}, \quad a \in \mathscr{A}, \qquad \text{(inversión)}$$

donde $\mathscr{G}^{\mathrm{op}}$ es el carcaj opuesto a $\mathscr{G}$ (o sea el que invierte principio y fin $\mathfrak{f} \leftrightarrow \mathfrak{p}$). Estos datos están sujetos a los siguientes axiomas:

- m es asociativa, vale decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G} \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & \mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G} \arrow[d, "m"] \\
\mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G} \arrow[r, "m"] & \mathscr{G}.
\end{tikzcd}$$

- ι es el neutro de m, vale decir los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G} \arrow[d, "m"] \\
\mathscr{G} \arrow[u, "\mathfrak{p}\times\mathrm{id}"] \arrow[r, equal] & \mathscr{G},
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{P} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G} \arrow[d, "m"] \\
\mathscr{G} \arrow[u, "\mathrm{id}\times\mathfrak{f}"] \arrow[r, equal] & \mathscr{G}.
\end{tikzcd}$$

- $\mathscr{S}$ es la inversa de m, vale decir los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G} \arrow[r, "\mathrm{id}\times\mathscr{S}"] \arrow[d, "\mathfrak{p}"'] & \mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G}^{\mathrm{op}} \arrow[d, "m"] \\
\mathscr{P} \arrow[r, "\iota"] & \mathscr{G},
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{G} \arrow[r, "\mathscr{S}\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathfrak{f}"'] & \mathscr{G}^{\mathrm{op}}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{G} \arrow[d, "m"] \\
\mathscr{P} \arrow[r, "\iota"] & \mathscr{G}.
\end{tikzcd}$$

Veamos algunos ejemplos de grupoides.

- Un grupoide donde $\#\mathscr{P} = 1$ es un grupo.
- Dada una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathscr{P}$ se define un grupoide $\mathscr{R}$ por

$$\mathscr{R}(P,Q) = \begin{cases} \mathbf{1}_{P,Q}, & P \sim Q, \\ \emptyset, & P \not\sim Q. \end{cases}$$

Es decir, $\mathscr{R}(P,Q)$ tiene exactamente un elemento si $P \sim Q$ y ninguno en caso contrario. Es fácil ver que $\mathscr{R}$ es un grupoide.

- Es un resultado clásico que todo grupoide se describe por medio de grupos y relaciones de equivalencia. Ver por ejemplo [AN1].

Acciones de grupoides. Los grupoides no actúan sobre conjuntos sino sobre "fibrados" con base $\mathscr{P}$.

Sean $\mathcal{G}$ grupoide sobre $\mathcal{P}$ y $p : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ una función. Una *acción a izquierda* de $\mathcal{G}$ en p es una aplicación $\triangleright : \mathcal{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_p \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que

$$\begin{aligned} p(g \triangleright e) &= \mathfrak{p}(g), \\ g \triangleright (h \triangleright e) &= gh \triangleright e, \\ \mathrm{id}\ p(e) \triangleright e &= e, \end{aligned}$$

$\forall g, h \in \mathcal{G}$, $e \in \mathcal{E}$ componibles. Morfismos de acciones y acciones a derecha se definen de manera evidente.

6. Sistemas de grupoides apareados

El concepto de sistema de grupoides apareados fue introducido por Mackenzie en 1994 [M]; extiende una noción análoga para grupos que aparece, por ejemplo, en trabajos de Mackey, G. I. Kac, Takeuchi.

Se necesita una notación gráfica. Un grupoide es "vertical" si el origen y fin se denotan t y b ("top" y "bottom"). Análogamente, un grupoide es "horizontal" cuando el origen y fin se denotan l y r ("left" y "right"). Las flechas de un grupoide vertical se dibujan de arriba hacia abajo, y las de un grupoide horizontal de izquierda a derecha.

Sean $t, b : \mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ un grupoide vertical y $l, r : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$ un grupoide horizontal. Se dice que forman un *sistema de grupoides apareados* si están munidos de $\triangleright : \mathcal{H}\,{}_r\!\times_t \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ acción a izquierda de $\mathcal{H}$ en $t : \mathcal{V} \to \mathcal{P}$ y $\triangleleft : \mathcal{H}\,{}_r\!\times_t \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ acción a derecha de $\mathcal{V}$ en $r : \mathcal{H} \to \mathcal{P}$, tales que

$$b(x \triangleright g) = l(x \triangleleft g), \qquad x \triangleright fg = (x \triangleright f)((x \triangleleft f) \triangleright g), \qquad xy \triangleleft g = (x \triangleleft (y \triangleright g))(y \triangleleft g),$$

$\forall f, g \in \mathcal{V}$, $x, y \in \mathcal{H}$ componibles.

Proposición. *Son equivalentes:*

1. *Sistemas de grupoides apareados.*
2. *Grupoides con factorización exacta.*
3. *Grupoides dobles vacantes.*

Recordemos que una factorización exacta de un grupoide $\mathcal{D}$ es un par de subgrupoides tales que $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ (escritura única). Si $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ es un sistema de grupoides apareados, el grupoide $\mathcal{D}$ de la correspondiente factorización exacta se denota $\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$.

Ver [AN1] para una discusión de las nociones de grupoide doble (debida a Ehresmann) y grupoide doble vacante (debida a Mackenzie). Informalmente es un conjunto munido de dos estructuras compatibles de grupoide; sus elementos se describen apropiadamente como "cajas" que se componen vertical u horizontalmente.

La correspondencia entre sistemas de grupoides apareados y está dada por

$$(x, g) \mapsto \begin{array}{ccc} & x & \\ x \triangleright g & \boxed{} & g \\ & x \triangleleft g & \end{array}.$$

Es posible dar una descripción precisa de sistemas de grupoides apareados en términos de grupos, ver [AN1, AM].

7. Representaciones de sistemas de grupoides apareados

Sea $(\mathscr{V}, \mathscr{H}, \triangleright, \triangleleft)$ un sistema de grupoides apareados.

Definición. [AA]. Una *representación* de $(\mathscr{V}, \mathscr{H}, \triangleright, \triangleleft)$ es un triple $(\mathscr{A}, \triangleright, |\ |)$, donde

- $\mathscr{A}$ es un carcaj sobre $\mathscr{P}$,
- $\triangleright : \mathscr{H}\,{}_r\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ es una acción a izquierda de $\mathscr{H}$ en $\mathfrak{p}$,
- $|\ | : \mathscr{A} \to \mathscr{V}$ es un morfismo de carcaj sobre $\mathscr{P}$, tales que

$$|x \triangleright a| = x \triangleright |a|, \qquad (x,a) \in \mathscr{H}\,{}_r\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A}.$$

Existen representaciones naturales de $(\mathscr{V}, \mathscr{H}, \triangleright, \triangleleft)$; por ejemplo $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$, ver [AA].

La categoría $\operatorname{Rep}(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ de representaciones de $(\mathscr{V}, \mathscr{H}, \triangleright, \triangleleft)$ es una subcategoría monoidal de $\operatorname{Quiv}(\mathscr{P})$. Nuestro siguiente objetivo es determinar estructuras de categoría trenzada en $\operatorname{Rep}(\mathscr{V}, \mathscr{H})$.

Definición. [AA]. Un morfismo de grupoides $\kappa : \mathscr{V} \to \mathscr{H}$ se dice una *rotación* si

$$y\kappa(g) = \kappa(y \triangleright g)(y \triangleleft g)$$

$\forall g \in \mathscr{V}, y \in \mathscr{H}, t(g) = r(y)$.

Teorema. [AA]. *(a). Las estructuras de categoría trenzada en* $\operatorname{Rep}(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ *están parametrizadas por pares* (ξ, η) *de rotaciones* $\mathscr{V} \to \mathscr{H}$ *tales que*

$$\eta(g) \triangleright f = gf\big(\xi(f)^{-1} \triangleright g^{-1}\big)$$

para todos f, g *en* $\mathscr{V}$ *con* $b(g) = t(f)$.

Un par de rotaciones con esta propiedad se dice un par LYZ; en efecto, pares de morfismos con estas propiedades aparecen en [LYZ1].

(b). Si $\mathscr{A}$ *es una representación de* $(\mathscr{V}, \mathscr{H})$, *y* (ξ, η) *es un par LYZ, entonces* $\sigma_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A} \to \mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A}$ *dado por*

$$\sigma_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(a,b) = \Big(\eta(|a|) \triangleright b, \big(\xi(|b|)^{-1} \triangleleft |a|^{-1}\big) \triangleright a\Big),$$

$(a,b) \in \mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}} \mathscr{A}$, *es una solución de QYBE en el contexto de carcaj.*

En otras palabras, $(\mathscr{A}, \sigma_{\mathscr{A}})$ es un carcaj trenzado.

En síntesis, para construir ejemplos de carcaj trenzados, basta con exhibir:

- Un sistema de grupoides apareados $(\mathscr{V}, \mathscr{H}, \triangleright, \triangleleft)$;
- una representación $(\mathscr{A}, \triangleright, |\ |)$ de $(\mathscr{V}, \mathscr{H}, \triangleright, \triangleleft)$;
- un par (ξ, η) para $(\mathscr{V}, \mathscr{H}, \triangleright, \triangleleft)$.

Reiteramos, es posible describir sistemas de grupoides apareados mediante grupos y subgrupos, y existen representaciones naturales de un sistema de grupoides apareados. Sólo resta precisar una descripción explícita de pares LYZ. En lugar de ello, discutiremos la noción de grupoide trenzado, mediante la cual se obtienen *todos* los carcaj trenzados no degenerados.

Ejemplo [AA]. Dado $(\mathscr{V},\mathscr{H},\triangleright,\triangleleft)$ un sistema de grupoides apareados, existe otro sistema

$$(\mathscr{V}\boxtimes\mathscr{H}^{\mathrm{op}},\mathscr{V}\bowtie\mathscr{H},\rightharpoonup,\leftharpoonup)$$

llamado el "doble de Drinfeld" del sistema inicial, y un par LYZ $\xi,\eta:\mathscr{V}\boxtimes\mathscr{H}^{op}\to\mathscr{V}\bowtie\mathscr{H}$ dado explícitamente por

$$\xi(\gamma,x)=\left(\mathrm{id}_{\mathscr{V}}\,l(x),x^{-1}\right)$$
$$\eta(\gamma,x)=\left(\gamma,\mathrm{id}_{\mathscr{H}}\,t(\gamma)\right).$$

Así, dado cualquier sistema de grupoides apareados, las representaciones de su doble de Drinfeld dan lugar a soluciones de la ecuación de trenzas (7).

8. Grupoides trenzados

Definición. [A]. Un *grupoide trenzado* es un triple $(\mathscr{G},\triangleright,\triangleleft)$, donde $\mathscr{G}$ es grupoide de base $\mathscr{P}$,

$$\mathscr{G}\xleftarrow{\ \triangleleft\ }\mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}}\mathscr{G}\xrightarrow{\ \triangleright\ }\mathscr{G}$$

son acciones a izquierda y derecha, respectivamente, tales que $(\mathscr{G},\mathscr{G})$ es un sistema de grupoides apareados y

$$fg=(f\triangleright g)(f\triangleleft g),\qquad (f,g)\in\mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}}\mathscr{G}.$$

El adjetivo "trenzado" en la precedente definición se justifica por la siguiente observación. Sea $\sigma:\mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}}\mathscr{G}\to\mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}}\mathscr{G}$ dado por

$$\sigma(f,g)=(f\triangleright g,f\triangleleft g),\qquad (f,g)\in\mathscr{G}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}}\mathscr{G}.$$

Entonces σ es una solución no-degenerada de QYBE en carcaj.

Para enunciar el resultado principal de [A], es menester aún una definición más.

Definición. [A]. Un *par estructural* es un par $(\mathscr{G},\mathscr{A})$, donde $\mathscr{G}$ es un grupoide trenzado y $\mathscr{A}$ es una representación de $(\mathscr{G},\mathscr{G}\bowtie\mathscr{G})$ tal que

• $|\mathscr{A}|$ genera el grupoide $\mathscr{G}$,

• cierto mapa $\nabla:\mathscr{G}\to\mathrm{aut}(\mathscr{D}\mathscr{A}\,{}_{\mathfrak{f}}\!\times_{\mathfrak{p}}\mathscr{D}\mathscr{A})$ inducido por la acción a izquierda es inyectivo.

Teorema. *Existe una correspondencia biyectiva entre*

(a) *Carcaj trenzados no degenerados.*
(b) *Pares estructurales.*

Se han construido ejemplos explícitos de grupoides trenzados en [MM].

9. Álgebras de Hopf débiles cuasitriangulares

La noción de *álgebra de Hopf débil* es una versión disminuida de la noción de álgebra de Hopf; por ejemplo, el coproducto Δ preserva la multiplicación pero $\Delta(1) \neq 1 \otimes 1$. Para la definición completa y una síntesis de las propiedades básicas, ver [NV]. Informalmente, así como la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf es una categoría tensorial "contenida" en la categoría de espacios vectoriales, la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf débil H es una categoría tensorial "contenida" en la categoría de bimódulos sobre un álgebra separable asociada intrínsecamente a H. Es decir,

$$\text{Álgebra de Hopf } H \leftrightsquigarrow (\text{categoría tensorial } \mathscr{C}, \text{ funtor de fibra } \mathscr{C} \to \operatorname{Vec}\mathbb{C}),$$

$$\text{Álgebra de Hopf débil } H \leftrightsquigarrow (\text{categoría tensorial } \mathscr{C}, \text{ funtor fibra } \mathscr{C} \to \operatorname{Bimod} R).$$

La relevancia de esta noción se potencia gracias al teorema de Hayashi y Ostrik ya citado.

Así como para las álgebras de Hopf, se tiene la noción de álgebra de Hopf débil *cuasitriangular*: es un par (H, R) donde H es un álgebra de Hopf débil y $R \in H \otimes H$ es inversible que satisface ciertas condiciones convenientes, ver [NV, NTV]. En tal caso, R se dice una R-matriz universal; induce una solución de la ecuación de trenzas en el contexto de bimódulos para cada representación de H.

Se han construido ejemplos de álgebras de Hopf débiles a partir de grupoides dobles.

i) En [AN1], se asoció a un grupoide doble vacante finito $\mathscr{T}$ – que, como vimos, es equivalente a un sistema de grupoides apareados finitos $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$ – un álgebra de Hopf débil $\mathbb{C}\mathscr{T}$ (o $\mathbb{C}(\mathscr{V}, \mathscr{H})$).

Dado un par LYZ ξ, η para el sistema de grupoides apareados finitos $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$, se construye por "linealización" una R matriz universal $\mathscr{R}(\xi, \eta)$ para $\mathbb{C}(\mathscr{V}, \mathscr{H})$. En otras palabras se tiene un álgebra Hopf débil cuasitriangular $(\mathbb{C}(\mathscr{V}, \mathscr{H}), \mathscr{R}(\xi, \eta))$. Ver [AA].

ii) En el caso particular cuando $\mathscr{V}$, $\mathscr{H}$ es un sistema de grupos apareados finitos (es decir cuando $\#\mathscr{P} = 1$), $\mathbb{C}(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ es un álgebra de Hopf, recuperándose una construcción presentada por G. I. Kac en 1968 [Kac] y redescubierta por M. Takeuchi en 1981 [T1]. La construcción de R-matrices universales para $\mathbb{C}(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ en este caso aparece en [LYZ3].

iii) En [AN2], se asoció a un grupoide doble finito $\mathscr{T}$ (no necesariamente vacante pero que satisface una condición técnica de "relleno") un álgebra de Hopf débil $\mathbb{C}\mathscr{T}$.

Por otro lado, digamos que una base $\mathscr{B}$ de un álgebra de Hopf de dimensión finita H es *positiva* si los coeficientes de estructura del producto, unidad, coproducto, counidad y antípoda respecto de $\mathscr{B}$ son positivos (se entiende ≥ 0). Análogamente, si (H, R) es cuasitriangular entonces $\mathscr{B}$ es positiva si, además, los coeficientes de R respecto de la base $b \otimes b'$, $b, b' \in \mathscr{B}$, son positivos.

Lu, Yan y Zhu probaron que un álgebra Hopf H que admite una base positiva es $H \simeq \mathbb{C}(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ [LYZ2]. Más aun,

Teorema. [LYZ3] *Si H es un álgebra Hopf cuasitriangular que admite una base positiva entonces $H \simeq (\mathbb{C}(\mathscr{V}, \mathscr{H}), \mathscr{R}(\xi, \eta))$, para cierto sistema de grupos apareados finitos $\mathscr{V}, \mathscr{H}$ y cierto par LYZ ξ, η.*

La construcción de [AN2] muestra que existen álgebras de Hopf débiles con base positiva que no son de la forma $\mathbb{C}(\mathscr{V}, \mathscr{H})$. Sería interesante encontrar análogos de los resultados de [LYZ2, LYZ3] para álgebras de Hopf débiles.

REFERENCIAS

[AA] M. AGUIAR and N. ANDRUSKIEWITSCH, *Representations of matched pairs of groupoids and applications to weak Hopf algebras*, Contemp. Math., en prensa.

[A] N. ANDRUSKIEWITSCH, *On the quiver-theoretical quantum Yang-Baxter equation*, Selecta Math., en prensa.

[AM] N. ANDRUSKIEWITSCH and M. MOMBELLI, *Examples of weak Hopf algebras arising from vacant double groupoids*, Nagoya Math. J., en prensa.

[AN1] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. NATALE, *Double categories and quantum groupoids*, Publ. Mat. Urug. **10**, 11–51 (2005).

[AN2] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. NATALE, *Tensor categories attached to double groupoids*, Adv. Math., en prensa.

[B] S. BIGELOW, *Braid groups are linear*, J. Amer. Math. Soc. **14**, 471–486 (2001).

[D1] V. DRINFELD, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[D2] V. G. DRINFELD, *On some unsolved problems in quantum group theory*, in Quantum groups (Leningrad, 1990), Lecture Notes in Math. **1510**, Springer, Berlin (1992), 1–8.

[EGS] P. ETINGOF, R. GURALNIK and A. SOLOVIEV, *Indecomposable set-theoretical solutions to the Quantum Yang–Baxter Equation on a set with prime number of elements*, J. Algebra **242** 2 (2001), 709–719.

[ENO] P. ETINGOF, D. NIKSHYCH AND V. OSTRIK, *On fusion categories*, Annals Math., to appear.

[ESS] P. ETINGOF, T. SCHEDLER and A. SOLOVIEV, *Set-theoretical solutions to the Quantum Yang–Baxter Equation*, Duke Math. J. **100** (1999), 169–209.

[FRT] L. FADDEEV, N. RESHETIKHIN and L. TAKHTAJAN, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1**, 193–225 (1990).

[H1] T. HAYASHI, *Quantum groups and quantum semigroups*, J. Algebra **204** (1998), 225-254.

[H2] T. HAYASHI, *A brief introduction to face algebras*, in “New trends in Hopf Algebra Theory”; Contemp. Math. **267** (2000), 161–176.

[Kac] G. KAC, *Extensions of groups to ring groups*, Math. USSR Sbornik **5**, 451–474 (1968).

[K] D. KRAMMER, *Braid groups are linear*, Ann. Math. (2) **155**, 131–156 (2002).

[LYZ1] JIANG-HUA LU, MIN YAN and YONG-CHANG ZHU, *On Set-theoretical Yang–Baxter equation*, Duke Math. J. **104** (2000), 1–18.

[LYZ2] JIANG-HUA LU, MIN YAN and YONG-CHANG ZHU, *On Hopf algebras with positive bases*, J. Algebra **237**, 421–445 (2001).

[LYZ3] JIANG-HUA LU, MIN YAN and YONG-CHANG ZHU, *Quasi-triangular structures on Hopf algebras with positive bases*, in "New trends in Hopf Algebra Theory"; Contemp. Math. **267** (2000), 339–356.

[M] K. MACKENZIE, *Double Lie algebroids and second-order geometry, I*, Adv. Math. **94** (1992), 180–239.

[Mj] S. MAJID, *Foundations of Quantum Group Theory.* Cambridge Univ. Press, 1995.

[MM] C. MALDONADO and M. MOMBELLI, *On braided groupoids*, preprint `math.QA/0504108` (2005).

[NTV] D. NIKSHYCH, V. TURAEV, and L. VAINERMAN, *Invariants of knots and 3-manifolds and quantum groupoids*, Topology Appl. **127** (2003), no. 1-2, 91–123.

[NV] D. NIKSHYCH and L. VAINERMAN, *Finite quantum groupoids and their applications*, in "Recent developments in Hopf algebra Theory", MSRI Publications 43 (2002), 211–262, Cambridge Univ. Press.

[O] V. OSTRIK, *Module categories, Weak Hopf Algebras and Modular invariants*, Transform. Groups **8**, 177–206 (2003).

[S] A. SOLOVIEV, *Non-unitary set-theoretical solutions to the quantum Yang–Baxter equation*, Math. Res. Lett. **7**, 577–596 (2000).

[T1] M. TAKEUCHI, *Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras*, Commun. Alg. **9**, 841–882 (1981).

[T2] M. TAKEUCHI, *Survey on matched pairs of groups. An elementary approach to the ESS-LYZ theory*, Banach Center Publ. **61**, 305–331 (2003).

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, CIEM – CONICET, (5000) CIUDAD UNIVERSITARIA, CÓRDOBA, ARGENTINA

E-mail: `andrus@mate.uncor.edu`

URL: `http://www.mate.uncor.edu/andrus`