

# Conferencias

## **Soluciones de la ecuación cuántica de Yang-Baxter en el contexto de carcaj**

Nicolás Andruskiewitsch · FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Se presentará la ecuación de trenzas, también conocida como “ecuación cuántica de Yang-Baxter”. Se recordarán diversos resultados sobre soluciones de la ecuación de trenzas en los contextos de espacios vectoriales y de conjuntos. Luego se discutirá el caso de los carcaj y se presentarán los resultados de [A], formulados en términos de representaciones de grupoides apareados [AA]. Finalmente se mostrará la construcción de  $R$ -matrices universales para los grupoides cuánticos definidos en [AN].

[AA] Marcelo Aguiar y N. Andruskiewitsch. Representations of matched pairs of groupoids and applications to weak Hopf algebras. Aceptado en *Contemp. Math.*, 47 pp. [arxiv.org: math.QA/0402118](https://arxiv.org/abs/math.QA/0402118).

[A] N. Andruskiewitsch. On the quiver-theoretical quantum Yang–Baxter equation. Aceptado en *Selecta Math.*, 40 pp. [arxiv.org: math.QA/0402269](https://arxiv.org/abs/math.QA/0402269).

[AN] N. Andruskiewitsch y S. Natale. Double categories and quantum groupoids. *Publ. Mat. Urug.* **10** 11–51 (2005). [arxiv.org: math.QA/0308228](https://arxiv.org/abs/math.QA/0308228).

## **La parte de izquierda y la parte de derecha de una categoría de módulos**

Ibrahim Assem · Université de Sherbrooke, Québec, Canada

En esta charla definiremos la parte de izquierda y la parte de derecha de una categoría de módulos, enunciaremos sus propiedades principales, y después veremos cómo se pueden emplear para resolver un problema concreto de teoría de representaciones de álgebras: la caracterización de las álgebras que tienen componentes de Auslander-Reiten quasi-dirigidas.

## **La inconclusa teoría calculadora de Schubert y un nuevo movimiento**

Matías Graña · Universidad de Buenos Aires

El anillo de cohomología de variedades de bandera en  $\mathbb{C}^n$  a coeficientes enteros fue estudiado por Borel a comienzos de los 50. Borel probó que este anillo es isomorfo al cociente  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I$ , donde  $I$  es el ideal generado por los polinomios simétricos. El anillo de cohomología, por otra parte, está generado sobre  $\mathbb{Z}$  por los llamados ciclos de Schubert. Vía el isomorfismo de Borel, estos ciclos dan lugar a los “polinomios de Schubert”, que fueron descritos por Demazure, Bernstein–Gelfand–Gelfand y Lascoux–Schutzenberger, entre otros. En los últimos años se encontró un nuevo contexto para el cálculo de Schubert: las álgebras de Nichols (o álgebras simétricas cuánticas). Dentro de ellas se pueden definir subálgebras isomorfas a los anillos de cohomología de variedades de bandera. Además, esto se ha hecho también para variedades de bandera generalizadas, y para cohomología cuántica. En la charla intentaremos dar cuenta de estos avances y plantaremos posibles continuaciones.

### **Homotopía algebraica estable**

Gabriel Minian · Universidad de Buenos Aires

En la primera parte de esta charla, contaré cómo definir una teoría de homotopía en contextos algebraicos o combinatorios. Luego mostraré algunas construcciones básicas de esta teoría homotópica, que pueden ser utilizadas para desarrollar, en estos contextos, una teoría estable. Por último, basándome en algunas ideas introducidas por Segal, May y Thomason en los setenta y en los ochenta, desarrollaré una “máquina de lazos infinitos” y veremos algunas de sus aplicaciones.

### **Clasificación de álgebras down-up**

Andrea Solotar · Universidad de Buenos Aires

Las álgebras “down-up”  $A(a, b, c)$ , donde  $a, b, c$  son escalares, fueron definidas por Benkart y Roby en 1998, como generalizaciones de álgebras generadas por un par de operadores “up” y “down” que actúan en el espacio vectorial  $kP$ , donde  $P$  es un conjunto parcialmente ordenado. Entre los ejemplos de este tipo de álgebras mencionamos al álgebra envolvente de  $sl_2(\mathbb{C})$  y ciertas deformaciones de la misma definidas por Woronowicz y Witten.

Kirkman, Musson y Passmann probaron que un álgebra de este tipo es noetheriana si y sólo si  $b$  es distinto de  $a$ . En el caso noetheriano, Carvalho y Musson describieron las clases de isomorfismo de estas álgebras.

En esta charla trataremos la clasificación en términos de equivalencia Morita, es decir, equivalencias de categorías de módulos.

### **Cálculo de la multiplicidad de un módulo irreducible en una sucesión de Jordan-Hölder**

Jorge Vargas · FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

En esta conferencia presentaremos ejemplos y problemas sobre la determinación de la multiplicidad de un módulo irreducible en módulos sobre el álgebra universal de un álgebra de Lie semisimple. Usualmente, estas multiplicidades se calculan por medio de evaluación de polinomios o utilizando funciones de partición.

# Comunicaciones de Álgebra

## Sobre una conjetura de Vogan

Tim Bratten · Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

En un trabajo reciente [1], D. Vogan hace una conjetura relacionada con ciertos grupos de cohomología de álgebra de Lie (Conjetura 10.3). En nuestro trabajo probaremos un caso especial de su conjetura. En particular, sean  $G_0$  un grupo de Lie conexo, complejo reductivo y  $K_0 \subseteq G_0$  un subgrupo compacto maximal. Indicamos con  $\mathfrak{g}$  la complexificación del álgebra de Lie de  $G_0$ . La elección de  $K_0$  nos da la posibilidad definir el concepto de una subálgebra de Borel de  $\mathfrak{g}$  que es  $\theta$ -estable. Entonces sea  $\mathfrak{b}$  una subálgebra de Borel  $\theta$ -estable y supongamos que  $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{b}$  es el radical nilpotente de  $\mathfrak{b}$ . Sean  $M$  un módulo de Harish-Chandra y  $M_{\text{glob}}$  una globalización de  $M$  (esto indica que  $M_{\text{glob}}$  es una representación admisible de  $G_0$  cuyo módulo de Harish-Chandra es isomorfo con  $M$ ). Entonces, para cada  $p = 0, 1, 2, \dots$ , probaremos que existe un isomorfismo natural

$$H^p(\mathfrak{n}, M) \cong H^p(\mathfrak{n}, M_{\text{glob}}),$$

donde  $H^p(\mathfrak{n}, M)$  y  $H^p(\mathfrak{n}, M_{\text{glob}})$  indican los respectivos grupos de  $\mathfrak{n}$ -cohomología.

[1] Vogan, D., Unitary representations and complex analysis. Disponible en: [www-math.mit.edu/~dav/paper.html](http://www-math.mit.edu/~dav/paper.html).

[Véase el trabajo publicado en páginas 3–23 de estas actas.]

## Regularidad lineal para variedades absolutamente irreducibles

Antonio Cafure · FCEyN, Universidad de Buenos Aires; Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento  
acafure@dm.uba.ar

Una noción importante en la teoría de sistemas de ecuaciones polinomiales sobre *cuerpos finitos* y algunos de sus problemas (estimaciones sobre la cantidad de soluciones racionales, resultados de existencia, cálculo de puntos racionales, etc) es la noción de *regularidad*. Esta noción surge de forma natural al trabajar en estos problemas y consiste en dar condiciones sobre la cantidad de elementos del cuerpo finito para que los resultados encontrados sean válidos. La regularidad es una función de varios parámetros: la dimensión de la variedad que define el sistema de ecuaciones dado, el grado de la variedad, el grado de las ecuaciones que definen la variedad, la dimensión del espacio ambiente, etc. Es importante entonces proporcionar resultados de regularidad baja a fin de ampliar y extender la validez de los resultados que se tienen a disposición.

Sea  $\mathbb{F}_q$  el cuerpo finito de  $q$  elementos y  $\overline{\mathbb{F}}_q$  su clausura algebraica. Una variedad afín  $V \subset \overline{\mathbb{F}}_q^n$  se dice  $\mathbb{F}_q$ -definible si  $V$  es el conjunto de ceros comunes en  $\overline{\mathbb{F}}_q^n$  de polinomios  $F_1, \dots, F_m \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_n]$ .

En este trabajo presentamos una estimación con *regularidad lineal* en el grado de la variedad para la cantidad de puntos  $q$ -racionales de una variedad absolutamente irreducible  $\mathbb{F}_q$ -definible de dimensión  $r > 0$ . Tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.** *Sea  $V$  una variedad afín  $\mathbb{F}_q$ -definible absolutamente irreducible de dimensión  $r$  y grado  $\delta$ . Si  $q > 3\delta$  entonces se tiene la siguiente estimación:*

$$|\#(V \cap \mathbb{F}_q^n) - q^r| \leq (\delta - 1)(\delta - 2)q^{r-1/2} + 10\delta^{13/3}q^{r-1}$$

La demostración de este resultado utiliza una versión efectiva del clásico teorema del elemento primitivo debida a [BG04], métodos de eliminación geométrica efectiva y estimaciones sobre la cantidad de puntos racionales de una hipersuperficie absolutamente irreducible de [CM05].

#### REFERENCIAS

- [BG04] J. Brawley and S. Gao. On density of primitive elements for field extensions. Available at [www.math.clemson.edu/~sgao/](http://www.math.clemson.edu/~sgao/)
- [CM05] A. Cafure and G. Matera. Improved explicit estimates for the number of solutions of equations over finite fields. To appear in: Finite Fields and their Applications.

### Algunas caracterizaciones de las álgebras soportadas a izquierda

J. A. Cappa · Universidad Nacional del Sur

*Esta comunicación está basada en un trabajo conjunto con I. Assem, S. Trepode y M. I. Platzeck.*

Sea  $L_A$  la parte izquierda de la categoría  $\text{mod}A$  de módulos finitamente generados sobre el álgebra de Artin  $A$  [HRS]. Entonces decimos que  $A$  es soportada a izquierda si  $\text{add}(L_A)$  es contravariantemente finita en  $\text{mod}A$ , donde  $\text{add}(L_A)$  es la subcategoría llena aditiva de  $\text{mod}A$  generada por  $L_A$  [ACT].

Damos aquí diversas caracterizaciones de las álgebras con esta propiedad. Por ejemplo,  $A$  es soportada a izquierda si, y sólo si, todo módulo en  $L_A$  es predecesor de un Ext-inyectivo en  $\text{add}(L_A)$ .

Sea  $\text{ind}A$  el esqueleto de  $\text{mod}A$ . Introducimos las subcategorías llenas  $R_0$  y  $L_0$  de  $\text{ind}A$ , que tienen intersección finita con  $L_A$  y  $R_A$  respectivamente, y estudiamos algunas de sus propiedades. En particular, mostramos que  $\text{add}(L_A)$  es contravariantemente finita en  $\text{mod}A$  si, y sólo si,  $\text{add}(R_0)$  es covariantemente finita en  $\text{mod}A$ . Finalmente caracterizamos las álgebras  $A$  tales que  $R_0$  es cofinita en  $\text{ind}A$  y las álgebras laura tales que  $L_0 \cup R_0$  es cofinita en  $\text{ind}A$ .

#### Referencias

- [ACT] I. Assem, F. U. Coelho y S. Trepode: *The left and the right part of a module category*, J. Algebra **281** (2004), no. 2, 518–534.
- [HRS] D. Happel, I. Reiten y S. O. Smalø: *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. **575** (1996).

### **Caminos casi-seccionales y las potencias del radical**

Claudia Chaio · Universidad Nacional de Mar del Plata

*Trabajo conjunto con Flavio Coelho y Sonia Trepode*

La noción de morfismo irreducible tiene un papel central en el estudio de la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin. La conexión con el radical de esta categoría está dada por el hecho de que un morfismo  $f$  entre módulos indescomponibles es irreducible si y sólo si  $f$  pertenece al radical y no al radical al cuadrado. Una pregunta interesante es cuándo la composición de  $n$  morfismos irreducibles pertenece a la potencia  $n + 1$  del radical.

Igusa y Todorov probaron que si  $n$  morfismos irreducibles forman parte de un camino seccional entonces su composición pertenece a la potencia  $n$  del radical y no a potencia  $n + 1$ . Liu generalizó este resultado a caminos preseccionales.

En esta charla, analizaremos el caso de la composición de  $n$  morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles, donde  $n - 1$  de ellos pertenecen a un camino seccional. A dichos caminos los llamaremos caminos casi-seccionales.

Bajo ciertas hipótesis, daremos condiciones necesarias y suficientes para que la composición de estos  $n$  morfismos irreducibles sea un morfismo no nulo en la potencia  $n + 1$  del radical.

### **Acciones globales y homología**

Matías del Hoyo · FCEyN, Universidad de Buenos Aires

*Trabajo en colaboración con Gabriel Minian*

En esta charla definiré la noción de acción global y contaré alguna de sus aplicaciones y su relación con los complejos simpliciales y los espacios topológicos.

Mostraré distintas variantes para la construcción de un espacio clasificante de estos objetos, y analizaré la información que revelan sus grupos de homología en grados bajos.

### **Una forma normal en grupos de trenzas de tipo $B_n$**

Sebastián Freyre · FCEyN, Universidad de Buenos Aires

sfreyre@bigua.dm.uba.ar

Presentaremos primero algunas definiciones y propiedades de los grupos de trenzas de tipo  $A_n$  (o clásicos), definiremos una forma normal en ellos y usaremos una relación entre éstos y los grupos de tipo  $B_n$  para recuperar una forma normal en los últimos.

[Véase el trabajo publicado en páginas 49–56 de estas actas.]

### Algebras laura, nuevos conceptos equivalentes

M. Lanzilotta Mernies · Universidad de la República, Uruguay

Se analizará el concepto de álgebras laura, y conceptos equivalentes, pasando por las componentes casi-dirigidas y la medida de Gabriel–Roiter.

### Grupoides trenzados

J. M. Mombelli · Universidad Nacional de Córdoba

El estudio de la ecuación de trenzas o equivalentemente de la ecuación cuántica de Yang-Baxter (QYBE) ha sido muy fructífero en muchas áreas de matemática.

A principios de los '90 Drinfeld propone el estudio de la ecuación de trenza en la categoría de conjuntos, lo que lleva a la noción de “*soluciones conjuntistas de la QYBE*”. Dicho estudio ha sido llevado a cabo, principalmente, por dos grupos de algebristas: Etingof-Schedler-Soloviev y Lu-Yan-Zhu.

En un trabajo del 2004 Andruskiewitsch inicia el estudio de la ecuación de trenzas en la categoría de carcajes sobre un conjunto fijo  $\mathcal{P}$ . En dicho trabajo aparece la noción de *grupoides trenzados*, el cual juega un papel central en la descripción de soluciones no degeneradas de la ecuación de trenzas.

El propósito de esta charla es dar una descripción de grupoides trenzados en términos de teoría de grupos, y a partir de dicha descripción la construcción explícita de ejemplos.

#### REFERENCIAS

- [A] N. ANDRUSKIEWITSCH, *On the quiver-theoretical quantum Yang-Baxter equation*, Selecta Math. (N.S.) to appear, math.QA/0402269.
- [MM] C. MALDONADO and J.M. MOMBELLI, *On braided groupoids*, preprint (2005), math.QA/0504108.
- [EGS] P. ETINGOF, R. GURALNIK and A. SOLOVIEV, *Indecomposable set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation on a set with prime number of elements*, J. Algebra **242** 2 (2001), 709–719.
- [ESS] P. ETINGOF, T. SCHEDLER and A. SOLOVIEV, *Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*, Duke Math. J. **100** (1999), 169–209.
- [LYZ] JIANG-HUA LU, MIN YA and YONG-CHANG ZHU, *On the set-theoretical Yang-Baxter equation*, Duke Math. J. **104** (2000), 1–18.

### Módulos inclinantes y las subcategorías $C_i^M$

Nilda Isabel Pratti · Universidad Nacional de Mar del Plata

*Trabajo en colaboración con María Inés Platzeck, UNS.*

Sea  $A$  un álgebra de artin y  $\text{mod}A$  la categoría de  $A$ -módulos finitamente generados a derecha. Consideramos para un  $A$ -módulo  $M$  y cada  $n \geq 0$  la subcategoría llena  $C_n^M$  de  $\text{mod}A$  que consiste de los módulos  $X$  tales que existe una sucesión exacta  $M_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow X \rightarrow 0$  con  $M_i \in \text{add}M$ , y tales que la sucesión inducida  $\text{Hom}_A(M, M_n) \rightarrow$

$\cdots \rightarrow \text{Hom}_A(M, M_1) \rightarrow \text{Hom}_A(M, M_0) \rightarrow \text{Hom}_A(M, X) \rightarrow 0$  es exacta [2], generalizando la subcategoría  $C_1^M$  definida por M. Auslander en [1].

Los módulos inclinantes  $M$  satisfacen  $C_0^M = C_1^M$ . La recíproca no es verdadera, aun asumiendo que  $DA \in C_0^M$ . Sin embargo nosotros caracterizamos los módulos inclinantes en términos de las subcategorías  $C_i^M$ . Sea  $B = \text{End}(M_A)$ . El módulo  $M$  es inclinante si y sólo si  $DA \in C_0^{M_A}$ ,  $C_0^{M_A} = C_1^{M_A}$  y  $C_0^{B^M} = C_1^{B^M}$ . Obtenemos también relaciones entre la validez de algunas propiedades de la definición de módulo inclinante y las condiciones  $C_0^{M_A} = C_1^{M_A}$  y  $C_0^{B^M} = C_1^{B^M}$ .

Finalmente, estudiamos cuáles de estos resultados para módulos inclinantes pueden ser extendidos a módulos inclinantes generalizados y probamos que si  $M$  es módulo inclinante generalizado de dimensión proyectiva  $n$ , satisface que  $DA \in C_{n-1}^{M_A}$ ,  $C_{n-1}^{M_A} = C_n^{M_A}$  y  $C_{n-1}^{B^M} = C_n^{B^M}$ , pero la recíproca no es verdadera.

### Referencias

- [1] M. Auslander. *Notes on representation theory*. Brandeis Univ., 1973.  
 [2] M. I. Platzeck and N. I. Prati. *On a theorem of Auslander and applications*. Comm. in Algebra, **28**(6), 2817–2835, (2000)

### Cohomología de la construcción de Grothendieck

María Julia Redondo · Instituto de Matemática, CONICET/Universidad Nacional del Sur

*Trabajo en colaboración con Teimuraz Pirashvili.*

Dada una categoría pequeña  $\mathbf{K}$  y  $L : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{CAT}$  un funtor, consideramos la categoría  $\int_{\mathbf{K}} L$  conocida como la construcción de Grothendieck del funtor  $L$ .

Sea  $H^n(\int_{\mathbf{K}} L, D)$  la cohomología de la construcción de Grothendieck de  $L$  con coeficientes en un sistema natural  $D$ , en el sentido de Baues y Wirsching. Mostraremos la existencia de una sucesión espectral definida en función de  $\mathbf{K}$  y de  $L(k)$ , con  $k$  un objeto de  $\mathbf{K}$ , que converge a  $H^n(\int_{\mathbf{K}} L, D)$ .

### Cohomología de pares trenzados de Galois

M. Suárez-Alvarez · Universidad de Buenos Aires

En este trabajo determinamos completamente la cohomología de un par trenzado de un álgebra y una coálgebra en caso que el par satisfaga la condición de Galois. El resultado obtenido muestra que la teoría de cohomología considerada, introducida por Brzezinski, captura la información esperada, cuando uno considera a los pares trenzados galoisianos como la versión no conmutativa de los fibrados principales.

**Ext-proyectivos en categorías suspendidas contravariantemente finitas**

Sonia Trepode · Universidad Nacional de Mar del Plata

*Trabajo conjunto con Ibrahim Assem y María José Souto Salorio*

En este trabajo estudiamos la noción de Ext-proyectivos en subcategorías suspendidas contravariantemente finitas (alas) de una categoría triangulada. Consideramos alas en la categoría derivada acotada de una categoría hereditaria ext-finita con objeto inclinante. En este contexto nuestro teorema principal es el siguiente:

**Teorema:** Sea  $\mathcal{H}$  una categoría hereditaria con objeto inclinante, y  $\mathcal{U}$  un ala en  $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ . Entonces:

- a) Los Ext-proyectivos indescomponibles en  $\mathcal{U}$  pueden ser ordenados de tal manera que formen una sucesión excepcional.
- b) El número de clases de isomorfismo de Ext-proyectivos indescomponibles está acotado por el rango  $r$  del grupo de Grothendieck de  $\mathcal{H}$ .
- c) Si  $M_1, \dots, M_r$  es una lista completa de los Ext-proyectivos no isomorfos de  $\mathcal{U}$ , entonces  $M$  es un generador de  $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$  y el ala  $\mathcal{U}$  está generada por  $M$  como subcategoría suspendida de  $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ .



## Comunicaciones de Análisis

### **The convolution product of $n$ -dimensional ultrahyperbolic operator of $(\frac{n}{2} - k - 1)$ -th derivative of Dirac's delta in hypercone**

Manuel A. Aguirre T. · Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada (NuCOMPA),  
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro  
maguirre@exa.unicen.edu.ar

In this paper we obtain a relation between the distribution  $\delta^{(\frac{n}{2}-l-1)}(u)$  and the  $n$ -dimensional ultrahyperbolic operator iterated  $s$ -times. As a consequence we give a sense to convolution distributional product of  $L^s \{ \delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(u) \} * L^t \{ \delta^{(\frac{n}{2}-l-1)}(u) \}$ . Our convolution product results in a generalization of the convolution product  $\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(u) * \delta^{(\frac{n}{2}-l-1)}(u)$  due to M. Aguirre T. (cf. [1])

[1] Manuel A. Aguirre T., Two special convolution products of  $(\frac{n}{2} - k - 1)$ -th derivatives of Dirac delta in hypercone, *Applied Mathematics E-Notes*, **1** (2001), 34–39.

### **Derivaciones H-S: un teorema de estructura y aplicaciones**

Ana L. Barrenechea y Carlos C. Peña · NuCoMPA, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro  
analucia@exa.unicen.edu.ar, ccpenia@exa.unicen.edu.ar

Consideramos derivaciones sobre el espacio de operadores de Hilbert-Schmidt en un espacio de Hilbert separable. Adoptando un punto de vista matricial, considerando matrices infinitas con la métrica de Frobenius, determinamos la estructura de las mismas. Se establece que no toda derivación es interna, probando la existencia de derivaciones *cuasi-internas*. En particular, se analiza la existencia y se caracterizan derivaciones de tipo Hadamard. Finalmente se consideran algunas aplicaciones, en particular al espacio de operadores nucleares.

### **Avances sobre un problema de Sawyer**

Sheldy Ombrosi · Universidad Nacional del Sur  
sombrosi@uns.edu.ar  
Carlos Pérez Moreno · Universidad de Sevilla

Estamos interesados en caracterizar los pesos  $v(x)$  para los cuales se cumple la desigualdad de tipo débil:

$$wv\{x : Mf(x) > tv(x)\} < C/t \int f(x)Mw(x)dx, \quad (1)$$

donde  $M$  denota la maximal de Hardy-Littlewood.

Si  $w$  pertenece a  $A_1$ , la desigualdad anterior implica que

$$wv\{x : Mf(x) > tv(x)\} < C/t \int f(x)w(x)dx. \quad (2)$$

Encontrar los buenos pesos  $v(x)$  (siempre asumiendo que  $w(x)$  está en  $A_1$ ) para los cuales esta desigualdad es cierta ya es un problema interesante, de hecho este problema se puede estudiar considerando en lugar del operador  $M$ , una integral singular o también una integral fuertemente singular.

Este tipo de desigualdad fue estudiada en primer lugar por E. Sawyer en [Sa]; él probó que si  $w(x)$  y  $v(x)$  son pesos en  $A_1$  entonces vale la desigualdad (2) en dimensión 1. Recientemente, D. Cruz-Uribe, J. Martell y C. Pérez generalizaron el resultado de Sawyer a más dimensiones y además dieron una condición independiente de la de Sawyer, concretamente, probaron que si  $w$  está en  $A_1$  y el producto  $vw \in A_\infty$ , entonces también vale (2) y más aún vale cambiando la maximal  $M$  por un operador de Calderón-Zygmund. Sin embargo, si bien las condiciones anteriores sobre el peso  $v$  son suficientes, no son necesarias. Precisamente en [OP] hemos probado que si  $v(x)$  es en peso potencia de la forma  $1/|x|^m$ , con  $r > 1$  (en dimensión  $n$ ), también vale la desigualdad (1) (este será el principal resultado que presentaremos en la comunicación). Este tipo de peso es singular (ni siquiera es localmente integrable) y además es muy sencillo ver que no pueden cumplir ninguna de las condiciones anteriores. Evidentemente la clase de pesos que caracteriza cuáles son los buenos pesos  $v(x)$  para que se cumpla (1) tiene que ser mucho más amplia que  $A_1$ , y de hecho tiene que permitir un alto grado de singularidad de los pesos. Ahora, que esta clase de pesos sea amplia, no implica que contenga a cualquier peso, de hecho no es difícil ver que si estamos en dimensión  $n$  el peso  $1/|x|^n$  no es un buen peso para la desigualdad (1).

#### REFERENCIAS

- [CMP] D. Cruz-Uribe, J. Martell y C. Pérez, *Extrapolation results for non  $A_\infty$  weights and a problem by Sawyer*. Enviado.  
 [OP] S. Ombrosi y C. Pérez, *Advances in weak weighted inequalities*. En redacción.  
 [Sa] E. Sawyer, *A weighted weak type inequality for the maximal function*. Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 610–614.

### Un caso de bifurcación de Hopf

Ana Torresi · Universidad Nacional del Sur  
 atorresi@criba.edu.ar

En este trabajo se determina la existencia de órbitas periódicas locales que nacen de una solución estacionaria de un sistema uniparamétrico de ecuaciones diferenciales ordinarias en  $\mathbb{R}^n$  de la forma

$$\frac{du}{dt} + Au + B(\lambda)u = F(u, \lambda).$$

El parámetro de bifurcación  $\lambda$  varía en  $\mathbb{R}$ , la matriz  $A$  tiene un autovalor imaginario puro  $\pm i\mu_0$  simple y un múltiplo entero de éste  $\pm i\mu_0\kappa$ , de multiplicidad algebraica  $r > 1$  y

---

multiplicidad geométrica uno.  $F(u, \lambda)$  es un operador  $C^\infty$ , que verifica  $F(0, \lambda) = 0$  y  $(\partial F / \partial u)(0, \lambda) = 0$ .

Se prueba la existencia de al menos una curva  $(u, \lambda)$  de soluciones no triviales periódicas del sistema que nace de la solución estacionaria  $u = 0$  en el punto  $(0, 0)$  bajo ciertas condiciones. Se obtiene la ecuación reducida y el número de ramas de bifurcación.

## Comunicaciones de Geometría

### **Algunas generalizaciones del conocuneus de Wallis**

Graciela S. Birman · CONICET – NUCOMPA, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA  
gbirman@exa.unicen.edu.ar

El conocuneus de Wallis o cuña cónica es un sólido encerrado por una superficie dada por la ecuación  $(xz)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ . Tomando  $x = a$ , se obtiene una circunferencia de radio  $a$ , es decir, que ubicando el sistema de referencia de modo que el eje  $x$  esté determinado por los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(a, 0, 0)$ , esta superficie es similar a un “tubo” que a distancia  $a$  del origen es un círculo y cada punto de este círculo se une al eje  $z$  linealmente, tomando todos los valores entre  $a$  y  $-a$ .

En este trabajo se presentan varias generalizaciones del conocuneus de Wallis, tanto en su expresión cartesiana como paramétrica.

A partir de la expresión de sus respectivos volúmenes se obtienen distintas fórmulas integrales.

### **Integrales de camino en grupos de Lie**

Guillermo Capobianco · Universidad Nacional del Sur y CONICET  
capobian@criba.edu.ar  
Walter Reartes · Universidad Nacional del Sur  
reartes@uns.edu.ar

En este trabajo se estudia la evolución dinámica de la función de onda de la mecánica cuántica definida en un grupo de Lie compacto  $G$  y en un  $G$ -espacio homogéneo. Se propone un formalismo similar al de integrales de camino de Feynman, calculadas en base a una discretización temporal y poniendo énfasis en el propagador infinitesimal de un paso. El tratamiento propuesto tiene la ventaja de ser intrínseco al no recurrir a un “embedding” en un espacio euclidiano. Se aplica la teoría desarrollada a un par de ejemplos sencillos.

[Véase el trabajo publicado en páginas 33–37 de estas actas.]

### **The Lagrange-d’Alembert-Poincaré equations and integrability for the rolling disk**

Hernán Cendra and Viviana Díaz · Universidad Nacional del Sur and CONICET  
uscendra@criba.edu.ar, vividiaz@criba.edu.ar

Classical nonholonomic systems are described by the Lagrange-d’Alembert principle. The presence of symmetry leads, upon the choice of an arbitrary principal connection, to a reduced variational principle and to the Lagrange-d’Alembert-Poincaré reduced equations.

The case of rolling bodies has a long history and it has been the purpose of many works in recent times, in part because of its applications to robotics. In this work we study the classical example of the rolling disk. We consider a natural abelian group of symmetry and a natural connection for this example and obtain the corresponding Lagrange-d'Alembert-Poincaré equations written in terms of natural reduced variables. One interesting feature of these reduced equations is that they can be easily transformed into a single ordinary equation of second order, which is a Heun's equation.

### References

- Abraham, R. and J.E. Marsden [1978] *Foundations of Mechanics*. 2nd edition, Addison-Wesley.
- Bloch, A.M., P.S. Krishnaprasad, J.E. Marsden, and R. Murray [1996] Nonholonomic mechanical systems with symmetry, *Arch. Rat. Mech. An.*, **136**, 21–99.
- Borisov, A.V., I.S. Mamaev and A.A. Kilin [2002] Dynamics of rolling disk, *Regular and Chaotic Dynamics*, **8**, 201-212.
- Cendra, H., J.E. Marsden and T.S. Ratiu [2001a] Lagrangian reduction by stages, *Memoirs of the AMS*, **152**, no 722.
- Cendra, H., J.E. Marsden and T.S. Ratiu [2001b] Geometric mechanics, Lagrangian reduction and non-holonomic systems, *Mathematics Unlimited, 2001 and Beyond*, Springer.
- Cushman, R., J. Hermans and D. Kemppainen [1995] The rolling disk, *Nonlinear dynamical systems and chaos*, Groningen, 21–60. [1996] *Prog. Nonlinear Differential Equations Appl.*, **19**, Birkhäuser, Basel.

### Differential algebraic equations

Hernán Cendra · Universidad Nacional del Sur – CONICET  
uscendra@criba.edu.ar

The basic questions about existence and uniqueness of solutions for differential-algebraic systems are still not completely answered. The so called *reduction algorithm* gives a partial answer but it requires some regularity condition to be satisfied at each step of the algorithm. The theory under this kind of now standard assumption has reached a point where the basic facts are well established and new ideas seem to be needed. In recent works the regularity assumption has been eliminated at the cost of working with a limited class of functions, like complex polynomials. In this communication a new approach is proposed, which relies on the theory of subanalytic sets, including the usage of some desingularization results. As an example, a problem of integrability of a system with rolling constraints in mechanics is briefly explained.

### Curvatura total central de curvas en el espacio tridimensional de Lorentz

Graciela M. Desideri · NUCOMPA–Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA  
gmdeside@exa.unicen.edu.ar

Thomas F. Banchoff [Duke Math. Journal (1969), 281–289] define el concepto de curvatura total central para curvas espaciales contenidas en una esfera euclídea. Aunque este concepto fue extendido a curvas en ciertas variedades riemannianas, no ha sido tratado en espacios con métrica indefinida. En este trabajo estudiamos la generalización de la curvatura total central a curvas en los espacios Lorentzianos de dimensión 2 y 3. Además, mostramos la relación de dicha curvatura con la curvatura total absoluta por medio de fórmulas integrales.

[Véase el trabajo publicado en páginas 39–48 de estas actas.]

### Control óptimo de la esfera elástica rodante

Sebastián José Ferraro · Universidad Nacional del Sur

En este trabajo se estudia el sistema que consiste en una esfera elástica sujeta entre dos placas horizontales paralelas. La placa inferior está fija, mientras que la superior puede desplazarse horizontalmente. En la literatura de control se lo llama usualmente el sistema *ball-plate*. Al hacer rodar la esfera a lo largo de una trayectoria, sin que se deslice o gire sobre el punto de contacto, se obtiene finalmente una traslación y una reorientación de la misma. El control óptimo del sistema consiste en encontrar la trayectoria más corta entre aquéllas que den lugar a una traslación y reorientación dadas. Poniendo el problema en un marco geométrico adecuado, se obtiene un *problema isoholonómico* en un fibrado principal. Mediante técnicas de reducción Lagrangiana se pueden escribir las ecuaciones de las trayectorias óptimas, y caracterizar las soluciones completamente en términos de funciones elípticas. Se encontró además una analogía entre el control óptimo de este sistema y la dinámica de un péndulo simple.

### Eta invariants and class numbers of quadratic fields

Ricardo A. Podestá · FaMAF–CIEM, Universidad Nacional de Córdoba  
podesta@mate.uncor.edu

Let  $D$  be a self-adjoint elliptic differential operator of order  $d$  acting on a compact Riemannian manifold  $M$ . Then,  $M$  has a discrete spectrum,  $\text{Spec}(M)$ , of real eigenvalues with finite multiplicity. To study the asymmetry of  $\text{Spec}(M)$ , Atiyah, Patodi and Singer introduced the series

$$\eta(s) = \sum_{0 \neq \lambda \in \text{Spec}(M)} \text{sign}(\lambda) |\lambda|^{-s}, \quad \text{Re}(s) > \frac{n}{d}.$$

---

This series has a meromorphic continuation to  $\mathbb{C}$  that is finite at  $s = 0$ . The number  $\eta = \eta(0)$  is called the  $\eta$ -invariant.

Let  $p$  be an arbitrary fixed prime. For every compact flat manifold  $M$  having holonomy group isomorphic to  $\mathbb{Z}_p$  and with an arbitrary spin structure  $\varepsilon$  defined on  $TM$ , we compute the eta series  $\eta(s)$  associated to the Dirac operator  $D$  and the corresponding  $\eta$ -invariant. We show that for those spin  $\mathbb{Z}_p$ -manifolds having asymmetric Dirac spectrum, that is  $\eta(s) \not\equiv 0$ , the  $\eta$ -invariant is a rational multiple of the class number  $h_p$  of the quadratic number field  $\mathbb{Q}(i\sqrt{p})$ .

## Comunicaciones de Lógica

### Representation of cubic lattices by symmetric implication algebras

Manuel Abad and José Patricio Díaz Varela · Universidad Nacional del Sur

In this paper a cubic lattice  $L(S)$  is endowed with a symmetric implication structure and it is proved that  $L(S) \setminus \{0\}$  is a power of the three-element simple symmetric implication algebra. The Metropolis–Rota’s symmetries are obtained as partial terms in the language of symmetric implication algebras.

### Observaciones sobre congruencias en álgebras de Ockham

Sergio Celani y Leonardo Cabrer · Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

En este trabajo describiremos el retículo de las congruencias de un álgebra de Ockham cuyas álgebras cocientes pertenecen a las clases de Urquhart  $\mathbf{P}_{m,n}$ . Esta descripción se obtiene utilizando la dualidad para las álgebras de Ockham desarrollada por Urquhart en [2]. Este trabajo es una generalización natural de algunos resultados obtenidos por Rodríguez y Silva en [3].

#### REFERENCIAS

- [1] Blyth, T.S. & Varlet, J.C. Ockham algebras. Oxford University Press. (1994).
- [2] Urquhart, A. Distributive lattices with a dual homomorphic operation. *Studia Logica*, **38** (1979) 201–209.
- [3] Rodríguez, P.J.V. & Silva, H.J. Ockham congruences whose quotient algebras are Boolean. *Communications in Algebra*, **31** (2003), 11, 5391–5404.

[Véase el trabajo publicado en páginas 25–32 de estas actas.]

### Relaciones asociadas a homomorfismos en álgebras de Hilbert finitas

Sergio Celani y Leonardo Cabrer · Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

En el VII Congreso Dr. Antonio Monteiro mostramos que cada álgebra de Hilbert tiene asociada una estructura  $\langle X, \leq, \mathcal{S} \rangle$  llamada espacio de Hilbert ( $\mathbf{H}$ -espacio). Recíprocamente todo  $\mathbf{H}$ -espacio tiene asociada un álgebra de Hilbert. En esta ocasión concluiremos la descripción de la dualidad, dotando a los  $\mathbf{H}$ -espacios de una estructura de categoría mediante relaciones binarias llamadas  $\mathbf{H}$ -funcionales.

A su vez caracterizaremos por medio de esta dualidad aquellas álgebras de Hilbert que poseen ífimo y supremo para el orden natural.



**(0, 1)-matrices booleanas de orden  $n$  simétricas con diagonal nula**

Luiz F. Monteiro · INMABB-CONICET-Universidad Nacional del Sur

Aída Kremer · Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

Agustín Claverie · Laboratorio de Matemática, Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

luizmont@criba.edu.ar, akremer@uns.edu.ar, claverie@uns.edu.ar

Si  $\mathbf{2}$  denota el álgebra de Boole  $\{0, 1\}$  y  $n \in \mathbf{N}$ , sea  $M_n^s(\mathbf{2})$  el conjunto de todas las matrices de orden  $n$  simétricas con diagonal nula. A cada  $A \in M_n^s(\mathbf{2})$  le corresponde una sucesión de  $n$  términos formada por la suma de los elementos de cada una de sus filas. Bajo una cierta relación de equivalencia  $\sim$  definida sobre  $M_n^s(\mathbf{2})$  el cardinal del conjunto cociente  $M(n) = M_n^s(\mathbf{2})/\sim$  es igual al cardinal del conjunto de todos los grafos simples no isomorfos con  $n$  vértices. Indicamos una fórmula recursiva para determinar  $|M(n)|$ .

**La inversión del cálculo clásico de predicados de primer orden**

Juan Fernando Pendino · Universidad Nacional del Sur

jpendino@uns.edu.ar

En este trabajo proponemos un método para generar conjuntos de fórmulas que excluyan cualquier teorema del cálculo clásico de predicados de primer orden. Dicho método consiste en obtener conjuntos de fbf.s a los cuales llamamos, por oposición, *conjuntos inversamente-saturados*. Primero desarrollamos el método para el cálculo clásico de enunciados, y luego ampliamos los resultados al cálculo clásico de predicados de primer orden.

**Álgebras de Łukasiewicz de clausura trivalentes libres**

L. Rueda y A. M. Suardíaz · Universidad Nacional del Sur

Las álgebras de Łukasiewicz de clausura trivalentes son álgebras de Łukasiewicz con un operador de clausura tales que el conjunto de los elementos abiertos es un álgebra de Heyting trivalente. La clase de estas álgebras forma una variedad, a la que notaremos con  $\mathcal{C}_T\mathcal{L}_3$ . En este trabajo probamos que si  $(3^m, C)$  es un álgebra de esta variedad, entonces  $C(3^m)$  es una subálgebra de Łukasiewicz de  $3^m$  y que todo elemento finito de  $\mathcal{C}_T\mathcal{L}_3$  es producto directo de un álgebra de Boole de clausura por un álgebra de Łukasiewicz trivalente monádica.

Además, mostramos que las álgebras directamente indescomponibles finitas de  $\mathcal{C}_T\mathcal{L}_3$  son las álgebras finitas cuyo reticulado de congruencias tiene un único coátomo, esto es, las álgebras tales que el reticulado de los elementos abiertos es de la forma  $\{0\} \oplus B$ , con  $B$  un álgebra de Boole finita. Obtenemos la factorización del álgebra libre finitamente generada de  $\mathcal{C}_T\mathcal{L}_3$  en producto directo de factores directamente indescomponibles. Determinamos la estructura de cada factor y la cardinalidad del álgebra libre.

## Medidas booleanas

Carlos E. Scirica · Universidad de Buenos Aires y Universidad Nacional de General Sarmiento

Sea  $X \neq \emptyset$  un conjunto,  $(U, \cap, \Delta)$  un anillo de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\mu : (U, \Delta, \cap) \rightarrow (Z_2, +, \cdot)$  es una medida booleana (medida) si es una función  $\sigma$ -aditiva en el sentido de Kolmogoroff, es decir  $\mu$  es una función aditiva que verifica: si  $A = \cup_{n \in N} A_n$  es una unión disjunta, con  $A \in U$  y  $A_n \in U$  para todo  $n \in N$ , entonces  $\mu(A_n) = 0$  salvo finitos  $n$  y  $\mu(A) = \sum_{n \in N} \mu(A_n)$ .

Con esta definición, analizamos el comportamiento de la medida sobre sucesiones monótonas convergentes y a través de las mismas damos condiciones necesarias y suficientes para que una función  $\mu : (U, \Delta, \cap) \rightarrow (Z_2, +, \cdot)$  aditiva sea una medida.

Sea  $H \subset R^n$  localmente finito. La función  $\mu_H$  que a cada subconjunto acotado  $S$  de  $R^n$  le asigna 1 si  $|S \cap H|$  es impar, y 0 si  $|S \cap H|$  es par, es una medida.

Una medida  $\mu$  se dice *derivable* en  $x$  si  $(\exists \varepsilon > 0) (\exists a \in Z_2) (\forall B) (B \text{ acotado, } x \in B \text{ y } \text{diam}(B) < \varepsilon) \Rightarrow \mu(B) = a$ . El valor  $a$  se denomina el *diferencial* de  $\mu$  en  $x$ , notado  $d_\mu(x)$ .

La medida  $\mu_H$  definida anteriormente resulta derivable en todo  $R^n$  y demostramos que esa es la única medida derivable. Demostramos:

- Si  $\mu$  es derivable y  $A$  es acotado,  $\text{sop}(d_\mu) \cap A$  es finito. Además,  $\mu(A) = \sum_{x \in A} d_\mu(x)$ .
- Si  $\mu$  es derivable y  $A$  es acotado, se define  $\int \chi_A d_\mu = \mu(A)$ .

Se define  $\int f d_\mu = \mu(\text{sop}(f))$ . Se dirá que  $f = g$  a.e. si

$$\mu(\{x \in X / f(x) \neq g(x)\}) = \mu(\text{sop}(f) \Delta \text{sop}(g)) = 0$$

Sean  $f_n, f, g$  medibles. La función definida por  $f \mapsto \int f \cdot d_\mu$  satisface:

- es lineal
- si  $f_n$  converge monótonamente a  $f$  (i.e.  $\text{sop}(f_n)$  es una sucesión monótona de conjuntos que converge a  $\text{sop}(f)$ ), entonces  $(\int f_n \cdot d_\mu \rightarrow \int f \cdot d_\mu)$
- $(f = g \text{ a.e.}) \iff (\int f \cdot d_\mu = \int g \cdot d_\mu)$

Con  $\text{Sym}^-$  notamos al anillo de conjuntos generado por los intervalos de  $R$  de la forma  $[a, b)$ . Si  $f : R^n \rightarrow Z_2$  es continua a izquierda, entonces la función  $\mu_f : \text{Sym}^- \rightarrow Z_2$  definida por

$$\mu([a_1, b_1) \Delta [a_2, b_2) \Delta \dots \Delta [a_n, b_n)) = f(a_1) \oplus f(b_1) \oplus f(a_2) \oplus f(b_2) \oplus \dots \oplus f(a_n) \oplus f(b_n)$$

es una medida, denominada *medida de Lebesgue-Stieltjes* asociada a  $f$ .

Demostramos que si  $\mu : \text{Sym}^- \rightarrow Z_2$  es una medida, entonces la función  $f(t) = \mu([a, t))$  resulta continua a izquierda y  $\mu = \mu_f$ .

## REFERENCIAS

- [1] Halmos, P. R. *Lectures on Boolean Algebras*, D. Van Nostrand, 1963.
- [2] Halmos, P. R. *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 1974.
- [3] Kolmogorov, A. N. y Fomin, S. V. *Elementos de la Teoría de Funciones y Análisis Funcional*, Editorial Mir, 1975.
- [4] Vlad, S. E. *Introductory Topics in Binary Set Functions*, Analele Universitatii Din Oradea. Fascicula Matematica, Tomo VI, 1997–1998.

# Comunicaciones de Matemática Aplicada

## Existencia y unicidad de las soluciones estacionarias de la ecuación del calor semi-lineal por medio de homotopías

Ezequiel Dratman · FCEyN, Universidad de Buenos Aires

Guillermo Matera · Instituto de Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, y CONICET

edratman@dc.uba.ar, gmatera@ungs.edu.ar

Esta comunicación trata con las aproximaciones numéricas de las soluciones estacionarias simétricas de la ecuación del calor semi-lineal con condiciones de borde de tipo Neumann no lineales, es decir, las soluciones del problema:

$$\begin{cases} u'' = u^p & \text{en } (0, l), \\ u'(0) = 0, \\ u'(l) = u^q(l). \end{cases} \quad (1)$$

En [3] se demuestra que si  $p > 2q - 1$  entonces existe una única solución positiva de (1). A pesar de esto, muy poco se conoce acerca de las soluciones de las correspondientes discretizaciones.

Nosotros demostramos que la discretización de (1) que se obtiene considerando un esquema de diferencias finitas de segundo orden, es decir, el sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\begin{cases} 2(lh)^{-2}(u_2 - u_1) = u_1^p, \\ (lh)^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) = u_k^p, & (2 \leq k \leq n-1) \\ 2(lh)^{-2}(u_{n-1} - u_n) - 2(lh)^{-1}u_n^q = u_n^p, \end{cases} \quad (2)$$

con  $h := (n-1)^{-1}$ , tiene una única solución real positiva. Cabe destacar que este tipo de sistemas posee una cantidad exponencial de soluciones complejas, y por ende está “mal condicionado” desde el punto de vista de la resolución semi-numérica mediante algoritmos universales (cf. [1], [2]).

La demostración de existencia y unicidad se basa en el análisis de una deformación “suave” de (2), que proviene a su vez de una deformación de (1). Creemos que dicha homotopía puede ser útil a efectos de diseñar un método de continuación eficiente que permita aproximar la única solución positiva de (2).

### REFERENCIAS

- [1] D. Castro, M. Giusti, J. Heintz, G. Matera, L.M. Pardo. The hardness of polynomial equation solving. *Found. Comput. Math.*, **3**(4) 347–420, 2003.
- [2] E. Dratman, M. De Leo, G. Matera. Numeric vs. symbolic homotopy algorithms in polynomial system solving: A case study. Aparecerá en *J. Complexity*, 2005. [N. del ed.: publicado en *J. Complexity* **21**(4) 502–531, 2005.]

- [3] M. Chipot, M. Fila, P. Quittner. Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, **60**(1) 35–103, 1991.

### **Minimización de una función lineal sujeta a una restricción cuadrática convexa**

T. I. Gibelli · Universidad Nacional del Sur – CONICET  
tgibelli@uns.edu.ar

El problema de minimización de una función lineal sujeta a restricciones cuadráticas convexas aparece en varias aplicaciones, entre ellas algunos problemas de optimización topológica tales como problemas de barras y optimización de material libre. Este tipo de problema usualmente se resuelve con algoritmos basados en métodos de punto interior y métodos de penalización.

En este trabajo se analiza la solución del problema de minimización de una función lineal sujeta a una única restricción cuadrática. En primer lugar se considera el caso en que la restricción cuadrática es estrictamente convexa. Luego se analiza el caso con restricción cuadrática convexa. En ambos casos, la solución del problema se obtiene considerando las características geométricas del mismo y una descomposición de la matriz asociada a la restricción cuadrática. Para el primer caso se utiliza descomposición de Cholesky y para el segundo, descomposición en valores singulares.

[Véase el trabajo publicado en páginas 57–66 de estas actas.]

### **Sobre la cantidad de equilibrios de Nash de un juego**

Gabriela Jeronimo, Daniel Perrucci y Juan Sabia · FCEyN, Universidad de Buenos Aires

Uno de los conceptos más relevantes en teoría de juegos no cooperativos es el de equilibrio de Nash. Un *equilibrio de Nash* de un juego es una situación en la cual ningún jugador puede cambiar su estrategia unilateralmente y obtener un beneficio. Dado que en este modelo los distintos jugadores no se comunican entre sí para acordar un cambio simultáneo de estrategias, esto implica que en un equilibrio de Nash el juego se estabiliza. J. Nash (1950) probó que todo juego tiene al menos un equilibrio, pero su demostración no es constructiva y no provee información acerca de la existencia de más de un equilibrio para un juego dado.

En esta comunicación, presentaremos un método simbólico que permite estimar la cantidad de equilibrios de Nash de un juego con  $n$  personas.

Los equilibrios de Nash de un juego pueden caracterizarse como el conjunto de las soluciones reales no negativas de un sistema de ecuaciones polinomiales en varias variables. Teniendo en cuenta la estructura particular de los polinomios que dan estas ecuaciones, construimos un algoritmo basado en técnicas de eliminación provenientes de la geometría

algebraica, que obtiene una descripción de los equilibrios de Nash de un juego por medio de ecuaciones polinomiales univariadas. Finalmente, utilizando métodos simbólicos que trabajan con sistemas de ecuaciones y desigualdades polinomiales sobre los reales, estimamos la cantidad de equilibrios a partir de la descripción hallada.

### Polinomios eliminantes y codificación

Gabriela Jeronimo y Juan Sabia · FCEyN, Universidad de Buenos Aires

Es un hecho conocido que la teoría de primer orden de los cuerpos algebraicamente cerrados admite eliminación de cuantificadores. Muchos problemas asociados a sistemas de ecuaciones polinomiales pueden resolverse por medio de dicha eliminación; de allí el interés en obtener algoritmos efectivos de baja complejidad que la efectúen.

Al intentar diseñar dichos algoritmos se debe tener en cuenta, por un lado, la forma en que se codificarán los polinomios de entrada y de salida y, por otro, la cantidad de operaciones involucradas en los procedimientos (llamada la complejidad del algoritmo en cuestión). Si la codificación se hace por medio de los vectores de coeficientes de los polinomios en cuestión (forma densa), la complejidad de los algoritmos es necesariamente exponencial en el cuadrado de la cantidad de variables involucradas. Una forma de evitar esta complejidad tan alta es cambiando la codificación de los polinomios. Un método que probó ser efectivo fue el de codificar polinomios como *straight-line programs* (es decir, por medio de programas que permitan evaluarlos). Hace tiempo ya, se conocen algoritmos de eliminación efectivos que utilizan la codificación de polinomios como *straight-line programs* con complejidades menores a los que utilizan la codificación densa.

Una pregunta que surge es qué sucede con los polinomios eliminantes clásicos (determinantes, resultantes, etc.). ¿Son polinomios que pueden evaluarse fácil por un programa o no? En esta comunicación respondemos parcialmente esta pregunta: Mostramos que existe un *straight-line program* tanto para la resultante clásica como para la multihomogénea cuya complejidad es polinomial en el número de Bezout correspondiente al sistema genérico asociado a la resultante y en el número de variables de estos polinomios. Más aún, mostramos un algoritmo efectivo para calcular dicho programa de evaluación.

### Geometry of the euclidean hamiltonian suboptimal and optimal paths in the $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), D)$ 's networks

Blanca I. Niel · Universidad Nacional del Sur · biniel@criba.edu.ar

Let us consider the network  $\mathcal{N} = \{K_n(\sqrt[n]{1}), D\}$ , where  $K_n(\sqrt[n]{1})$  is the complete graph with vertices on the  $n$ -th roots of the unity and  $D = (d_{ij})$  is the  $n \times n$  matrix of the euclidean distance between nodes. The outcomes envisage the pathways yielded by greedy (nearest neighbor), antigreedy (farthest neighbor) and exhaustive optimum strategies of exploration on the euclidean hamiltonian cyclic and non cyclic paths which belong to the network.

Worthy of acclaim are the ancillary details that become clarified. On account of them there is the possibility to enumerate the reflective euclidean hamiltonian cyclic paths by using the Euler function and the resolution of specific non cyclic euclidean hamiltonian path problems by the application of Huygens' principle.

The aims of this disclosure are reached by *two main results*. The first one comes from geometric optics circumstances at the spherical mirror which undergo Hamilton's principle, and the second one from geometric arguments over the whole traversed lengths of the euclidean hamiltonian suboptimal on the network.

**First main result:** Let  $T(\alpha_i, \beta)_{1 \leq i \leq n-1}$  be the overall travelled length of the geometric paths that start up at  $C = (-R, 0)$  on the surface of a spherical mirror when they touch at  $P(\alpha_i) = (R \cos \alpha_i, R \sin \alpha_i)$  the mirrored surface  $n - 1$  times and end up at  $B = (R \cos \beta, R \sin \beta)$  with  $-\pi < \beta < 0$ .  $T(\alpha_i, \beta)$  is a continuous function everywhere and has  $n$  stationary critical points, all of them relative maxima. The singular critical points embrace trajectories with less than  $n$ 's piecemeal linear segments. Each stationary critical point evolves one  $n$ 's piecemeal linear reflective trajectory. Moreover, these  $n$  different feasible reflective paths have distinct lengths as their specific counter or clockwise circulations. What is more, the overall lengths of them are ordered in a precise and strictly increasing chain of inequalities [4,5]. The geometric optics instances with  $\beta = -\pi$  forecast the euclidean hamiltonian optimal in the  $\mathcal{N} = \{K_{2p+1}(\sqrt[2p+1]{1}), D\}$ 's networks as well as the natural bounds for the euclidean hamiltonian optima in  $\mathcal{N} = \{K_n(\sqrt[n]{1}), D\}$ 's networks.

**Second main result:** The configuration of the euclidean hamiltonian cyclic maxima in the  $\mathcal{N} = (K_{2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ 's networks with  $n \geq 6$  are confirmed by the following chains of inequalities of feasible traversed overall lengths of euclidean cyclic hamiltonian suboptimal paths. Let  $l_{\max}, l_{q,\max}, l_{\min}$  be respectively  $l_{\max} = 2R$ ,  $l_{q,\max} = 2R \cos(\frac{\pi}{n})$ ,  $l_{\min} = 2R \sin(\frac{\pi}{n})$ , then the ensuing inequalities hold on:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} l_{\max} + (\frac{n}{2} - 1) l_{q,\max} + l_{\min} &< 2 l_{\max} + (n - 2) l_{q,\max} < n l_{\max} ; \\ \frac{n}{2} l_{\max} + (\frac{n}{2} - 1) l_{q,\max} + l_{\min} &< n l_{q,\max} < 2 l_{\max} + (n - 2) l_{q,\max} < n l_{\max} ; \\ (\frac{n}{2} - k) l_{\max} + (\frac{n}{2} + k - 1) l_{q,\max} + l_{\max} \sin \left[ (k + 1) \frac{\pi}{n} \right], &k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 2 ; \end{aligned}$$

each one of these terms forms a chain of strictly increasing whole length of euclidean cyclic hamiltonian configurations with respect to  $k$ . The latter ends up at  $2 l_{\max} + (n - 2) l_{q,\max}$  with  $k = \frac{n}{2} - 2$ . It accomplishes the absolute maximum of the euclidean hamiltonian cycles on the  $\mathcal{N} = (K_{2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ 's networks.

Moreover, the length of the  $n$ -stargon of maximum density, when there is a euclidean hamiltonian cycle over the  $\sqrt[2p+2]{1}$ 's nodes that attains this overall length, i.e.  $2p + 2 \neq 4m + 2$ , is located between the terms corresponding to  $k = \frac{n}{2} - 4$  and  $k = \frac{n}{2} - 3$ .

[Véase el trabajo publicado en páginas 67–84 de estas actas.]