

## GRÁFICAS Y MATRICES DE ADYACENCIA

ELSA A. FERNÁNDEZ

### 1. INTRODUCCIÓN

En muchas aplicaciones de la teoría de matrices aparecen matrices reales con entradas no negativas. Esto es, matrices  $A = (a_{ij})$  de orden  $n \times n$  con  $a_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Por ejemplo, en problemas de economía (modelo de Leontief), en problemas de probabilidad (por medio de matrices estocásticas) y de nuestro interés será el problema de gráficas, que estudiaremos por medio de **matrices de adyacencia**. El resultado más relevante relativo a los valores propios (autovalores) de matrices no negativas es el Teorema de Perron–Frobenius.

**Teorema 1.0.1.** *Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz  $n \times n$  con coeficientes reales tal que  $a_{ij} \geq 0$ . Entonces el **radio espectral***

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } A\}$$

*es un valor propio de la matriz  $A$  y existe un vector  $y$  con coordenadas no negativas tal que  $Ay = \rho y$ . Más aún, si  $a_{ij} > 0$  para todo  $i, j$  entonces  $\rho > 0$  es un valor propio simple de  $A$  y las coordenadas del vector  $y$  son positivas.*

(Oskar Perron, matemático alemán, 1880–1975; Georg Frobenius, matemático alemán, 1849–1917).

Una matriz  $A$  es no negativa si y sólo si el cono positivo  $V^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$  es invariante por  $A$  (esto es  $A(V^+) \subseteq V^+$ ).

Esta observación da lugar a una generalización del Teorema de Perron–Frobenius debida a Birkhoff y Vandergraft, quienes probaron que toda matriz que deja un cono sólido  $K$  invariante tiene un vector propio (autovector) en  $K$  con valor propio  $\rho(A)$ .

Tomando estos resultados como punto de partida se muestran algunas propiedades de interés en teoría de representación de álgebras. Suponiendo que la gráfica no tiene lazos se clasifican las gráficas  $\Delta$  en tres tipos de acuerdo al comportamiento “geométrico” de cierta matriz.

Se verá después que si la gráfica no tiene ciclos orientados esta clasificación corresponde a los tipos de representación del álgebra de caminos  $k(\Delta)$ . Es decir, se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 1.0.2.** *Sea  $\Delta$  una gráfica sin ciclos orientados. Entonces*

- a)  $\Delta$  es elíptica si y sólo si  $k(\Delta)$  es de tipo de representación finito.*
- b)  $\Delta$  es parabólica si y sólo si  $k(\Delta)$  es mansa.*
- c)  $\Delta$  es hiperbólica si y sólo si  $k(\Delta)$  es salvaje.*

Estos resultados clásicos en teoría de representaciones se obtienen usando diferentes métodos. Se darán aquí utilizando básicamente el enfoque de M. Takane en su trabajo

“Conos en teoría de representaciones de álgebras” [6]. Las presentes notas son introductorias al tema. El desarrollo se basa en buena parte, y a veces textualmente, en el dado por José Antonio de la Peña en el libro “Álgebra Lineal Avanzada” [4], y en el artículo antes mencionado de Martha Takane.

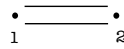
## 2. EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE UN GRAFO

Un grafo (o gráfica) está formado por una colección finita de vértices, que denotaremos  $\Delta_0$ , y por un conjunto finito de aristas  $\Delta_1$  que conectan entre sí algunos de estos vértices. Podemos suponer que  $\Delta_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Definimos la **matriz de adyacencia**  $A = (a_{ij})$  de tamaño  $n \times n$  del siguiente modo:

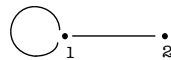
$$a_{ij} = \begin{cases} \text{número de aristas entre } i \text{ y } j, \text{ si } i \neq j \\ \text{dos veces el número de lazos en } i. \end{cases}$$

**Ejemplo 2.1.** Consideremos el grafo  $\Delta$



Entonces la matriz de adyacencia es  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Ejemplo 2.2.** Para la gráfica:



la matriz de adyacencia es  $A_\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Observación:** La traza de  $A_\Delta$  es igual a dos veces el número de lazos en  $\Delta$ . De manera que  $\Delta$  no tiene lazos si y sólo si  $\text{tr}A_\Delta = 0$ .

Notemos que  $A_\Delta$  es una matriz simétrica. El polinomio característico  $p_A(t) = \det(tI_n - A_\Delta)$  se denomina el polinomio característico del grafo  $\Delta$ .

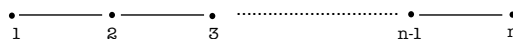
Como  $A_\Delta$  es simétrica, las raíces de  $p_A(t)$  son números reales que podemos ordenar como

$$\lambda_1^\Delta \leq \lambda_2^\Delta \leq \dots \leq \lambda_n^\Delta$$

(o bien  $\lambda_i$  en vez de  $\lambda_i^\Delta$ , si la gráfica está claramente especificada).

El espectro de la gráfica  $\Delta$  es por definición el espectro de la matriz  $A_\Delta$ . Escribiremos  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A_\Delta) = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ .

**Ejemplo 2.3.** Consideremos la gráfica lineal



que llamaremos una gráfica de tipo  $\mathbb{A}_n$ .

La matriz de adyacencia, que denotaremos  $A_n$ , es

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea  $p_n(x)$  el polinomio característico de esta matriz. Esto es,

$$p_n(x) = \det(xI_n - A_n) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la última fila, se obtiene

$$p_n(x) = x \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)(-1)^{n+n-1} \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= x p_{n-1}(x) - p_{n-2}(x).$$

Una relación de recurrencia similar aparece al considerar los polinomios de Chebyshev, como veremos a continuación. Luego aprovecharemos que las raíces de tales polinomios son conocidas, a efectos de hallar el espectro de  $A_n$ .

Consideremos la función

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, |x| < 1, n = 0, 1, \dots$$

Entonces

$$U_0(x) = \frac{\text{sen}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-\cos(\arccos x)^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

De modo análogo se puede ver que  $U_1(x) = 2x$ ,  $U_2(x) = 4x^2 - 1$ , y que  $U_3(x) = 8x^3 - 4x$ .

Notemos que  $U_3\left(\frac{x}{2}\right) = xU_2\left(\frac{x}{2}\right) - U_1\left(\frac{x}{2}\right)$ , y en general mostraremos que

$$U_n\left(\frac{x}{2}\right) = xU_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) - U_{n-2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

En efecto

$$\begin{aligned} U_n(z) &= \frac{\text{sen}(n \arccos z + \arccos z)}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{\text{sen}(n \arccos z) \cos(\arccos z)}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{\cos(n \arccos z) \cos(\arccos z)}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= zU_{n-1}(z) + \cos(n \arccos z). \end{aligned} \quad (1)$$

Análogamente se ve que

$$\begin{aligned} U_{n-1}(z) &= zU_{n-2}(z) + \cos[(n-1) \arccos z] \\ &= zU_{n-2}(z) + \cos(n \arccos z) \cdot \cos(\arccos z) + \\ &\quad \text{sen}(n \arccos z) \cdot \text{sen}(\arccos z) \\ &= zU_{n-2}(z) + z \cos(n \arccos z) + \\ &\quad \frac{\text{sen}[n \arccos z]}{\sqrt{1-z^2}} (\sqrt{1-z^2}) (\sqrt{1-z^2}) \\ &= zU_{n-2}(z) + z \cos(n \arccos z) + U_{n-1}(z)(1-z^2) \\ &= zU_{n-2}(z) + z \cos(n \arccos z) + U_{n-1}(z) - U_{n-1}(z)z^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= zU_{n-2}(z) + z \cos(n \arccos z) - U_{n-1}(z)z^2, \quad \text{esto es,} \\ 0 &= U_{n-2}(z) + \cos(n \arccos z) - U_{n-1}(z)z, \quad \text{de donde} \\ zU_{n-1}(z) - U_{n-2}(z) &= \cos(n \arccos z). \end{aligned}$$

De (1) resulta  $\cos(n \arccos z) = U_n(z) - U_{n-1}(z) \cdot z$ . Luego igualando se tiene

$$\begin{aligned} zU_{n-1}(z) - U_{n-2}(z) &= U_n(z) - U_{n-1}(z) \cdot z, \quad \text{o sea,} \\ U_n(z) &= 2zU_{n-1}(z) - U_{n-2}(z). \quad \text{Si hacemos } 2z = y \\ U_n\left(\frac{y}{2}\right) &= yU_{n-1}\left(\frac{y}{2}\right) - U_{n-2}\left(\frac{y}{2}\right), \end{aligned}$$

Ahora bien, teníamos que  $p_n(x) = xp_{n-1}(x) - p_{n-2}(x)$ , y como además  $p_1(x) = x = U_1\left(\frac{x}{2}\right)$  y  $p_2(x) = x^2 - 1 = U_2\left(\frac{x}{2}\right)$ , obtenemos que  $p_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right)$ .

Es decir,  $\arccos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{l\pi}{n+1}$ . Pero  $\arccos$  es función de  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  y por lo tanto  $\frac{t}{2} = \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)$ , o sea,  $t = 2\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)$  con  $0 \leq \frac{l\pi}{n+1} \leq \pi$ , lo que implica  $0 \leq l \leq n+1$ . Pero  $l = 0$  implica  $t = 2$  y  $|t| < 2$  dado que  $4 - t^2 > 0$ .

$l = n + 1$  implica  $t = -2$ , lo que no es posible pues  $|t| < 2$ .

Luego el espectro está dado por los números  $2 \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)$  con  $l = 1, 2, \dots, n$ .

**Nota 2.4.** Las funciones

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

para  $n = 0, 1, \dots$ , son llamadas *polinomios de Chebyshev* de primera y segunda clase, respectivamente.

Se tiene que:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1, \quad U_3(x) = 8x^3 - 4x.$$

Se sabe además que los polinomios  $T_n(x)$  son ortogonales en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  con respecto a la función peso  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Por otra parte, es conocido el hecho de que  $T_n(x)$  es solución de la ecuación diferencial

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0.$$

Pafnuti Chebyshev (1821–1894), matemático ruso, es conocido por su trabajo en teoría de aproximación y teoría de números.

**Ejemplo:** De manera ilustrativa mostraremos que  $U_n(x)$  tiene la expresión polinomial

$$U_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n-i}{i} (2x)^{n-2i} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

La demostración la hacemos por inducción en  $n$ .

Si  $n = 1$ ,  $U_1(x) = 2x$  según vimos previamente.

Por otra parte,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor 1/2 \rfloor = 0} (-1)^i \binom{1-i}{i} (2x)^{1-2i} = (-1)^0 \binom{1}{0} (2x)^1 = 2x.$$

Luego vale para  $n = 1$ .

Supongamos que el resultado es válido para  $k < n$  y probémoslo para  $n$ . Sabemos que  $U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) =$

$$= (2x) \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n-1-i}{i} (2x)^{n-1-2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n-2-i}{i} (2x)^{n-2-2i}.$$

Si  $n$  es impar,  $n = 2l + 1$ , entonces  $\frac{n}{2} = l + \frac{1}{2}$ , luego  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = l$ ,  $n - 1 = 2l$ , con lo cual

$$\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = l.$$

Además  $n - 2 = 2l + 1 - 2 = 2(l - 1) + 1$ , de donde  $\frac{n-2}{2} = l - 1 + \frac{1}{2}$ , por lo tanto

$$\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor = l - 1.$$

Tenemos entonces que

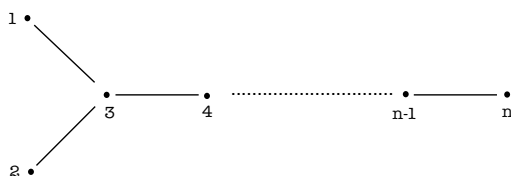
$$U_n(x) = \sum_{i=0}^l (-1)^i \binom{n-1-i}{i} (2x)^{n-2i} - \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \binom{n-2-i}{i} (2x)^{n-2-2i}.$$

Sea  $r = 1 + i$  en la segunda sumatoria, o sea  $i = r - 1$ , y

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \sum_{i=0}^l (-1)^i \binom{n-1-i}{i} (2x)^{n-2i} - \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{r-1} \binom{n-1-r}{r-1} (2x)^{n-2r} \\ &= (-1)^0 \binom{n-1}{0} (2x)^n + U_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{n-1-k}{k} (2x)^{n-2k} + \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{n-1-k}{k-1} (2x)^{n-2k} \\ &= (2x)^n + \sum_{k=0}^l (-1)^k \left[ \binom{n-1-k}{k} + \binom{n-1-k}{k-1} \right] (2x)^{n-2k} \\ &= (2x)^n + \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}. \end{aligned}$$

De modo análogo se verifica para  $n$  par.

Consideremos ahora una gráfica de tipo  $\mathbb{D}_n$  ( $n \geq 4$ ).



Vamos a calcular el espectro de la misma. La matriz de adyacencia está dada por

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea  $f_n(t)$  el polinomio característico,  $f_n(t) = \det(tI_n - D_n) =$

$$= \det \begin{pmatrix} t & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & t & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila se tiene

$$\begin{aligned} f_n(t) &= t \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & t & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & t & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & t & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & t \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & t & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & t & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & t \end{pmatrix} \\ &= t p_{n-1}(t) + (-1)^5 t p_{n-3}(t), \end{aligned}$$

donde  $p_{n-1}(t)$ ,  $p_{n-3}(t)$  son los polinomios característicos de  $A_{n-1}$ ,  $A_{n-3}$  respectivamente. Luego  $f_n(t) = t(p_{n-1}(t) - p_{n-3}(t))$ .

En consecuencia un elemento del espectro es el número 0 y los otros son raíces de  $p_{n-1}(t) - p_{n-3}(t) = 0$ .

$$\text{O sea: } U_{n-1}\left(\frac{t}{2}\right) - U_{n-3}\left(\frac{t}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left(n \arccos \frac{t}{2}\right)}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{\operatorname{sen}\left[(n-2) \arccos \frac{t}{2}\right]}{\sqrt{4-t^2}} = 0.$$

Es decir,

$$\operatorname{sen}\left(n \arccos \frac{t}{2}\right) - \operatorname{sen}\left[(n-2) \arccos \frac{t}{2}\right] = 0, \quad (|t| < 2).$$

Usando la relación  $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right] \cdot \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]$ , con  $\alpha = n \arccos \frac{t}{2}$ ,  $\beta = (n-2) \arccos \frac{t}{2}$ , tenemos:  $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \arccos \left(\frac{t}{2}\right)$  y  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = (n-1) \arccos \left(\frac{t}{2}\right)$ .

Nos queda así:

$$2 \operatorname{sen}\left(\arccos \frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left[(n-1) \arccos \frac{t}{2}\right] = 0,$$

de donde  $\operatorname{sen}\left(\arccos \frac{t}{2}\right) = 0$ , o bien  $\cos\left[(n-1) \arccos \frac{t}{2}\right] = 0$ .

Si  $\operatorname{sen}\left(\arccos \frac{t}{2}\right) = 0$ , entonces  $\arccos \frac{t}{2} = k\pi$ , por lo tanto  $\frac{t}{2} = \cos(k\pi) = (-1)^k$ , de donde  $t = -2$  ó  $t = 2$ , lo que es una contradicción, pues  $|t| < 2$ .

En consecuencia debe ser

$$\cos\left[(n-1) \arccos \frac{t}{2}\right] = 0, \text{ lo que implica } (n-1) \arccos \frac{t}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2}.$$

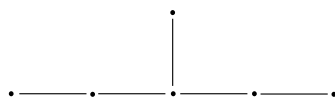
Entonces  $\arccos \frac{t}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2(n-1)}$ , y por lo tanto  $t = 2 \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(n-1)}\right]$ , con  $0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{2(n-1)} \leq \pi$ . Luego  $0 \leq (2k+1) \leq 2n-2$ , o sea,  $-1 \leq 2k \leq 2n-3$ . De manera que

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{2n-2-1}{2} = (n-1) - \frac{1}{2} < n-1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En consecuencia  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq k \leq n-2$ .

A continuación daremos el polinomio característico y el espectro de las gráficas  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$  y  $\mathbb{E}_8$ .

Dada la gráfica de tipo  $\mathbb{E}_6$



el polinomio característico está dado por:

$$p_6(t) = t^6 - 5t^4 + 5t^2 - 1 = (t+1)(t-1)(t^4 - 4t^2 + 1)$$

y el espectro por los valores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \simeq 1,932, \\ \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_3 &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} \simeq 0,518, \\ \lambda_4 &= -\lambda_3 = -\sqrt{2 - \sqrt{3}} \simeq -0,518, \\ \lambda_5 &= -\lambda_2 = -1, \\ \lambda_6 &= -\lambda_1 = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} \simeq -1,932. \end{aligned}$$

Para la gráfica de tipo  $\mathbb{E}_7$





el polinomio característico es

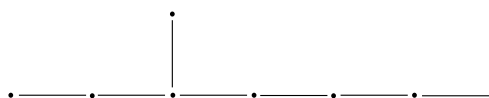
$$p_7(t) = t^7 - 6t^5 + 9t^3 - 3t = t(t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 3)$$

y el espectro consta de los números:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\simeq 1,970, \\ \lambda_2 &\simeq 1,286, \\ \lambda_3 &\simeq 0,684, \\ \lambda_4 &= 0, \\ \lambda_5 &= -\lambda_3 = -0,684, \\ \lambda_6 &= -\lambda_2 = -1,286, \\ \lambda_7 &= -\lambda_1 = -1,970,\end{aligned}$$

donde los tres últimos se obtienen usando la relación  $\lambda_{7-i+1} = -\lambda_i$ .

Para la gráfica de tipo  $\mathbb{E}_8$



el polinomio característico es

$$p_8(t) = t^8 - 7t^6 + 14t^4 - 8t^2 + 1$$

y sus raíces son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\simeq 1,989, \\ \lambda_2 &\simeq 1,486, \\ \lambda_3 &\simeq 0,813, \\ \lambda_4 &\simeq 0,416, \\ \lambda_5 &= -\lambda_4 \simeq -0,416, \\ \lambda_6 &= -\lambda_3 \simeq -0,813, \\ \lambda_7 &= -\lambda_2 \simeq -1,486, \\ \lambda_8 &= -\lambda_1 \simeq -1,989.\end{aligned}$$

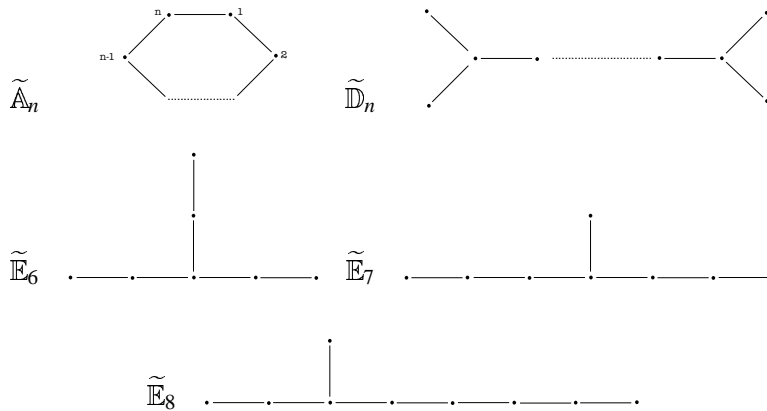
**Observación** Las ecuaciones algebraicas  $p_7(t) = 0$  y  $p_8(t) = 0$  son resolubles por radicales. En efecto, mediante la sustitución  $z = t^2$  se obtienen respectivamente las ecuaciones  $z^3 - 6z^2 + 9z - 3 = 0$ ,  $z^4 - 7z^3 + 14z^2 - 8z + 1 = 0$ , las cuales por ser de grado a lo sumo 4 pueden resolverse por radicales.

**Nota 2.5.** Los resultados previos relativos a las gráficas de tipo  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$  y  $\mathbb{E}_8$  se obtuvieron utilizando las tablas del espectro de ciertos grafos incluidos en el Apéndice del texto “Spectra of Graphs” de Cvetković, Doob y Sachs. La metodología empleada tiene como propósito mostrar que hay varias tablas en la literatura incluyendo datos numéricos acerca del espectro de grafos y tópicos similares. La razón fundamental es que éstas y otras cantidades resultan de interés en problemas de química, en relación con las energías totales de  $\pi$ -electrones, órdenes de enlace, etc.

Por ejemplo para cierto tipo de moléculas se sabe que el hecho de que cero esté en el espectro es sinónimo de inestabilidad química de la molécula.

Como es bien conocido, a las gráficas  $\tilde{A}_n$ ,  $\tilde{D}_n$ ,  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$  y  $\tilde{E}_8$  se las conoce con el nombre de *diagramas de Dynkin*. Así pues, hemos estudiado básicamente hasta el momento el espectro de los diagramas de Dynkin.

Otros tipos de gráficas o diagramas de interés en teoría de representaciones de álgebras y en otras áreas, son los siguientes:

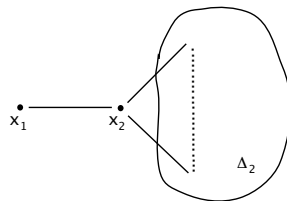


conocidos como diagramas de Dynkin extendidos o diagramas euclidianos. Nos dedicaremos a continuación a estudiar el espectro de este tipo de gráficas. Para ello es necesario dar previamente algunos conceptos y resultados.

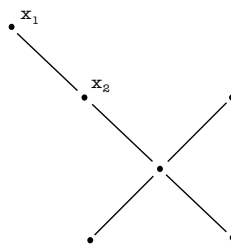
Recordemos que si  $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$  es una gráfica, entonces  $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1)$  se dice una *subgráfica* de  $\Delta$  si  $\Delta'_0 \subseteq \Delta_0$  y  $\Delta'_1 \subseteq \Delta_1$ .

Hay varios procedimientos de reducción para calcular el polinomio característico de una gráfica una vez que se conoce el de algunas subgráficas. Veremos aquí dos de estos métodos y los aplicaremos en algunos ejemplos de interés.

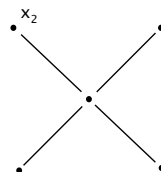
a) Sea  $x_1$  un vértice de una gráfica  $\Delta$  de modo que hay una única arista que lo contiene y sea  $x_2$  el vecino de  $x_1$  en  $\Delta$ . Sea  $\Delta_1$  la gráfica obtenida de  $\Delta$  quitando el vértice  $x_1$  y  $\Delta_2$  la gráfica obtenida quitando tanto  $x_1$  como  $x_2$  (ver el siguiente dibujo que ilustra la situación).



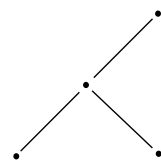
Por ejemplo, sea  $\Delta$  la gráfica



Entonces  $\Delta_1$ :



y  $\Delta_2$  es la gráfica



**Proposición 2.6.** Con las notaciones previas se tiene que

$$p_{\Delta}(t) = t p_{\Delta_1}(t) - p_{\Delta_2}(t).$$

*Demostración.* Sea el conjunto de vértices de  $\Delta$ ,  $\Delta_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , entonces la matriz de adyacencia es

$$A_{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{23} & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & A_{\Delta_2} & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & a_{2n} & & & & \end{pmatrix}.$$

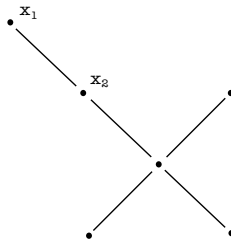
Luego

$$p_{\Delta}(t) = \det(tI - A_{\Delta}) = \det A_{\Delta} = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & t - a_{22} & -a_{23} & \dots & \dots & \dots & -a_{2n} \\ 0 & -a_{23} & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & & tI_{n-2} - A_{\Delta_2} & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ 0 & -a_{2n} & & & & & \end{pmatrix}.$$

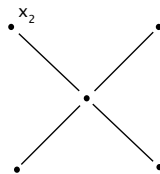
Desarrollando por la primera fila, se tiene

$$\begin{aligned}
p_{\Delta}(t) &= t \det \begin{pmatrix} t - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & tI_{n-2} - A_{\Delta_2} & \\ \cdot & & & \\ -a_{2n} & & & \end{pmatrix} + \\
&\quad + (-1)(-1)^3 \det \begin{pmatrix} -1 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ 0 & & & \\ \cdot & & tI_{n-2} - A_{\Delta_2} & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \\
&= t p_{\Delta_1}(t) + \det \begin{pmatrix} -1 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ 0 & & & \\ \cdot & & tI_{n-2} - A_{\Delta_2} & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \\
&= t p_{\Delta_1}(t) + (-1)(-1)^2 \det(tI_{n-2} - A_{\Delta_2}) = t p_{\Delta_1}(t) - p_{\Delta_2}(t). \quad \square
\end{aligned}$$

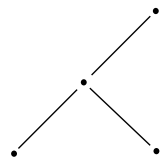
**Ejemplo 2.7.** Si consideramos la gráfica  $\Delta$  previa, esto es



con  $\Delta_1$



y  $\Delta_2$



Un cálculo simple muestra que  $p_{\Delta_1} = t^5 - 4t^3$ . Dado que  $\Delta_2$  es de tipo  $\mathbb{D}_4$ , resulta  $p_{\Delta_2}(t) = t(p_3(t) - p_1(t)) = t(t^3 - 2t - t) = t(t^3 - 3t)$ . En consecuencia,

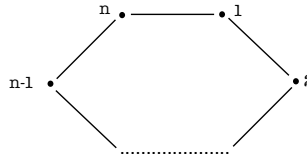
$$p_{\Delta}(t) = t(t^5 - 4t^3) - t(t^3 - 3t) = t^6 - 5t^4 + 3t^2 = t^2(t^4 - 5t^2 + 3).$$

Como ejercicio el lector puede utilizar la Proposición 2.6 para calcular el polinomio característico de una gráfica de tipo  $\mathbb{D}_n$ .

El otro procedimiento de reducción que nos interesa es:

b) Sea  $\Delta$  una gráfica sin lazos y con conjunto de vértices  $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$ . Para cada  $i$ , definimos  $\Delta_i$  como la subgráfica de  $\Delta$  obtenida al suprimir el vértice  $i$  de  $\Delta$ . Se tiene entonces que el polinomio derivado  $p'_{\Delta}(t)$  es igual a  $p'_{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^n p_{\Delta_i}(t)$ ; una demostración de este resultado se puede ver en [4, p. 169].

**Ejemplo 2.8.** Consideremos el circuito con  $n$  vértices



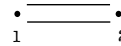
que llamaremos una gráfica de tipo  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ .

Si  $n = 1$  se tiene  $\tilde{\mathbb{A}}_1$



luego la matriz es  $\tilde{\mathbb{A}}_1 = [2]$ . El polinomio característico es  $\tilde{p}_1(t) = t - 2$ .

Si  $n = 2$  se tiene  $\tilde{\mathbb{A}}_2$



con  $\tilde{\mathbb{A}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Por lo tanto  $\tilde{p}_2(t) = t^2 - 4$ , y el espectro consta de valores 2 y  $-2$ .

Para  $n > 2$  la matriz de adyacencia de la gráfica  $\tilde{\mathbb{A}}_n$  está dada por

$$\tilde{\mathbb{A}}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para  $n \geq 3$  aplicaremos el método de reducción previo. En efecto, todas las gráficas obtenidas al suprimir un vértice de la gráfica de tipo  $\tilde{\mathbb{A}}_n$ , resultan de tipo  $\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}$ . Luego  $\tilde{p}'_{\tilde{\mathbb{A}}_n}(t) = n p_{\tilde{\mathbb{A}}_{n-1}}(t)$ . O sea,  $\tilde{p}'_{\tilde{\mathbb{A}}_n}(t) = n p_{n-1}(t)$ .

En consecuencia,  $\tilde{p}'_n(t) = n U_{n-1}\left(\frac{t}{2}\right) = n \frac{\text{sen}\left[n \arccos \frac{t}{2}\right]}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}}$ .

Por lo tanto

$$\tilde{p}_n(t) = \int \tilde{p}'_n(t) + C = \int n \frac{\text{sen}\left[n \arccos \frac{t}{2}\right]}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}} + C = (*)$$

Sea  $z = \arccos \frac{t}{2}$ , entonces  $dz = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}}\left(\frac{1}{2}\right)dt$ .

Resulta

$$\begin{aligned} (*) &= \int n \text{sen}(nz) (-2) dz + C = (-2) \int \text{sen } y dy + C = \\ &= (-2)(-\cos y) + C = 2 \cos y + C = 2 \cos(nz) + C = 2 \cos\left(n \arccos \frac{t}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Es decir  $\tilde{p}_n(t) = 2 \cos\left(n \arccos \frac{t}{2}\right) + C$ . Resta determinar la constante  $C$ .

Ahora bien,

$$\tilde{p}_n(0) = (-1)^n \det \tilde{A}_n = \begin{cases} (-1)^n \cdot 0 = 0, & \text{si } n \text{ es par, } n = 4s \\ (-1)^n \cdot (-4) = -4, & \text{si } n \text{ es par, } n = 4s + 2 \\ (-1)^n \cdot 2 = -2, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n(0) &= 2 \cdot \cos(n \arccos 0) + C \\ &= 2 \cdot \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Si  $n$  es impar,  $\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = 0$ , por lo tanto  $C = \tilde{p}_n(0) = -2$ . Para el caso  $n$  par, se obtiene también  $C = -2$ .

En conclusión,  $\tilde{p}_n(t) = 2 \cos\left(n \arccos\left(\frac{t}{2}\right)\right) - 2 = 2\left(T_n\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right)$ . Por lo tanto,  $\tilde{p}_n(t) = 0$  implica  $\cos\left[n \arccos\left(\frac{t}{2}\right)\right] = 1$ . Esto es,  $\arccos \frac{t}{2} = \frac{2k\pi}{n}$ ;  $\frac{t}{2} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ , con  $0 \leq \frac{2k\pi}{n} \leq \pi$ . Entonces el espectro consta de los números  $2 \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Observemos que el valor absoluto de todo valor propio es menor o igual que 2, y que 2 es valor propio de  $\tilde{A}_n$ .

**Ejercicio:** Probar que  $T_n(x)$  tiene la siguiente expresión polinomial

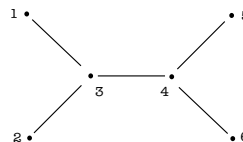
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k}.$$

Consideremos ahora una gráfica de tipo  $\tilde{\mathbb{D}}_n$  ( $n \geq 4$ ):



Entonces el espectro es la unión de los espectros de las gráficas de tipo  $\tilde{\mathbb{A}}_4$  y  $\mathbb{A}_{n-3}$ . Ilustramos con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.9.** Sea  $\Delta$  la gráfica  $\tilde{\mathbb{D}}_5$ :



Entonces la matriz de adyacencia es

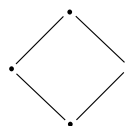
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo no muy complicado, o bien el uso de tablas, permite determinar que el polinomio característico de  $\Delta$  es

$$p_{\Delta}(t) = t^6 - 5t^4 + 4t^2 = t^2(t^4 - 5t^2 + 4).$$

En consecuencia los valores propios son  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 1, \lambda_6 = 2$ .

Por otra parte, para una gráfica de tipo  $\tilde{\mathbb{A}}_4$




la matriz de adyacencia está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y el polinomio característico es

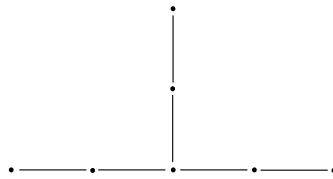
$$\tilde{p}_4(t) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2 - 4).$$

De aquí los valores propios son en este caso  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2$ .

Finalmente, la gráfica  tiene por matriz de adyacencia  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y los valores propios de la misma son  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

$$\text{Luego } S_p(\tilde{\mathbb{D}}_5) = [-1, 1] \cup [-2, 0, 0, 2] = [-1, 1, -2, 0, 0, 2].$$

Consideremos ahora  $\tilde{\mathbb{E}}_6$



$$\tilde{p}_6 = t^7 - 6t^5 + 9t^3 - 4t = t(t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 4) = t(t^2 - 1)^2(t^2 - 4).$$

Las raíces de  $\tilde{p}_6(t)$  son:

$$\lambda_1 = 2,$$

$$\lambda_2 = 1,$$

$$\lambda_3 = 1,$$

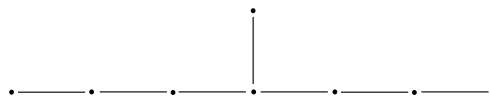
$$\lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_5 = -\lambda_3 = -1,$$

$$\lambda_6 = -\lambda_2 = -1,$$

$$\lambda_7 = -\lambda_1 = -2.$$

Para  $\tilde{\mathbb{E}}_7$  se tiene



$$\tilde{p}_7(t) = t^8 - 7t^6 + 14t^4 - 8t^2.$$

Sus raíces son :

$$\lambda_1 = 2,$$

$$\lambda_2 = \sqrt{2} \simeq 1,414,$$

$$\lambda_3 = 1,$$

$$\lambda_4 = 0,$$

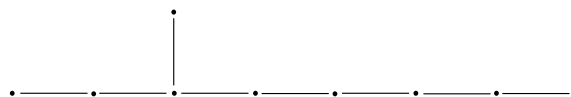
$$\lambda_5 = -\lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_6 = -\lambda_3 = -1,$$

$$\lambda_7 = -\lambda_2 = -\sqrt{2} \simeq -1,414,$$

$$\lambda_8 = -\lambda_1 = -2.$$

Finalmente, para  $\tilde{\mathbb{E}}_8$





se tiene que el polinomio característico está dado por

$$\begin{aligned}\tilde{p}_8(t) &= t^9 - 8t^7 + 20t^5 - 17t^3 + 4t = t(t^8 - 8t^6 + 20t^4 - 17t^2 + 4) \\ &= t(t^2 - 4)(t^2 - 1)(t^4 - 3t^2 + 1).\end{aligned}$$

Sus raíces son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{1/2} \simeq 1,618, \\ \lambda_3 &= 1, \\ \lambda_4 &= \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{1/2} \simeq 0,618, \\ \lambda_5 &= 0, \\ \lambda_6 &= -\lambda_4 = -\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{1/2} \simeq -0,618, \\ \lambda_7 &= -\lambda_3 = -1, \\ \lambda_8 &= -\lambda_2 = -\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{1/2} \simeq -1,618, \\ \lambda_9 &= -\lambda_1 = -2.\end{aligned}$$

**Definición 2.10.** El *radio espectral* de una gráfica es por definición el radio espectral de su matriz de adyacencia, es decir

$$\rho(\Delta) := \rho(A_\Delta) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A_\Delta)\}.$$

De los cálculos previos concluimos que si  $\Delta$  es una gráfica:

- de tipo Dynkin, entonces  $\rho(\Delta) < 2$ ;
- de tipo euclideano, entonces  $\rho(\Delta) = 2$ .

Antes de enunciar y demostrar el resultado central de esta primera parte, vamos a recordar algunas nociones.

Una gráfica  $\Delta$  se dice *conexa* si dos vértices cualesquiera de la misma están unidos por un camino.

Si una gráfica no es conexa, entonces consiste de dos o más partes llamadas componentes; dos vértices están en componentes diferentes si no pueden ser unidos por un camino.

El siguiente resultado nos será de utilidad en lo que sigue.

**Proposición 2.11.** Sea  $\Delta'$  una subgráfica de  $\Delta$ . Entonces  $\rho(\Delta') \leq \rho(\Delta)$ .

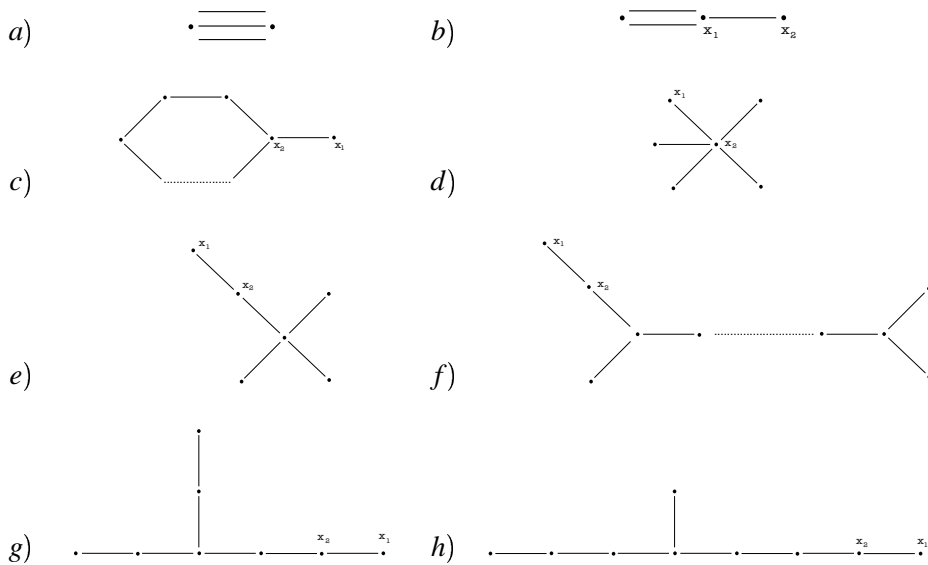
No probaremos aquí esta proposición. Referimos al lector a [4, p. 165].

**Teorema 2.12.** Sea  $\Delta$  una gráfica con radio espectral  $\rho$ . Entonces  $\rho \leq 2$  (respectivamente  $\rho < 2$ ) si y sólo si cada componente conexa de  $\Delta$  es una subgráfica (respectivamente una subgráfica propia) de una de las gráficas  $\tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$ .

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ) Si cada componente conexa de  $\Delta$  es una subgráfica  $\Delta'$  de una de las gráficas  $\tilde{\Delta}, \tilde{\mathbb{A}}_n, \tilde{\mathbb{D}}_n, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8$ , entonces  $\rho(\Delta') \leq \rho(\tilde{\Delta})$  y  $\rho(\tilde{\Delta}) = 2$ , según fue mostrado previamente. O sea,  $\rho(\Delta') \leq 2$ .

Luego, como  $\rho = \rho(\Delta) = \max\{\text{radios espectrales de cada componente conexa}\}$  se tiene que  $\rho \leq 2$ .

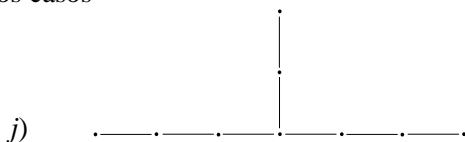
Consideremos ahora la prueba de la recíproca. Supongamos entonces que  $\rho = \rho(\Delta) \leq 2$  y supongamos que  $\Delta$  tiene una componente conexa  $\Delta'$  que no es una subgráfica de las gráficas de tipo euclideano. Luego podemos suponer que  $\Delta'$  es de la forma ( $\Delta'$  contiene una subgráfica de la forma):



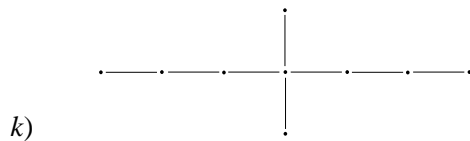
o bien



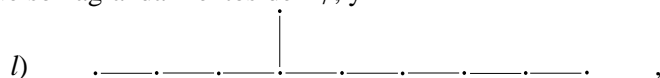
(los casos

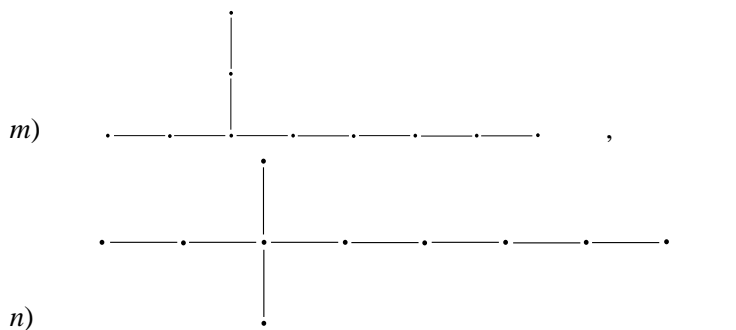


y



que son agrandamientos de  $\tilde{E}_7$ ; y





agrandamientos de  $\tilde{\mathbb{E}}_8$ , se pueden eliminar al analizar las mencionadas al comienzo).

Para el caso a) la matriz de adyacencia es  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ , luego  $p = x^2 - 9$ , y entonces el radio espectral de  $\Delta'$  es igual a 3; absurdo.

Aplicamos el primer método de reducción a los casos restantes.

En cada uno de ellos se indican los vértices  $x_1, x_2$  a utilizar.

Notaremos en cada caso  $\Delta_1$  la gráfica que se obtiene de  $\Delta'$  quitando  $x_1$ , y  $\Delta_2$  la gráfica obtenida de  $\Delta'$  quitando tanto  $x_1$  como  $x_2$ .

Entonces  $p_{\Delta'}(t) = t p_{\Delta_1}(t) - p_{\Delta_2}(t)$ . Por lo tanto  $p_{\Delta'}(2) = 2 \cdot 0 - p_{\Delta_2}(2)$  (dado que  $\Delta_1$  es de tipo euclideo).

Ahora bien,  $p_{\Delta_2}(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)$ , de donde  $p_{\Delta_2}(2) = \prod_{i=1}^s (2 - \lambda_i)$ .

Como  $\Delta_2$  es de tipo Dynkin, sabemos que  $|\lambda_i| < 2$  para  $i = 1, \dots, s$ . Luego  $\lambda_i \leq |\lambda_i| < 2$ , lo que implica  $2 - \lambda_i > 0$ , y en consecuencia  $p_{\Delta_2}(2) > 0$ .

Por lo tanto,  $-p_{\Delta_2}(2) < 0$  (I)

Por otra parte, para  $m$  suficientemente grande se tiene que  $p_{\Delta'}(m) > 0$ . (II)

De (I) y (II) resulta que existe una raíz de  $p_{\Delta'}$  que es mayor que 2.

Luego  $\rho(\Delta') > 2$  y como  $\rho = \rho_{\Delta} = \text{máx}\{\text{radios espectrales de cada componente conexa}\}$ , se concluye que  $\rho = \rho_{\Delta} > 2$ , contradicción. □

**Nota 2.13.** El primer argumento en la demostración de la recíproca es similar al utilizado por I. N. Bernstein, I. M. Gelfand y V. Ponomarev en el trabajo *Coxeter functors and Gabriel's theorem* [ver Prop. 2.1, p. 26]. El resto de la prueba fue sugerido por María Inés Platzeck.

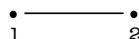
### 3. UNA CLASIFICACIÓN DE GRÁFICAS

En esta sección daremos una clasificación de gráficas (grafos) en **tres grupos**, de acuerdo al comportamiento geométrico de cierta matriz. Esta clasificación tiene un papel importante en el estudio de la teoría de álgebras de Lie y en la teoría de representaciones de álgebras.

Sea  $\Delta$  una gráfica finita, conexa y sin lazos con conjunto de vértices  $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$ .

Definimos una matriz  $B_{\Delta} = (b_{ij})$  de tamaño  $n \times n$ , de forma que  $b_{ii} = 2$  y  $-b_{ij} =$  número de aristas que unen  $i$  a  $j$  para  $i \neq j$ . Notemos que  $B_{\Delta} = 2I_n - A_{\Delta}$ , donde  $A_{\Delta}$  es la matriz de adyacencia asociada a  $\Delta$ .

**Ejemplo 3.1.**  $\Delta$ :



$$B_{\Delta} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 3.2.**  $\Delta$ :

$$\begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ 1 \qquad \qquad 2 \end{array}$$

$$B_{\Delta} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

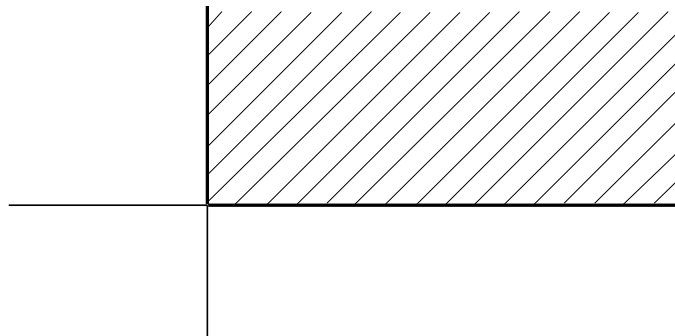
La matriz  $B_{\Delta}$  se llama matriz de Tits. (En algunas referencias  $B_{\Delta}$  se llama matriz de Cartan. Nosotros no adoptaremos esta terminología debido a que “matriz de Cartan” se utiliza de otra forma en el enfoque adoptado.)

Sea  $V$  el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ . En lo que sigue consideraremos a  $V$  como un espacio topológico con la topología inducida por la norma euclídeana.

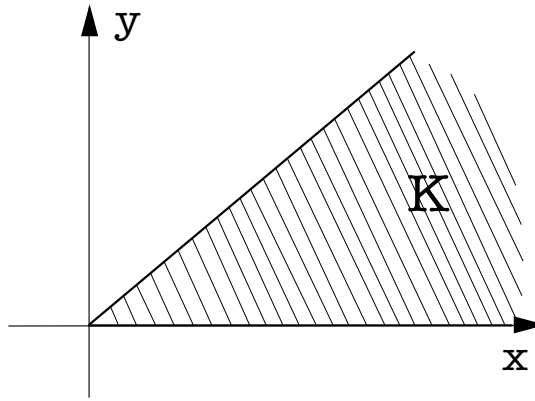
**Definición 3.3.** Un cono  $K$  es un subconjunto cerrado de  $V$  que satisface:

- (K1)  $K + K \subset K$  (esto es, para todo  $v, w \in K$  se tiene  $v + w \in K$ ).
- (K2)  $\alpha K \subset K$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$  (esto es, para todo  $v \in K$  se tiene  $\alpha v \in K$ , para  $\alpha$  real no negativo).

**Ejemplo 3.4.** El cono positivo  $V^+ = \{v \in V : v(i) \geq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ . Por ejemplo si  $V = \mathbb{R}^2$ , entonces  $V^+$  es como en la figura sombreada:



**Ejemplo 3.5.**  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$  es un cono.



En efecto, si  $(x, y) \in K$ ,  $(x', y') \in K$ . Entonces  $(x+x', y+y') \in K$  puesto que  $0 \leq y \leq x$ ,  $0 \leq y' \leq x'$ , implica  $0 \leq y+y' \leq x+x'$ . Además, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \geq 0$  y el par  $(x, y) \in K$  entonces  $(\lambda x, \lambda y) \in K$  ya que  $0 \leq \lambda x \leq \lambda y$ .

Por otra parte el conjunto es cerrado.

**Ejemplo 3.6.** Sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal y  $K$  un cono, entonces la imagen completa inversa  $T^{-1}(K)$  es un cono. En efecto:

- Sean  $z, z' \in T^{-1}(K)$ . Luego  $T(z), T(z') \in K$ . En consecuencia  $T(z) + T(z') \in K$ . Es decir  $T(z+z') \in K$ . Por lo tanto  $z+z' \in T^{-1}(K)$ .
- Sea  $\lambda \geq 0$  y  $z \in T^{-1}(K)$ . Entonces  $T(z) \in K$ . Además  $\lambda T(z) = T(\lambda z)$ ; de donde  $\lambda z \in T^{-1}(K)$ .

Recordemos además que como  $T$  es una transformación lineal, entonces  $T$  es continua. En consecuencia como  $K$  es cerrado  $T^{-1}(K)$  es cerrado.

**Ejemplo 3.7.** Consideremos el espacio dual  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Sea  $K$  un cono en  $V = \mathbb{R}^n$ , entonces  $K^\perp = \{f \in V^* : f(v) \geq 0 \ \forall v \in K\}$  es un cono en  $V^*$ , llamado cono ortogonal.

El conjunto  $K^\perp$  es cerrado. En efecto, sea  $v \in V$ ; definimos la función  $\mathcal{E}_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\mathcal{E}_v(f) = f(v)$ .  $\mathcal{E}_v$  es lineal y continua y por lo tanto  $\mathcal{E}_v(\mathbb{R}^+)$  es cerrado. Ahora bien,  $K^\perp = \bigcap_{v \in K} \mathcal{E}_v^{-1}(\mathbb{R}^+)$ , por consiguiente es un conjunto cerrado.

El lector puede verificar la validez de las condiciones (K1) y (K2) de la Definición 3.3. Luego  $K^\perp$  es un cono.

La frontera de  $V^+$  es  $\delta V^+ = \{v \in V^+ : v(i) = 0 \text{ para algún } i\}$ . Por ejemplo, si  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\delta V^+$  es el semieje positivo de las  $x$  unido al semieje positivo de las  $y$ .

**Notación:** A menudo escribiremos  $u \geq 0$  para indicar que  $u \in V^+$ . Por otra parte, si  $u \in V^+$ ,  $u \notin \delta V^+$ , escribiremos  $u \gg 0$ .

En lo que sigue denotamos  $B$  a la transformación lineal  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que la matriz asociada a  $B$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  es  $B_\Delta$ .

**Lema 3.8.**  $B^{-1}(V^+) \cap \delta V^+ = \{0\}$ .

*Demostración.* Supongamos  $0 \neq y \in B^{-1}(V^+) \cap \delta V^+$ . Como  $\Delta$  es conexo encontramos una arista

$$\overset{\cdot}{i} \text{---} \overset{\cdot}{j}$$

tal que  $y(i) > 0$  e  $y(j) = 0$ .

Ahora bien,  $B(y) = B(y^t) = \left[ \sum_{k=0}^n b_{lk}y(k) \right]$ . En particular

$$B(y^t)(j) = \sum_{k=1}^n b_{jk}y(k) = b_{jj}y(j) + b_{ji}y(i) + \sum_{k \neq i,j} b_{lk}y(k) \quad (*)$$

Pero como  $y \in B^{-1}(V^+)$ ,  $B(y) \in V^+$ , o sea  $B(y) \geq 0$ .

Ahora bien,  $y(j) = 0$ , luego  $b_{jj}y(j) = 0$ . Por otra parte, como  $y(k) \geq 0$  y  $b_{jk} \leq 0$  se tiene  $b_{jk}y(k) \geq 0$  y en consecuencia  $\sum_{k \neq i,j} b_{jk}y(k) \leq 0$ .

Entonces  $(*) \leq b_{ji}y(i) < 0$  (dado que  $b_{ji} < 0$ , pues hay una arista entre  $i$  y  $j$  e  $y(i) > 0$ ).

Se tiene entonces  $0 \leq B(y)(j) < 0$ , lo que es absurdo.

Luego  $B^{-1}(V^+) \cap \delta V^+ = \{0\}$ .  $\square$

La siguiente proposición nos da una primera clasificación de las gráficas en familias.

**Proposición 3.9.** *La matriz  $B$  satisface una y sólo una de las propiedades siguientes:*

- $B^{-1}(V^+) \subseteq V^+$ .
- $B^{-1}(V^+) = \mathbb{R}u$ , para un vector  $u \gg 0$ . En este caso  $B(u) = 0$ .
- $B^{-1}(V^+) \cap V^+ = \{0\}$ .

*Demostración.* Consideremos la condición

$$b') \quad B^{-1}(V^+) \not\subseteq V^+ \text{ y } B^{-1}(V^+) \cap V^+ \neq \{0\}.$$

Se tiene que  $B$  satisface una de las condiciones a), b') o c). Además no puede satisfacer simultáneamente a) y b') o b') y c).

Supongamos que  $B$  satisface a) y c). Luego por a)  $B^{-1}(V^+) \cap V^+ = B^{-1}(V^+)$ , y por c) se deduce  $B^{-1}(V^+) = \{0\}$ .

Como  $\text{Ker } B \subseteq B^{-1}(V^+)$  y  $B^{-1}(V^+) = \{0\}$  se tiene  $\text{Ker } B = \{0\}$ . Luego  $B$  es un isomorfismo. Sea  $u$  un vector tal que  $u \gg 0$  (o sea  $u \in V^+$ ,  $u > 0$ ). Como  $B$  es un isomorfismo existe  $v \in V : B(v) = u$ . Luego  $v \in B^{-1}(V^+)$  y como  $u = B(v) \neq 0$  resulta  $v \neq 0$ .

Es decir  $0 \neq v \in B^{-1}(V^+) \cap V^+$ , contradicción.

Así, es suficiente probar que  $B$  satisface b) si y sólo si satisface b').

Supongamos que vale b) y probemos b'). Esto es, supongamos que  $B^{-1}(V^+) = \mathbb{R}u$ , con  $u \gg 0$  ( $B(u) = 0$ ). Luego  $u \in V^+$ ,  $u \neq 0$  y  $u \in \mathbb{R}u = B^{-1}(V^+)$ . Por lo tanto  $B^{-1}(V^+) \cap V^+ \neq \{0\}$ .

Además  $B^{-1}(V^+) \not\subseteq V^+$  dado que  $-u = (-1)u$  pertenece a  $\mathbb{R}u = B^{-1}(V^+)$  y  $-u \notin V^+$ .

Supongamos que vale b'), esto es  $B^{-1}(V^+) \not\subseteq V^+$  y  $B^{-1}(V^+) \cap V^+ \neq \{0\}$ .

Sea  $v \in B^{-1}(V^+)$  tal que  $v \notin V^+$  y sea  $u \neq 0$ ,  $u \in B^{-1}(V^+) \cap V^+$ . Se deduce del Lema 3.8 que  $u \gg 0$ .

Probaremos que  $B^{-1}(V^+) = \mathbb{R}u$ .

Sea  $z \in B^{-1}(V^+)$ . Si  $z \notin V^+$ , entonces existe algún índice  $i$  tal que  $z(i) < 0$ .

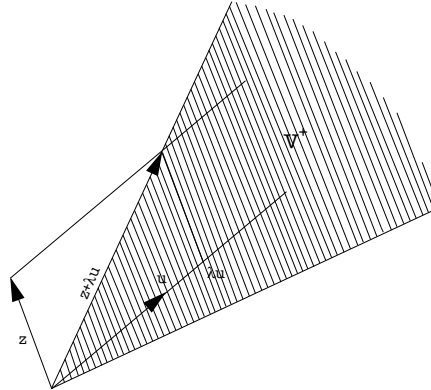
Sean  $i_1, \dots, i_r$  todos los índices para los cuales  $z(i_j) < 0$  (esto es,  $z(k) \geq 0$  para toda otra coordenada  $k \neq i_j$ ).

Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  tales que

$$\begin{cases} z(i_1) + \lambda_1 u(i_1) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ z(i_r) + \lambda_r u(i_r) = 0 \end{cases}$$

es decir,  $\lambda_j = \frac{-z(i_j)}{u(i_j)}$  (recordar que  $u(i_j) \neq 0, -z(i_j) > 0$ ). Luego  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  son reales positivos. Sea  $\lambda = \max(\lambda_1, \dots, \lambda_r), \lambda > 0$ . Se cumple que  $z + \lambda u \in \delta V^+$ .

Gráficamente es claro pues



En consecuencia  $z + \lambda u \in B^{-1}(V^+) \cap \delta V^+ = \{0\}$ , es decir  $z = -\lambda u$ , o sea  $z \in \mathbb{R}u$  (en particular como  $v$  satisface las condiciones de  $z$  se tiene  $-v \in \mathbb{R}^+ u$ ). Sea ahora  $0 \neq z \in V^+$ . Como  $v \in B^{-1}(V^+)$  y  $v \notin V^+$ ; además  $z \in B^{-1}(V^+) \cap V^+, z \neq 0, z \gg 0$ .

Un argumento similar al anterior (cambiando  $u$  por  $z$  y  $z$  por  $v$ ) muestra que existe  $\mu > 0$  tal que  $v + \mu z = 0$ . Entonces,  $v = -\mu z$ , o sea,  $v \in \mathbb{R}^+ z$ . Además como  $-v \in \mathbb{R}^+ u$ ,  $-v = \lambda u, \lambda > 0, -\lambda u = -\mu z \implies z = \frac{\lambda}{\mu} u, z \in \mathbb{R}u$ . En consecuencia  $B^+(V^+) \subset \mathbb{R}u$ .

Por otra parte,  $\mathbb{R}u = \mathbb{R}v \subset B^{-1}(V^+)$ . Como  $u, v \in B^{-1}(V^+)$ , entonces  $B(u), B(v) \geq 0$ . Por otra parte,  $-v = au$  con  $a > 0$ . Luego  $-B(v) = aB(u)$  y si  $B(u) \neq 0$  se tiene que existe un índice  $i$  tal que  $B(u)(i) > 0$ . Luego  $aB(u)(i) > 0$ , pero  $-B(v)(i) \leq 0$ , absurdo. Se tiene entonces que  $B(u) = 0$ . □

**Definición 3.10.** Diremos que la gráfica  $\Delta$  es

- 1) *elíptica* si  $B$  satisface la condición a) de la proposición previa.
- 2) *parabólica* si  $B$  satisface b).
- 3) *hiperbólica* si  $B$  satisface c).

**Proposición 3.11.**

- i)  $\Delta$  es *elíptica* si y sólo si  $\exists u \gg 0$  con  $B(u) \gg 0$ .
- ii)  $\Delta$  es *parabólica* si y sólo si  $\exists u \gg 0$  con  $\text{Ker } B = \mathbb{R}u$ .
- iii)  $\Delta$  es *hiperbólica* si y sólo si  $\exists u \gg 0$  con  $B(u) \ll 0$ .

*Demostración.* i) Supongamos que  $\Delta$  es elíptica. Luego  $\text{Ker } B \subset B^{-1}(V^+) \subset V^+$ , pero como  $\text{Ker } B$  es subespacio, debe ser  $\text{Ker } B = \{0\}$ . En consecuencia  $B: V \rightarrow V$  es un isomorfismo; en particular, para cualquier  $v \gg 0$  existe  $u \in V$  con  $B(u) = v$ . Luego  $u \in B^{-1}(V^+) \subset V^+$ .

Si  $u \in \delta(V^+)$  entonces, como  $B^{-1}(V^+) \cap \delta V^+ = 0$  se tiene  $u = 0$ , pero entonces  $Bu = 0 = v$ , absurdo pues  $v \gg 0$ .

En consecuencia  $u \in V^+$ ,  $u \notin \delta V^+$ , o sea  $u \gg 0$  y  $B(u) \gg 0$ , como queríamos probar.

Recíprocamente, supongamos que existe  $u \gg 0$  con  $B(u) \gg 0$ . Si  $B^{-1}(V^+) = \mathbb{R}z$  para algún  $z \gg 0$ ,  $B(z) = 0$ . Entonces como  $u \in B^{-1}(V^+)$ ,  $u = \lambda z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Luego  $B(u) = \lambda B(z) = 0$ , contradicción pues  $B(u) \gg 0$ . Por lo tanto no se satisface b).

Además  $u \in V^+$ ,  $u \notin \delta V^+$  y  $0 \neq u \in B^{-1}(V^+)$ . O sea no se cumple c).

ii) Supongamos que  $\Delta$  es parabólica. Como  $\text{Ker } B \subseteq B^{-1}(V^+)$  y  $B^{-1}(V^+) = \mathbb{R}u$  para un vector  $u \gg 0$ , entonces  $\text{Ker } B \subseteq \mathbb{R}u$  para un vector  $u \gg 0$ . (A)

Además  $B(u) = 0$  implica  $u \in \text{Ker } B$ . Luego  $\mathbb{R}u \subseteq \text{Ker } B$ . (B)

De (A) y (B) se tiene  $\text{Ker } B = \mathbb{R}u$ .

Recíprocamente supongamos que  $\text{Ker } B = \mathbb{R}u$ , con  $u \gg 0$ . Entonces no se verifica la condición a) puesto que el vector  $-u \in B^{-1}(V^+)$  ya que  $B(-u) = -B(u) = 0$  (dado que  $u \in \text{Ker } B$ ). Pero  $-u \notin V^+$  dado que  $u(i) > 0$  de donde  $-u(i) < 0$ . No se verifica c) puesto que  $u \in V^+$ ,  $B(u) = 0$  implica  $u \in B^{-1}(V^+)$  o sea  $u \in B^{-1}(V^+) \cap V^+$  y  $u \neq 0$ .

iii) Supongamos que  $\Delta$  es hiperbólica, esto es  $B^{-1}(V^+) \cap V^+ = 0$ . Consideremos la matriz  $C = \begin{pmatrix} I_n \\ B \end{pmatrix}$  de tamaño  $2n \times n$ , donde  $I_n$  denota la matriz identidad. Sean  $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$  los vectores fila de  $C$ .

Sea  $K = \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{R}^+ c_i$  el cono generado por los vectores  $c_1, \dots, c_{2n}$ . Probaremos que  $K = V$ .

En efecto, sea  $w = (w_1, \dots, w_n) \in K^\perp$  ( $w: V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w(x_1, \dots, x_n) = w_1 x_1 + \dots + w_n x_n$ ).

Entonces  $0 \leq w(c_i) = (w_1 \quad \dots \quad w_n) \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ \vdots \\ c_{i_n} \end{pmatrix} = w c_i^T = w_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . (dado que

$c_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  con 1 en el  $i$ -ésimo lugar).



Además

$$B(w) = B \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+1}w^T \\ \vdots \\ c_{2n}w^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(c_{n+1}) \\ \vdots \\ w(c_{2n}) \end{pmatrix} \geq 0$$

(ya que  $w \in K^\perp$  implica  $w(v) \geq 0$  para todo  $v \in K$ , y  $c_{n+1}, \dots, c_{2n}$  son elementos de  $K$ ).

Luego  $w = (w_1, \dots, w_n) \geq 0$ , es decir  $w \in V^+$  y  $B(w) \geq 0$ , de donde  $w \in B^{-1}(V^+) \cap V^+ = \{0\}$  es decir  $w = 0$ . Esto muestra que  $K^\perp = \{0\}$ . Por lo tanto  $(K^\perp)^\perp = K^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = V^{**}$ , y como  $\varphi(K) = K^{\perp\perp}$  (donde  $\varphi : V \rightarrow V^{**}$  es el isomorfismo natural de  $V$  en  $V^{**}$ ) se tiene que  $K = V$ .

Tomemos ahora cualquier vector  $w \ll 0$ . Existen números reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n} \geq 0$  tales que  $w = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i c_i$ . Sea  $y = (\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n})$ .

$$w = (w_1, \dots, w_n) = \lambda_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_n(0, \dots, 0, 1) + \lambda_{n+1}c_{n+1} + \dots + \lambda_{2n}c_{2n} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) + B(y).$$

Luego  $w - (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = B(y) \ll 0$ , ya que  $w_i < 0, -\lambda_i \leq 0, i = 1, \dots, n$ .

Es decir  $y \geq 0$  con  $B(y) \ll 0$ . Por continuidad, existe  $u \gg 0$  con  $B(u) \ll 0$ .

Para la recíproca se tiene que  $B$  no satisface a), pues si así fuera, como  $-u \in B^{-1}(V^+)$  (ya que  $B(-u) = -B(u) \gg 0$ ), se tendría que  $-u \in V^+$ , contradicción pues  $u \gg 0$ .

Tampoco satisface b) ya que si  $B^{-1}(V^+) = \mathbb{R}v$  para un vector  $v \gg 0$  con  $B(v) = 0$  entonces  $-u = \lambda v$  y luego  $B(-u) = \lambda B(v) = \lambda \cdot 0 = 0$ . Contradicción, pues  $B(u) \gg 0$ .  $\square$

Recordaremos algunos conceptos que serán de utilidad en lo que sigue.

**Definición.** Sea  $A$  una matriz real de tamaño  $n \times n$ . Diremos que  $A$  es *reducible* si existe una matriz de permutación  $P$  tal que  $PAP^t = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ , donde  $B$  es una matriz cuadrada de tamaño  $m \times m$ , con  $m < n$ .

Una matriz que no es reducible se dice *irreducible*.

**Ejemplo 3.12.** Sean  $\Delta, \Delta'$  las gráficas siguientes:



Las matrices de adyacencia son respectivamente  $A_\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_{\Delta'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Cálculos sencillos permiten concluir que  $A_\Delta$  es una matriz reducible y  $A_{\Delta'}$  es irreducible.

El ejemplo anterior es generalizable, como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 3.13.** Sea  $\Delta$  una gráfica finita. Entonces  $\Delta$  es conexa si y sólo si la matriz  $A_\Delta$  es irreducible.

Para el caso particular de una matriz  $A = (a_{ij})$  no negativa (esto es,  $a_{ij} \geq 0$  para  $1 \leq i, j \leq n$ ) e irreducible se tiene que: el radio espectral  $\rho(A)$  es un valor propio simple de  $A$ , y

existe un vector  $y$  con coordenadas positivas tal que  $A \cdot y = \rho(A) \cdot y$ . El resultado precedente se debe a O. Perron y G. Frobenius. Una demostración del mismo puede encontrarse en [4].

A continuación aplicaremos las nociones previas a efectos de obtener otra caracterización de los tipos de gráficas. Como veremos, dicha caracterización es en función del radio espectral.

Sea  $\Delta$  una gráfica con radio espectral  $\rho$ . Supongamos que  $\rho \leq 2$ . Entonces tenemos tres casos.

Caso I:  $\rho = 2$

Por el Teorema de Perron–Frobenius existe  $u \gg 0$  tal que  $A_{\Delta}u = 2u$  (donde  $A_{\Delta}$  es la matriz de adyacencia) y 2 es un autovalor simple de  $A_{\Delta}$ . Luego  $0 = (2I - A_{\Delta})u = B_{\Delta}(u)$ .

En consecuencia  $\mathbb{R}u \subseteq \text{Ker}B = \{z : (2I - A_{\Delta})z = 0\}$ , y por ser  $z$  autovalor simple  $\dim \text{Ker}B = 1$ . Luego  $\mathbb{R}u = \text{Ker}B$  con  $u \gg 0$ , lo que implica que  $\Delta$  es parabólica.

Caso II:  $0 < \rho < 2$

Entonces por el Teorema de Perron–Frobenius existe  $v \gg 0$  tal que  $A_{\Delta}v = \rho v$ . Luego  $B_{\Delta}(v) = 2v - A_{\Delta}v = 2v - \rho v = (2 - \rho)v \gg 0$ . Es decir, existe  $v \gg 0$  con  $B_{\Delta} \gg 0$ . Por lo tanto  $\Delta$  es elíptica.

Caso III:  $\rho = 0$ .

Por el Teorema de Perron–Frobenius existe  $v \gg 0$  tal que  $A_{\Delta}v = 0$   $v = 0$ . Luego  $B_{\Delta}(v) = 2v - A_{\Delta}v = 2v \gg 0$ . O sea,  $\Delta$  es elíptica.

Sea ahora  $\Delta$  una gráfica y  $\rho$  el radio espectral de  $\Delta$ ,  $A_{\Delta}$  la matriz de adyacencia. Por el Teorema de Perron–Frobenius existe  $v \gg 0$  tal que  $A_{\Delta}v = \rho v$ . Luego  $B_{\Delta}(v) = 2v - A_{\Delta}v = 2v - \rho v = (2 - \rho)v \gg 0$ .

Como  $2 - \rho \in \mathbb{R}$ , se tienen tres casos:

a)  $2 - \rho = 0$       b)  $2 - \rho > 0$       c)  $2 - \rho < 0$

En el caso a),  $\rho = 2$  es un autovalor simple de  $A_{\Delta}$ . Como  $B_{\Delta}(v) = 0$ , se tiene  $\mathbb{R}v \subseteq \text{Ker}B$  y  $\dim \text{Ker}B = 1$  (por ser  $\rho$  un autovalor simple).

O sea  $\mathbb{R}v = \text{Ker}B$ ,  $v \gg 0$  implica  $\Delta$  parabólica.

En el caso b),  $\rho < 2$ .

Sea  $v \gg 0$  tal que  $A_{\Delta}(v) = \rho v$ . Luego  $B_{\Delta}v = 2v - \rho v = (2 - \rho)v \gg 0$ .

O sea, existe  $v \gg 0$  con  $B_{\Delta}(v) \gg 0$ . Es decir  $\Delta$  es elíptica.

c) Supongamos que  $2 < \rho$ . Luego por Perron–Frobenius existe  $v \gg 0$  con  $A_{\Delta}(v) = \rho v$ . Entonces  $B_{\Delta}(v) = (2 - \rho)v \ll 0$ . O sea,  $v \gg 0$  y  $B_{\Delta}(v) \ll 0$  significa que  $\Delta$  es hiperbólica.

Hemos visto entonces que:

- si  $\rho < 2$  entonces  $\Delta$  es elíptica,
- si  $\rho = 2$  entonces  $\Delta$  es parabólica,
- si  $\rho > 2$  entonces  $\Delta$  es hiperbólica.

Ahora bien, como una gráfica  $\Delta$  es de uno y sólo uno de los tipos elíptico, parabólico o hiperbólico, se tiene fácilmente la validez de la recíproca.

Es decir, hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 3.14.** *Sea  $\Delta$  una gráfica con radio espectral  $\rho$ . Entonces*

- 1)  $\Delta$  es elíptica si y sólo si  $\rho < 2$ ,
- 2)  $\Delta$  es parabólica si y sólo si  $\rho = 2$ ,
- 3)  $\Delta$  es hiperbólica si y sólo si  $\rho > 2$ .

A partir de este último resultado y de un teorema previo en el cual se probó que:

$\rho = 2$  si y sólo si la gráfica es de tipo euclideo,  
 $\rho < 2$  si y sólo si la gráfica es de tipo Dynkin,

concluimos que:

$\Delta$  es elíptica si y sólo si  $\Delta$  es de tipo Dynkin  
 $\Delta$  es parabólica si y sólo si  $\Delta$  es de tipo euclideo.

Más aún, de lo estudiado se sigue que si  $\Delta$  es hiperbólica entonces debe contener propiamente una gráfica de tipo euclideo.

Consideremos la forma cuadrática  $\chi_\Delta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $\chi_\Delta(v) = \frac{1}{2}v B_\Delta v^T$ , donde  $\Delta$  es una gráfica sin lazos y con  $n$  vértices.

El siguiente corolario nos da una caracterización de los tipos de gráficas  $\Delta$ , por medio de la forma cuadrática  $\chi_\Delta$ .

**Corolario 3.15.** *Sea  $\Delta$  una gráfica sin lazos y con  $n$  vértices. Entonces*

- i)  $\Delta$  es elíptica si y sólo si  $\chi_\Delta$  es positiva definida.
- ii)  $\Delta$  es parabólica si y sólo si  $\chi_\Delta$  es no negativa.
- iii)  $\Delta$  es hiperbólica si y sólo si  $\chi_\Delta$  es indefinida.

La demostración resulta fácilmente a partir de la siguiente observación, y queda a cargo del lector.

**Observación:** Sea  $\Delta$  una gráfica sin lazos y con  $n$  vértices, sea  $B_\Delta = 2I - A_\Delta$ , donde  $A_\Delta$  es la matriz de adyacencia. Entonces  $\lambda$  es valor propio de  $A_\Delta$  si y sólo si  $2 - \lambda$  es valor propio de  $B_\Delta$ .

**Corolario 3.16.**  $\Delta$  es elíptica si y sólo si la forma cuadrática  $\chi_\Delta$  es débilmente positiva (esto es,  $\chi_\Delta(z) > 0$  para todo  $z \neq 0$ ,  $z$  con todas las coordenadas positivas).

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sabemos que si  $\Delta$  es elíptica entonces  $\chi_\Delta$  es positiva, y en particular es débilmente positiva.

$\Leftarrow$ ) Para la recíproca supongamos que  $\chi_\Delta$  es débilmente positiva. Sea  $\rho = \rho(\Delta)$ ,  $A_\Delta$  la matriz de adyacencia. Por Perron–Frobenius existe  $u \gg 0$  con  $A_\Delta(u) = \rho u$ .

Luego  $B_\Delta(u) = (2 - \rho)u$ .

Si  $\rho = 2$ ,  $B_\Delta(u) = 0$  y por lo tanto  $\chi_\Delta(u) = 0$ , absurdo.

Si  $\rho > 2$  entonces  $2 - \rho < 0$ , y en consecuencia  $B_\Delta(u) < 0$ . Luego  $\chi_\Delta(u) = \frac{1}{2}u B_\Delta u^T < 0$ , contradicción ( $u \gg 0$ ,  $B_\Delta(u^T) < 0$ ).

Se concluye así que  $\rho < 2$ , lo que implica que  $\Delta$  es elíptica.  $\square$

Sea  $\Delta$  un carcaj (quiver) finito (= grafo orientado), conexo y sin ciclos orientados,  $\Delta_0$  el conjunto de vértices y  $\Delta_1$  el conjunto de flechas de  $\Delta$ ,  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado.

La categoría de representaciones  $\text{rep}_k(\Delta)$  se define de la siguiente manera:

Una representación (= objeto de  $\text{rep}_k(\Delta)$ ) es una familia

$$M = \{(M_i)_{i \in \Delta_0}, \mathbb{M}(\alpha)_{\alpha \in \Delta_1}\}$$

donde  $M_i$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita y  $M(i \xrightarrow{\alpha} j) : M_i \rightarrow M_j$  es una transformación lineal.

Un morfismo  $f : M \rightarrow N$  es una familia  $f = \{f_i : M_i \rightarrow N_i\}$  de transformaciones lineales tales que  $N(\alpha) f_i = f_j M(\alpha)$ ,  $\alpha \in \Delta_1$ ,  $\alpha : i \rightarrow j$ .

El estudio de la categoría  $\text{rep}_k(\Delta)$  corresponde al estudio de módulos sobre álgebras hereditarias, esto es, álgebras tales que los submódulos de módulos proyectivos son proyectivos.

En efecto, toda  $k$ -álgebra hereditaria de dimensión finita, básica e indescomponible es isomorfa al álgebra de caminos  $k(\Delta)$  para algún quiver  $\Delta$  sin ciclos orientados.

Además, el álgebra  $k(\Delta)$  es siempre hereditaria. Es un resultado conocido que las categorías  $\text{rep}_k(\Delta)$  y  $\text{mod}k(\Delta)$  (categoría de los  $k(\Delta)$ -módulos a izquierda finitamente generados) son equivalentes.

Recordemos que un álgebra  $\Lambda$  se dice de tipo de representación finito, si y sólo si hay un número finito de módulos indescomponibles, a menos de isomorfismo. En nuestro caso  $A = k(\Delta)$  es de tipo de representación finito si existen sólo un número finito de representaciones indescomponibles no isomorfas en  $\text{rep}_k(\Delta)$ .

Diremos que el álgebra  $\Lambda$  es de tipo de representación infinito si no es de tipo de representación finito, es decir si existen infinitos  $\Lambda$ -módulos indescomponibles no isomorfos. Si  $\Lambda$  es un álgebra de tipo de representación infinito se distinguen dos casos: tipo manso y tipo salvaje.

Podemos ahora enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3.17.** *Sea  $\Delta$  un quiver sin ciclos orientados. Entonces*

- a)  $\Delta$  es elíptico si y sólo si  $k(\Delta)$  es de tipo de representación finito.*
- b)  $\Delta$  es parabólico si y sólo si  $k(\Delta)$  es de tipo manso.*
- c)  $\Delta$  es hiperbólico si y sólo si  $k(\Delta)$  es de tipo salvaje.*

Este es un importante resultado que no probaremos aquí por razones de espacio. Una demostración muy original del mismo, utilizando argumentos directos, puede verse en [6].

#### AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento a la Dra. María Inés Platzeck por valiosos comentarios, sugerencias y aportes. Así también al Dr. Luis Piovan por el esfuerzo, dedicación y desinteresada colaboración puestos en la tarea de mecanografiado de diversas partes de las presentes notas.

## REFERENCIAS

- [1] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev. *Coxeter functors and Gabriel's theorem*. Usp. Mat. Nauk. 28 (1973) 19–33, Transl. Russ. Math. Surv. 28 (1973) 17–32.
- [2] D. Cvectović, M. Doob y H. Sachs. *Spectra of graphs*. Academic Press, (1979).
- [3] K. Hofmann y R. Kunze. *Álgebra Lineal*. Prentice Hall, (1977).
- [4] J. A. de la Peña. *Álgebra Lineal Avanzada*. Ediciones Científicas Universitarias, Universidad Nacional Autónoma de México, (1996).
- [5] J. A. de la Peña y M. Takane. *Spectral properties of Coxeter transformations and applications*. Archiv der Math. 55 (1990), 120–134.
- [6] M. Takane. *Conos en teoría de representaciones de álgebras*. Aportaciones Matemáticas. Ser. Comunicaciones 6 (1989), 157–174.

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA SAN JUAN BOSCO, 9120  
PUERTO MADRYN, ARGENTINA  
*E-mail:* elsaffer@infovia.com.ar