NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

12

ANTONIO DIEGO

SOBRE ALGEBRAS DE HILBERT

1965
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

SOBRE ALGEBRAS DE HILBERT

por

Antonio Diego

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires en Diciembre de 1961

INTRODUCCION

Hilbert (1923) ha sido el primero en observar que un cierto conjunto de fórmulas del cálculo proposicional clásico, en las que sólo figura el conectivo de implicación, tomadas como axiomas, permitiría desarrollar un fragmento interesante del cálculo proposicional. Ese fragmento es conocido con el nombre de cálculo proposicional implicativo positivo y su estudio se inicia en el primer volumen de los " Grundlagen der Mathematik" de Hilbert y Bernays (1934).

Este sistema de la lógica puede ser estudiado con métodos específicamente algebraicos, desde que disponemos de su contraparte algébrica: la noción de modelo implicativo dada por Henkin (1950).

Siguiendo a A.Monteiro llamamos aquí álgebras de Hilbert a las álgebras duales de los modelos implicativos.

El objeto de este trabajo es dar solución a un problema relativo a las álgebras de Hilbert libres, planteado por Skolem (1952), el cual consiste en saber si las álgebras de Hilbert libres con número finito de generadores libres son finitas.

A esta cuestión damos una respuesta afirmativa e indicamos además, un procedimiento recursivo para la construcción de todas las álgebras libres con número finito de generadores libres, aplicándolo a los únicos casos dónde es posible, sin ayuda de máquinas, dar la construcción explícita: el álgebra trivial de un generador libre, la de dos generadores libres -ya calculada por Skolem- y la de tres generadores libres.

La idea clave de este procedimiento de construcción se debe a A.Monteiro, quien lo ha aplicado a la determinación de las álgebras de Heyting lineales libres con número finito de generadores libres (1960).

En la parte III exponemos el resultado mencionado y damos matrices características para los cálculos implicativos positivos con número finito de variables proposicionales.

En la parte I exponemos, sin pretensión de originalidad, algunas nociones y resultados que se necesitan para la comprensión del resto. Indicamos, dando respuesta a un problema que nos planteara A.Monteiro, una <u>definición ecuacional</u> de las álgebras de Hilbert. Una presentación de la teoría de las álgebras de Hilbert a partir de una definición por identidades tiene interés en algunos aspectos, en particular por el hecho de ser inmediatamente aplicables teoremas del álgebra universal válidos para las álgebras ecuacionalmente definibles, por ejemplo el que prueba la existencia de álgebras libres.

En la parte I, § 1, indicamos como ejemplo de álgebras de Hilbert a los conjuntos ordenados con último elemento, no sabemos si ésto ha sido observado antes.

En la parte II damos una caracterización útil de los sistemas deductivos irreductibles y se prueba la existencia de irreductibles minimales, lo que tiene gran interés para el estudio del mencionado problema de Skolem. Los dos teoremas de representación que damos en § 3 y § 4, parte II, no son necesarios en la parte III. Uno de estos teoremas es de representación topológica " tipo Stone" . Contrariamente a lo que sucede para las álgebras de Heyting, no se puede afirmar la casi-compacidad del espacio topológico de representación.

En una comunicación a las Sesiones Matemáticas de la U.M.A. (1960) hemos adelantado los principales resultados que exponemos aquí.

Mucho tenemos que agradecer a nuestro querido maestro A.Monteiro, bajo cuya dirección hemos realizado este trabajo, por la atención que nos prestara en el trascurso del mismo, por sus enseñanzas y sugerencias. También le agradecemos las oportunas observaciones que hiciera a su redacción.

Quedamos reconocidos al profesor L.Henkin y su discipula Carol R. Karp por sus útiles informaciones, y al profesor Gregorio Klimovsky, quien ha aceptado apadrinar este trabajo. Agradecemos también la colaboración del profesor Ruy Gomes, Darío Piccò, Samuel Silbering y Enrique E.Suardiaz.

Bahía Blanca, noviembre de 1961.-

PARTE I

1.- DEFINICION Y EJEMPLOS DE ALGEBRAS DE HILBERT

A) El concepto de álgebra de Hilbert tiene su origen en el sistema de la lógica llamado cálculo proposicional implicativo positivo, debido a Hilbert (1923), cuya definición es la siguiente:

A partir de un conjunto no vacío $\mathcal{G}$ de símbolos (variables proposicionales) y de los símbolos auxiliares "(", ")" , "$\longrightarrow$" , se construye el menor conjunto $\mathcal{F}$ de sucesiones finitas de estos símbolos, que verifique las propiedades:

f_1) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

f_2) Si $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{F}$.

Los elementos de $\mathcal{F}$ son llamados fórmulas (ó formas proposicionales).

Sea $\mathcal{D}$ la parte más pequeña de $\mathcal{F}$ tal que:

d_1) $\mathcal{D}$ contiene a todas las fórmulas de los tipos:

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$$
$$((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$$

donde α , β , γ ; son fórmulas arbitrarias(')

d$_2$) Si α ,$(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{D}$, entonces $\beta \in \mathcal{D}$.

Las fórmulas indicadas en d$_1$) se dicen <u>axiomas</u> y $\mathcal{D}$ se dice el conjunto de las <u>tesis</u> (ó <u>fórmulas demostrables</u>).

El sistema $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = (\mathcal{F}, \mathcal{D}, \rightarrow)$ es llamado el cálculo proposicional implicativo positivo con el conjunto $\mathcal{G}$ de variables proposicionales.

B) La noción de álgebra de Hilbert, dual de la introducida por Henkin (1950) es, justamente, la apropiada para el tratamiento algebráico de los cálculos $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

(') Estas fórmulas son dos de los axiomas del sistema de Frege (1879) para el cálculo clásico, la equivalencia de estos axiomas con los cuatro de Hilbert (1923) fue probada por Lukasiewicz (ver Lukasiewicz-Tarski (1930)).

DEFINICION 1: Sea A un conjunto, $1 \in A$, $\rightarrow$ una operación binaria sobre A. $(A,1,\rightarrow)$ se dice un álgebra de Hilbert si son verificados los axiomas:

h_1) $p \rightarrow (q \rightarrow p) = 1$

h_2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) = 1$

h_3) Si $p \rightarrow q = q \rightarrow p = 1$, entonces $p = q$

Damos el nombre de álgebras de Henkin a las álgebras de Hilbert duales(').

Como el mismo Henkin (1950) ha mostrado, identificando dos fórmulas α, β de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ cuando $(\alpha \rightarrow \beta)$ y $(\beta \rightarrow \alpha)$ son tesis, obtenemos un álgebra de Hilbert("). Por esta ra-

(') Luisa Iturrioz ha observado que el axioma M_3 de Henkin, que se traduce aquí por $x \rightarrow 1 = 1$, puede demostrarse a partir de h1, h_2, h_3 que son independientes. Salvo ésto, la dualidad y pequeños detalles de notación la Definición 1 es la dada por Henkin.

(") En esencia la construcción del álgebra de clases residuales es similar a la indicada por Ogasawara (1939) para el cálculo proposicional intuicionista.

zón es que decimos que la noción de álgebra de Hilbert es la apropiada para el estudio de los cálculos $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. A. Monteiro nos ha hecho notar que ésto puede hacerse en un sistema algebráico algo más general que los cálculos $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, lo que reporta economía en la exposición.

DEFINICION 2: <u>$(X, D, \to)$, donde $\emptyset \neq D \subseteq X$, y $\to$ es una operación binaria sobre X, se dice una pre-algebra de Hilbert si, cualesquiera sean $x,y,z \in X$, se tiene</u>:

1) $x \to (y \to x) \in D$

2) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \in D$

3) Si $x, x \to y \in D$, entonces $y \in D$.

Además de los cálculos $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = (\mathcal{F}, \mathcal{D}, \to)$, las álgebras de Hilbert, cuando se pone $D = \{1\}$, son pre-álgebras de Hilbert.

No es difícil (ver Ogasawara (1939)) la demostración de las propiedades 4) - 10) siguientes:

4) Si $y \in D$, entonces $x \to y \in D$

5) $x \to x \in D$

6) Si $x \to y$, $y \to z \in D$, entonces $x \to z \in D$

Escribiendo $x \subset y$ si y sólo si $x \to y \in D$, 5), 6) muestran que $\subset$ es una relación de pre-orden sobre X. 4) dice que cualquier elemento de D sigue a todos los elementos de X.

7) Si $z \subset x \to y$, entonces $z \to x \subset z \to y$

8) Si $z \subset x \to y$, entonces $x \subset z \to y$

9) Si $x \subset y$, entonces $z \to x \subset z \to y$

10) Si $x \subset y$, entonces $y \to z \subset x \to z$.

La relación $\subset$ induce una relación de equivalencia $\equiv$ sobre X: $x \equiv y$ si y sólo si $x \subset y$, $y \subset x$ $(x \to y, y \to x \in D)$

Si $A = (|x|)_{x \in X}$ es el conjunto de las clases de equivalencia $|x|$, relativas a $\equiv$, A resulta parcialmente ordenado por la relación $\leqslant$ inducida por $\subset$: $|x| \leqslant |y|$ si y sólo si $x \subset y$.

9) y 10) muestran inmediatamente que es posible algebrizar A por la operación: $|x| \to |y| = |x \to y|$.

Puede verse que D coincide con una de las clases de equivalencia módulo $\equiv$, y escribiendo $D = 1$ se tiene:

TEOREMA 1: <u>$(A, 1, \to)$ es un álgebra de Hilbert.</u>

Sea $G = (|g|)_{g \in G}$, y L (G) el álgebra obtenida a partir de la pre-álgebra de Hilbert $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = (\mathcal{F}', \mathcal{D}, \to)$ por el procedimiento indicado precedentemente.

DEFINICION 3: <u>L(G) se dirá el álgebra de Lindembaum del cálculo $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.</u>

C) Si A es un álgebra de Hilbert, los resultados anteriores aplicados a la pre-álgebra de Hilbert $(A,\{1\},\to)$, y h_3 que expresa que $x \equiv y$ (mód.$\{1\}$) equivale a $x = y$, permiten enunciar el

TEOREMA 2: <u>En un álgebra de Hilbert A, la relación $p \leqslant q$, definida por $p \to q = 1$, es una relación de orden sobre A, 1 es último elemento de A en este orden, y valen las siguientes propiedades</u>:

$h_1')$ $q \leqslant p \to q$
$h_2')$ $p \to (q \to r) \leqslant (p \to q) \to (p \to r)$
$h_4)$ $p \to 1 = 1$
$h_5)$ Si $p \leqslant q \to r$, entonces $q \leqslant p \to r$
$h_6)$ Si $p \leqslant q$, entonces $r \to p \leqslant r \to q$
$h_7)$ Si $p \leqslant q$, entonces $q \to r \leqslant p \to r$

Probaremos algunas reglas de cálculo:

$h_8)$ $p \to (q \to r) = q \to (p \to r)$

Por h_1' : $q \leqslant p \to q$
Por h_7 : $(p \to q) \to (p \to r) \leqslant q \to (p \to r)$

Utilizando h_2' se tiene

$$p\to(q\to r)\leqslant q\to(p\to r),$$

permutando p y q se obtiene la relación opuesta.

h_9) $p\to(q\to r) = (p\to q)\to(p\to r)$

Por h_1' : $q\leqslant p\to q$

Por h_7 : $(p\to q)\to r\leqslant q\to r$

Por h_6 : $p\to((p\to q)\to r)\leqslant p\to(q\to r)$

Por h_8 : $(p\to q)\to(p\to r) = p\to((p\to q)\to r)$

Luego $(p\to q)\to(p\to r)\leqslant p\to(q\to r)$

Teniendo en cuenta h_2' , se obtiene h_9 .

h_{10}) $(p\to q)\to((q\to p)\to p) = (q\to p)\to((p\to q)\to q)$

Por h_8 : $(p\to q)\to((q\to p)\to q) = (q\to p)\to((p\to q)\to q)$

Por h_9 : $((p\to q)\to((q\to p)\to p))\to((q\to p)\to((p\to q)\to q)) =$

$((p\to q)\to((q\to p)\to p))\to((p\to q)\to((q\to p)\to q)) =$

$(p\to q)\to(((q\to p)\to p)\to((q\to p)\to q)) =$

Por h_1 : $(p\to q)\to((q\to p)\to(p\to q)) = 1$

Luego $(p\to q)\to((q\to p)\to p)\leqslant(q\to p)\to((p\to q)\to q)$

Permutando p y q se obtiene la relación opuesta.

h_{11}) $p\leqslant(p\to q)\to q$

Resulta de $p\to q\leqslant p\to q$, teniendo en cuenta h_5

h_{12}) $1\to p = p$

Por h_{11}: $1\leqslant(1\to p)\to p$

Como 1 es último elemento de A $(1\to p)\to p = 1$, esto es $1\to p\leqslant p$.

La relación opuesta se obtiene de h_1' .

$$h_{13})\quad p\to(p\to r) = p\to r$$

Por h_9 : $p\to(p\to r) = (p\to p)\to(p\to r)$

$= 1\to(p\to r)$

Por h_{12}: $= p\to r.$

D) En la clase de todos los conjuntos algebrizados con una operación binaria fija (denotada "$\to$"), la subclase de las álgebras de Hilbert es <u>cerrada</u>, en el sentido de que contiene con cada álgebra todas sus imágenes homomórficas y todas sus subálgebras, y, con cada familia de álgebras su producto directo (ver § 2). En estas condiciones, se puede caracterizar a las álgebras de Hilbert como aquellas álgebras de la clase en consideración que verifican idénticamente un cierto conjunto (finito o infinito) de igualdades expresables en términos de la operación "$\to$" (ver Birkhoff, (1935)), ó como se dice: las álgebras de Hilbert son <u>ecuacionalmente definibles</u>.

A.Monteiro nos ha propuesto el problema de dar una definición ecuacional explícita de las álgebras de Hilbert.

DEFINICION 1': <u>$(A,\to)$ es llamada un álgebra de Hilbert si A es un conjunto no vacío, $\to$ una operación binaria sobre A, y son verificadas idénticamente las igualdades</u>:

(A) $(p\to p)\to p = p$

(B) $p \to p = q \to q$

(C) $p \to (q \to r) = (p \to q) \to (p \to r)$

(D) $(p \to q) \to ((q \to p) \to p) = (q \to p) \to ((p \to q) \to q)$

TEOREMA 3: <u>Las definiciones 1, 1' son equivalentes</u>.

DEMOSTRACION: Por (B), $p \to p$ es un elemento fijo de A, cuando p recorre A; poniendo $p \to p = 1$, veamos que $(A, 1, \to)$ es un álgebra de Hilbert en el sentido de la definición 1.

(A) puede escribirse en la forma $1 \to p = p$. h_3 se verifica, pues si $p \to q = q \to p = 1$, por (D) es

$$1 \to (1 \to p) = 1 \to (1 \to q)$$

luego
$$1 \to p = 1 \to q$$

y finalmente
$$p = q.$$

h_2 es consecuencia inmediata de (C). h_1 resulta de (C):

$$p \to (q \to p) = (p \to q) \to (p \to p) = ((p \to q) \to p) \to ((p \to q) \to p) = 1$$

Recíprocamente, si $(A, 1, \to)$ es un álgebra de Hilbert en el sentido de la definición 1, $(A, \to)$ lo es en el sentido de la definición 1'. En efecto, (B) resulta de ser $p \to p = 1$ elemento fijo de A; (A), (C), (D) son, respectivamente h_{12}, h_9, h_{10}.

OBSERVACION: Los axiomas (A), (B), (C) y (D) son independientes:

(a)

$\to$	0	1
0	1	1
1	1	1

(b)

$\to$	0	1
0	0	1
1	1	1

(c)

$\to$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	a
b	1	a	1

(d)

$\to$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	1
b	1	1	1

En la tabla (a) (respectivamente (b), (c), (d)) (A) (respectivamente (B), (C), (D)) falla y los restantes axiomas son verificados.

E) Indicamos ahora algunos ejemplos de álgebras de Hilbert.

1º) <u>Algebras de Heyting</u>

Sea A un reticulado tal que, para cada par de elementos $a,b \in A$, existe un elemento $c \in A$ con la propiedad de ser máximo entre los $x \in A$ tales que $a \wedge x \leq b$. Poniendo $c = a \to b$ se prueba que $(A, \to)$ es un álgebra de Hilbert. Estos reticulados han sido considerados por primera vez por M.Ward (1938), con el nombre de "estructuras residualmente cerradas" (son los llamados relativamente pseudo-complementados por G.Birkhoff (1948)) (')

Si en A hay primer elemento, tenemos lo que es llamada un <u>álgebra de Heyting</u>. El reticulado $\mathcal{H}$ de los abiertos de un espacio topológico X es un caso particularmente interesante de álgebra de Heyting (M.Stone (1937) - A.Tarski (1938)). Si $G_1, G_2 \in \mathcal{H}$, la operación $\rightarrow$ se expresa en la forma:

$$G_1 \rightarrow G_2 = \text{int}\,((X - G_1) \cup G_2) .$$

2º) <u>Conjuntos ordenados con último elemento</u>.

Sea A un conjunto ordenado por la relación $\leqslant$, con último elemento 1.

Definiendo sobre A la operación $\rightarrow$ por:

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1, \text{ si } & x \leqslant y \\ \\ y, \text{ si } & x \nleqslant y \end{cases}$$

puede verificarse que $(A, \rightarrow)$ es un álgebra de Hilbert. El orden inducido por la operación $\rightarrow$ en A coincide, como es evidente con el orden natural de A.

3º) <u>Algebras de Lindenbaum de los cálculos implicativos positivos</u>.

(') Un ejemplo algo más general se obtiene suponiendo que A es un inf-reticulado. Estas álgebras fueron estudiadas por H Curry (1952).

Las figuras 1 y 2 siguientes muestran la disposición ordinal de los elementos de las álgebras de Lindenbaum de los cálculos $\mathcal{L}(\{g_1\})$ y $\mathcal{L}(\{g_1,g_2\})$, de una y dos variables proposicionales, respectivamente. Se ha puesto

$$a = |g_1| \quad , \quad b = |g_2| \;.$$

El álgebra de la figura 1 es de obtención inmediata, no así la de la figura 2, cuya determinación, así como la correspondiente tabla, se debe a T.Skolem (1952).

Fig. 1

Tabla 1

$\rightarrow$	a	1
a	1	1
1	a	1

Fig. 2

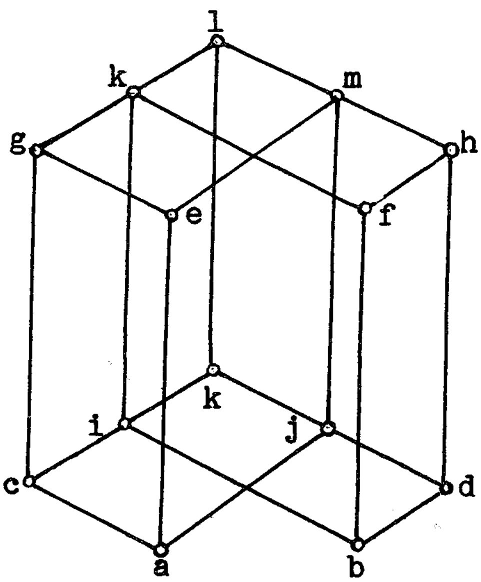


Tabla 2

→	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	l
a	l	h	l	h	l	h	l	h	l	l	l	l	l	l
b	g	l	g	l	g	l	g	l	l	l	l	l	l	l
c	m	h	l	h	m	h	l	h	l	m	l	m	l	l
d	g	k	g	l	g	k	g	l	k	l	k	l	l	l
e	n	d	n	d	l	h	l	h	n	n	l	l	n	l
f	c	n	c	n	g	l	g	l	n	n	l	l	n	l
g	j	d	n	d	m	h	l	h	n	j	l	m	n	l
h	c	i	c	n	g	k	g	l	i	n	k	l	n	l
i	e	h	g	h	e	h	g	h	l	m	l	m	l	l
j	g	f	g	h	g	f	g	h	k	l	k	l	l	l
k	a	d	c	d	e	h	g	h	n	j	l	m	n	l
m	c	b	c	d	g	f	g	h	i	n	k	l	n	l
n	e	f	g	h	e	f	g	h	k	m	k	m	l	l
l	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	l

OBSERVACION: Los ejemplos indicados permiten constatar el siguiente hecho: dos operaciones distintas de "implicación" definidas sobre un conjunto A, pueden inducir en él, el mismo orden. Así, si A es el álgebra de Boole de cuatro elementos, las operaciones definidas en los ejemplos 1º) y 2º) sobre A, no coinciden.

NOTA: En lo que sigue, para abreviar, llamaremos, a veces, "álgebras" a las "álgebras de Hilbert".

2.- HOMOMORFISMOS. SISTEMAS DEDUCTIVOS. SUB-ALGEBRAS. PRODUCTO DIRECTO.

A) Dadas dos álgebras A, B llamaremos <u>homomorfismo</u> de A en B a toda aplicación $h: A \longrightarrow B$ tal que

$$h(x \rightarrow y) = h(x) \rightarrow h(y), \text{ cualesquiera sean } x, y \in A.$$

En particular, si h es una inyección (respectivamente una aplicación sobre), h se dirá un <u>monomorfismo</u> (respectivamente <u>epimorfismo</u>). h se dirá un <u>isomorfismo</u> si es a la vez mono y epimorfismo

El conjunto $N(h)$ de los $x \in A$ tales que $h(x) = 1$ se dirá el núcleo del homomorfismo h. h es un monomorfismo si y sólo si $N(h) = \{1\}$.

$D = N(h)$ tiene las siguientes propiedades:

D_1) $1 \in D$

D_2) Si $x, x \rightarrow y \in D$, entonces $y \in D$.

DEFINICION 4: <u>Una parte D de un álgebra A verificando D_1) y D_2) se dirá un sistema deductivo (s.d.)de A</u>(')

(') Esta noción corresponde a la del mismo nombre dada por Lukasiewicz-Tarski (1930), para el cálculo proposicional.

A y $\{1\}$ son ejemplos triviales de s.d. de A. Todo s.d. $D \neq A$ se dirá propio.

Notemos que los s.d. de A son secciones superiores de A, esto es, si $x \in D$, $x \leqslant y$, entonces $y \in D$.

Si D es un s.d. de A, $(A, D, \to)$ es una pre-álgebra de Hilbert. Sea $B = (|x|)_{x \in A}$ el álgebra obtenida como en teorema 1.

TEOREMA 4 (A.Monteiro): La aplicación $h: A \to B$, definida por $h(x) = |x|$, es un epimorfismo de núcleo D.

B se dice el álgebra cociente de A por D, $B = A/D$ y h el homomorfismo canónico relativo a D(').

El siguiente lema será de aplicación frecuente:

LEMA 1: Sean $h: A \to B$ un epimorfismo y $g: A \to C$ un homomorfismo

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

(') En las álgebras de Heyting los s.d. coinciden con los filtros, A.Monteiro (1954).

<u>$N(h) \subseteq N(g)$ equivale a decir que existe un único homomorfismo $f:B \longrightarrow C$ tal que $f \circ h = g$.</u>
<u>Además, f es epimorfismo si g es epimorfismo y f es monomorfismo si y solo si $N(h) = N(g)$.</u>

En el caso de ser h,g epimorfismos, $N(h) = N(g)$, equivale a la existencia de un único isomorfismo $f:B \longrightarrow C$ tal que $f \circ h = g$. En caso tal convendremos en identificar las álgebras B y C y los homomorfismos h y g.

B) Una parte S no vacía de un álgebra A se dice una <u>sub-álgebra</u> de A, si de $x,y \in S$ se sigue $x \rightarrow y \in S$. Esto equivale a decir que $(S, \rightarrow)$ es un álgebra de Hilbert, y también que la inclusión natural $i:S \longrightarrow A$ es un monomorfismo .

Las secciones superiores S de A, y en particular los s.d. de A, son sub-álgebras. En efecto, si $x,y \in S$, de $y \leqslant x \rightarrow y$ (h_1'), se sigue $x \rightarrow y \in S$.

Debe notarse que 1 es elemento de toda sub-álgebra, puesto que si $x \in S$, $x \rightarrow x = 1 \in S$.

Imágenes directas e inversas, por homomorfismos, de sub-álgebras son sub-álgebras.

C) El conjunto A^* de todos los s.d. de A, ordenado por la relación de inclusión, $\subseteq$, de las partes de A, es un reticulado completo cuyo primer elemento es $\{1\}$ y cuyo último elemento es A .

El ínfimo de una familia $(D_i)_{i \in I}$ de s.d. de A es el s.d. $\bigcap_{i \in I} D_i$, intersección de los s.d. D_i .

Si K es una parte de A, la intersección $[K]$ de todos los s.d. que contienen K se dice el <u>s.d. engendrado por K</u> .

El supremo de una familia $(D_i)_{i \in I}$ de s.d. de A es entonces $\bigvee_{i \in I} D_i = \left[\bigcup_{i \in I} D_i\right]$.

$D_1 \cap D_2$, $D_1 \vee D_2$ designarán, respectivamente, ínfimo y supremo de los s.d. D_1 , D_2 .

Se debe a Tarski (1930) el siguiente

LEMA 2: <u>$[K]$ coincide con la reunión de todos los s.d. $[F]$, dónde F recorre las partes finitas de K</u> .

D) Ciertos homomorfismos de A en A (endomorfismos) sobre los cuales A.Monteiro ha llamado la atención, son importantes:

DEFINICION 5: <u>Para cada $a \in A$, la aplicación h_a, $h_a: A \longrightarrow A$ definida por $h_a(x) = a \to x$, es un endomorfismo (ver h_9), al que se dá el nombre de endomor-</u>

<u>fismo principal relativo al elemento a.</u>

El núcleo del endomorfismo h_a es el s.d.

$$D(a) = \{x;\ a \to x = 1\} = \{x;\ a \leqslant x\}.$$

D(a) es, puesto que los s.d. son secciones superiores, el s.d. más pequeño que contiene al elemento a, esto es, $D(a) = [a]$. D(a) se dirá el <u>s.d. principal</u> generado por a.

El siguiente lema es una versión del teorema de la deducción:

LEMA 3: $\underline{\{x;\ a \to x \in D\} = D(a) \vee D}$.

DEMOSTRACION: Pongamos $D' = \{x;\ a \to x \in D\}$. Es inmediato que (i) $D' \subseteq D(a) \vee D$, puesto que si $x \in D'$, entonces $a \to x \in D \subseteq D(a) \vee D$, y como $a \in D(a) \vee D$, por la propiedad D_2 , $x \in D(a) \vee D$.

Para ver (ii) $D(a) \vee D \subseteq D'$, es suficiente mostrar que D' es un s.d. que contiene á a y D .

Veamos primero que D' es un s.d., es decir que se verifican D_1 y D_2 .

$1 \in D'$, porque $a \to 1 = 1 \in D$.

Si $x, x \to y \in D'$, esto es si

$$a \to x,\ a \to (x \to y) = (a \to x) \to (a \to y) \in D,$$

aplicando D_2 , $a \to y \in D$, es decir $y \in D'$.

D' contiene al elemento a, pues $a \to a = 1 \in D$.
$D \subseteq D'$, pues si $x \in D$, como $x \leqslant a \to x$ (h_1'), es $a \to x \in D$, esto es, $x \in D'$.

Por recurrencia se deduce

COROLARIO:

$$D(a_1) \vee D(a_2) \vee \ldots D(a_n) = \{x; a_1 \to (a_2 \to (\ldots(a_n \to x)\ldots) = 1\}$$

Sea A un álgebra de Hilbert y D un s.d. de A. Interesa saber en que condiciones existe una sub-álgebra S de A, tal que S contiene un, y sólo un, elemento, de cada clase lateral módulo D. Si esto ocurre S es, evidentemente, isomorfa á A/D.

Al respecto damos el siguiente

LEMA 4: <u>Si en cada clase lateral módulo D existe un elemento máximo, el conjunto S de tales elementos máximos, es una sub-álgebra de A.</u>

DEMOSTRACION: Basta probar que si a,b son respectivamente máximos de las clases módulo D: $|a|$, $|b|$, y m el máximo de $|a \to b|$, entonces $m = a \to b$.

De $m \to (a \to b) \in D$, resultan inmediatamente

$$(m \to (a \to b)) \to a \in |a|$$

$$(m \to (a \to b)) \to b \in |b|,$$

y siendo a,b máximos en $|a|$, $|b|$:

$$(m \to (a \to b)) \to a \leqslant a$$

$$(m \to (a \to b)) \to b \leqslant b \ .$$

Por h_1' , se tienen las relaciones opuestas, luego

$$(m \to (a \to b)) \to a = a$$

$$(m \to (a \to b)) \to b = b \ .$$

Utilizando h_9 , tenemos

$$(m \to (a \to b)) \to (a \to b) = a \to b$$

Por h_{11}:

$$m \leqslant (m \to (a \to b)) \to (a \to b) = a \to b \ ,$$

siendo m máximo en $|a \to b|$ es $m \geqslant a \to b$, y, por lo tanto $m = a \to b$.

Por ejemplo, cuando todas las clases de equivalencia módulo D, excluída D misma, son finitas, se puede asegurar la existencia de máximo en cada clase. En efecto, D tiene el elemento máximo 1 . Para $|x| \neq D$ basta notar que para cada dos elementos $x', x'' \in |x|$ existe un $y \in |x|$ tal que $x' \leqslant y$, $x'' \leqslant y$. Tomamos el elemento $y = (x' \to x'') \to x''$ que pertenece a $|x|$ y sigue a x', x'' , por h_{11} y h_1' .

Nosotros aplicaremos el Lema 4 a las álgebras finitas donde, por lo anterior, todo cociente A/D puede ser representado por la sub-álgebra constituída por los elementos máximos de cada clase módulo D .

La hipótesis del Lema 4 se verifica también en el caso de ser D un s.d. finitamente generado, como ha sido probado por A.Monteiro.

E) Dada una familia $(A_i)_{i\in I}$ de álgebras de Hilbert, el producto cartesiano $A = \prod_{i\in I} A_i$, con la operación $\rightarrow$, definida por

$$(a_i)_{i\in I} \rightarrow (b_i)_{i\in I} = (a_i \rightarrow b_i)_{i\in I} \quad ,$$

es un álgebra de Hilbert, que es llamada el <u>producto directo</u> de las álgebras A_i .

Las funciones proyección $\pi_i : A \rightarrow A_i$ son epimorfismos.

Dada un álgebra B y un conjunto $\{h_i\}_{i\in I}$ de epimorfismos $h_i : B \rightarrow A_i = B/N(h_i)$, la aplicación h de B en el producto directo $A = \prod_{i\in I} A_i$, definida para cada $b \in B$, por

$$h(b) = (h_i(b))_{i\in I} \, ,$$

es un homomorfismo $h: B \rightarrow A$ de núcleo $N(h) = \bigcap_{i\in I} N(h_i)$.

h, entonces, es un monomorfismo si y sólo si

$$\bigcap_{i\in I} N(h_i) = \{1\} \quad .$$

En este caso se dice que el conjunto $\{h_i\}_{i\in I}$, ó el correspondiente conjunto de s.d. $\{N(h_i)\}_{i\in I}$, es <u>separador</u>.

3.- GENERADORES. ALGEBRAS LIBRES.

A) Dada una parte K de un álgebra de Hilbert A, la intersección $\bar{K}$ de todas las sub-álgebras de A que contienen K es una sub-álgebra de A, á la cual se dá el nombre de sub-álgebra generada por K. K se dice un conjunto de generadores de $\bar{K}$.

$\bar{K}$ coincide con el conjunto de todos los elementos de A que se obtienen aplicando reiteradamente la operación $\longrightarrow$, a partir de los elementos de K.

Un homomorfismo $h:A \longrightarrow B$ queda unívocamente determinado por las imágenes de un conjunto de generadores de A. Esto es, si $\bar{K} = A$ y $h,h':A \longrightarrow B$ son tales que $h(x) = h'(x)$ para todo $x \in K$, entonces $h = h'$.

El teorema siguiente dá alguna información sobre la ubicación ordinal de los generadores de un álgebra de Hilbert. Sea $\bar{K} = A$ y sean $m(A)$, $m(K)$ los conjuntos de elementos minimales de A, K respectivamente; esto es, de los elementos de A,K (resp.) que no son precedidos propiamente por ningún elemento de A,K (resp.).

TEOREMA 5: $m(A) = m(K)$.

DEMOSTRACION: i) $m(A) \subseteq m(K)$.

Sea $x \in m(A)$. Para probar que $x \in m(K)$ es suficiente mostrar que $x \in K$.

El conjunto $A - \{x\}$ es una sección superior de A, luego una sub-álgebra. Si $x \notin K$, $K \subseteq A - \{x\}$ y por lo tanto $A = \overline{K} = A - \{x\}$, lo que es absurdo. Luego $x \in K$.

ii) $m(K) \subseteq m(A)$.

Sea $x \in m(K)$. El conjunto $S = \{y;\ y \not< x\}$ es una sección superior de A, y por lo tanto, una sub-álgebra de A.

Como x es minimal en K, para todo $k \in K$, $k \not< x$, luego $K \subseteq S$. Por consiguiente $A = \overline{K} = S$, esto es, para todo $y \in A$, $y \not< x$, luego $x \in m(A)$.

COROLARIO: $K = m(A)$ si y sólo si los elementos de K son incomparables dos a dos (esto es, si $a,b \in K$, ni $a \leqslant b$, ni $b \leqslant a$).

Por el teorema, $K = m(A)$ equivale a $K = m(K)$, y estos es lo mismo que decir que los elementos de K son incomparables dos a dos.

B) DEFINICION 6: <u>Diremos que L es un álgebra de Hilbert libre, con G como conjunto de generadores libres, si toda aplicación del conjunto de generadores G en un álgebra de Hilbert A arbitraria, puede prolongarse a un homomorfismo $h: L \longrightarrow A$</u> .

El homomorfismo h está unívocamente determinado por la condición $h(g) = f(g)$, para todo $g \in G$.

Siendo las álgebras de Hilbert ecuacionalmente definibles, existen álgebras libres con un conjunto arbitrario de generadores libres, y cada dos álgebras libres con conjuntos de generadores libres de igual número cardinal son isomorfas. (Birkhoff (1935)).

Henkin (1950) ha probado que el álgebra de Lindenbaum $L(G)$ del cálculo proposicional implicativo positivo $\mathcal{L}(G)$ es precisamente el álgebra libre con el conjunto G de generadores libres.

c) Sea $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = (\mathcal{F}, \mathcal{D}, \to)$, $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in I}$, $L(G)$ la correspondiente álgebra de Lindenbaum y sea A un álgebra de Hilbert arbitraria.

Consideremos la familia $F_A = (\alpha_A)_{\alpha \in \mathcal{F}}$, de funciones $\alpha_A : A^I \longrightarrow A$, definida recursivamente por

1) $(g_i)_A = \Pi_i$ (i-ésima proyección de A)

2) $(\alpha \to \beta)_A \quad \alpha_A \to \beta_A$.

F_A coincide con la sub-álgebra de A^{A^I} engendrada por las proyecciones Π_i de A^I .

$\alpha \in \mathcal{F}$ se dice <u>válida</u> en A si $\alpha_A(x) = 1$, para todo $x \in A^I$. Si $\mathcal{D}(A)$ indica el conjunto de todas las fórmulas válidas en A, se ve que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(A)$.

Cuando $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A)$ se dice que A es un álgebra (ó matriz) característica de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Sea $\sigma : L(G) \longrightarrow F_A$ la aplicación definida por

$\sigma(|\alpha|) = \alpha_A$

Se verifica que σ es un epimorfismo tal que

$\sigma(|g_i|) = \Pi_i$

Puesto que $N(\sigma) = \{ |\alpha| \; ; \; \alpha \in D(A) \}$ se tiene que es un isomorfismo si y sólo si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}$, esto es, si y sólo si A es álgebra característica de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Este resultado puede enunciarse en la forma siguiente:

Sea L el álgebra libre con el conjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ de generadores libres y $\sigma : L \longrightarrow F_A$ el homomorfismo unívocamente determinado por la condición $\sigma(a_i) = \Pi_i$

LEMA 5: <u>σ es un isomorfismo si y sólo si A es matriz característica del cálculo $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.</u>

D) Cabe preguntarse si en un álgebra libre L pueden existir dos conjuntos G,G' distintos, de generadores libres.

Esto no puede suceder desde que, cada dos generadores libres son incomparables y, por el corolario de Teorema 5, G y G' deben coincidir con el conjunto de los elementos minimales de L.

Sean $g', g'' \in G$, $f : G \longrightarrow A$ una aplicación en el álgebra de Hilbert A de la figura 1, tal que $f(g') = 1$,

$f(g'') =$ a, y sea h el homomorfismo prolongación de f .

$g' \rightarrow g'' \neq 1$, porque

$h(g' \rightarrow g'') = h(g') \rightarrow h(g'') = f(g') \rightarrow f(g'') = 1 \rightarrow a = a \neq 1.$

Luego g' no precede a g'', y análogamente se ve que g'' no precede a g' .

PARTE II

1.- DISTRIBUTIVIDAD DEL RETICULADO DE LOS SISTEMAS DEDUCTIVOS.

Probaremos que en el reticulado A^* de los s.d. del álgebra de Hilbert A vale la ley distributiva infinita:

TEOREMA 6: $\underline{D \cap \bigvee_{i \in I} D_i = \bigvee_{i \in I} (D \cap D_i)}$.

DEMOSTRACION: Veamos primero el caso particular:

(1) $\quad D \cap (D_1 \vee D(a)) = (D \cap D_1) \vee (D \cap D(a))$.

Basta mostrar la inclusión no trivial:

$$D \cap (D_1 \vee D(a)) \subseteq (D \cap D_1) \vee (D \cap D(a)).$$

Sea $x \in D \cap (D_1 \vee D(a))$, esto es $x \in D$, $x \in D \vee D(a)$.

Consideremos los elementos:

$$r = a \to x \qquad y \qquad s = (a \to x) \to x = r \to x.$$

$r \in D$, porque $r = a \to x \geq x \in D$. $r \in D_1$, porque de $x \in D_1 \vee D(a)$ se sigue, por Lema 3, $r = a \to x \in D_1$. En consecuencia:

(2) $\quad r \in D \cap D_1$.

De $a \leq (a \to x) \to x$, $x \leq (a \to x) \to x$ $(h_{11}$ y $h_1^1)$, resulta $s \in D(a)$ y $s \in D$, esto es,

(3) $\quad s \in D \cap D(a)$.

De (2) y (3):

$$D(r) \vee D(s) \subseteq (D \cap D_1) \vee (D \cap D(a)).$$

Como $r \to x = s \in D(s)$, aplicando Lema 3: $x \in D(r) \vee D(s)$, luego

$$x \in (D \cap D_1) \vee (D \cap D(a)).$$

Esto termina la demostración de (1) .

Aplicando reiteradamente la fórmula (1) se demuestra

(4) $D \cap (D(a_1) \vee \ldots \vee D(a_n)) = (D \cap D(a_1) \vee \ldots \vee (D \cap D(a_n))$.

Veamos ahora el caso general. Será suficiente probar la inclusión no trivial:

$$D \cap \bigvee_{i \in I} D \subseteq \bigvee_{i \in I} (D \cap D).$$

Sea $x \in D \cap \bigvee_{i \in I} D_i$, esto es,

$$x \in D \ , \ x \in \bigvee_{i \in I} D_i = \left[\bigcup_{i \in I} D_i\right] .$$

De $x \in \left[\bigcup_{i \in I} D_i\right]$ resulta, aplicando Lema 2, que existe una parte finita $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de $\bigcup_{i \in I} D_i$, tal que $x \in [F] = D(a_1) \vee \ldots \vee D(a_n)$. Luego x es un elemento tal que $x \in D \cap (D(a_1) \vee \ldots \vee D(a_n))$.

Aplicando (4):

$$x \in (D \cap D(a_1)) \vee \ldots \vee (D \cap D(a_n)).$$

Sea $a_k \in D_{i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $i_k \in I$. Como $D(a_k) \subseteq D_{i_k}$, tenemos:

$$x \in (D \cap D_{i_1}) \vee \ldots \vee (D \cap D_{i_n}).$$

Finalmente de $(D \cap D_{i_1}) \vee \ldots \vee (D \cap D_{i_n}) \subseteq \bigvee_{i \in I} (D \cap D_i)$,

$$x \in \bigvee_{i \in I} (D \cap D_i).$$

OBSERVACION: En un reticulado, la ley distributiva del supremo respecto del ínfimo (finito):

$$D \vee (D_1 \cap D_2) = (D \vee D_1) \cap (D \vee D_2)$$

es una consecuencia de la ley distributiva dual.

Es un hecho bien conocido que la ley distributiva del supremo respecto de ínfimos infinitos no vale en general en el reticulado de los filtros de un álgebra de Heyting. Por consiguiente esta ley no es válida en el reticulado de los sistemas deductivos de un álgebra de Hilbert.

2. SISTEMAS DEDUCTIVOS IRREDUCTIBLES Y COMPLETAMENTE IRREDUCTIBLES

A)

DEFINICION 7: Un s.d. propio D de un álgebra de Hilbert A se dice irreductible si y sólo si $D = D_1 \cap D_2$ implica $D = D_1$ ó $D = D_2$.
Es decir, si no es posible expresar D como intersección de dos s.d. distintos de D.

Los s.d. irreductibles D, pueden ser caracterizados como aquellos s.d. tales que $A - D$ es filtrante superiormente.

TEOREMA 7: Para que un s.d. D sea irreductible es necesario y suficiente que, dados $a,b \in A - D$ exista $c \in A - D$ tal que $a \leq c$, $b \leq c$.

DEMOSTRACION: a) Es necesario:

Sea D un s.d. irreductible y $a,b \in A - D$. Supongamos por el absurdo que todo x tal que $a \leq x$, $b \leq x$, sea un elemento de D, esto es, que $D(a) \cap D(b) \subseteq D$, es decir $D = D \vee (D(a) \cap D(b))$.

Como A^* es distributivo[']

['] Para una demostración directa, sin recurrir al Teorema 6, bas-

$$D = (D \vee D(a)) \cap (D \vee D(b)) \quad .$$

Es claro que $D \vee D(a) \neq D$ y $D \vee D(b) \neq D$, puesto que $a,b \in A \quad D$. Esto muestra que D no es irreductible, lo que contradice la hipótesis.

b) Es suficiente:

Sea D un s.d. tal que cualesquiera sean $a,b \in A - D$, existe un $c \in A - D$ tal que $a \leqslant c$, $b \leqslant c$.

Si, por el absurdo, no fuese D irreductible, existirían $D_1, D_2 \in A^*$ tales que $D = D_1 \cap D_2$, $D \neq D_1$ y $D \neq D_2$.

Tomemos $a \in D_1 - D$, $b \in D_2 - D$, y sea c tal que $a \leqslant c$, $b \leqslant c$, $c \in A - D$.

Se tiene entonces:

$c \in D_1$, puesto que $a \in D_1$, $a \leqslant c$; análogamente $c \in D_2$, luego

---

ta probar la fórmula

$$D \vee (D(a) \cap D(b)) = (D \vee D(a)) \cap (D \vee D(b)) \ .$$

Es suficiente mostrar la inclusión no trivial

$$D \vee (D(a) \cap D(b)) \supseteq (D \vee D(a)) \cap (D \vee D(b)) \ .$$

Sea $x \in D \vee D(a)$, $x \in D \vee D(b)$

Por Lema 3: $a \to x$, $b \to x \in D$

Utilizando h_{11} y h_1' :

(1) $a \leqslant (a \to x) \to x \leqslant (b \to x) \to ((a \to x) \to x)$.

Análogamente $b \leqslant (a \to x) \to ((b \to x) \to x)$.

Utilizando h_8:

(2) $b \leqslant (b \to x) \to ((a \to x) \to x)$.

De (1) y (2): $(b \to x) \to ((a \to x) \to x) \in D(a) \cap D(b) \subseteq D \vee (D(a) \cap D(b))$.

Como $a \to x$, $b \to x \in D \subseteq D \vee (D(a) \cap D(b)$, resulta

$$x \in D \vee (D(a) \cap D(b)).$$

$c \in D_1 \cap D_2 = D$, lo que contradice $c \in A - D$.

B) Los sistemas deductivos irreductibles minimales cuya existencia pasaremos a demostrar, desempeñan un papel principal en la construcción de las álgebras de Hilbert libres que veremos en la Parte III .

Entendemos por un <u>s.d. irreductible minimal</u>, un s.d. irreductible que no contiene, como parte propia, ningún s.d. irreductible.

TEOREMA 8: <u>Dado un s.d. irreductible D, existe un s.d. irreductible minimal P tal que $P \subseteq D$</u> .

DEMOSTRACION: La familia de todos los s.d. irreductibles contenidos en D es inductiva inferiormente (en el orden de inclusión), como se prueba aplicando el Teorema 7.

La conclusión se obtiene por el Lema de Zorn.

C)

DEFINICION 8: <u>Un s.d. propio D del álgebra de Hilbert A, se dice completamente irreductible si y sólo si $D = \bigcap_{i \in I} D_i$ implica que existe $i \in I$ tal que $D = D_i$</u> .

<u>Es decir, si no es posible expresar D como intersección de sistemas deductivos distintos de D</u> .

Es claro que los s.d. completamente irreductibles son irreductibles.

Se prueba sin dificultad el siguiente

LEMA 6: <u>$M \in A^*$ es completamente irreductible si y sólo si existe $a \notin M$ tal que M es un s.d. maximal entre los s.d. que no contienen al elemento a</u>.

La existencia de s.d. completamente irreductibles es asegurada por el

LEMA 7: <u>Dado un sistema deductivo (propio) D y un elemento $a \notin D$, existe un s.d. M maximal entre los s.d. que contienen a D y no contienen al elemento a</u>.

De los lemas anteriores resulta:

TEOREMA 9: <u>Dado $D \in A^*$ y $a \notin D$ existe un s.d. completamente irreductible M tal que $a \notin M$, y $D \subseteq M$</u> .

COROLARIO 1: <u>Si $a, b \in A$ y $b \nleq a$ existe un s.d. completamente irreductible M tal que $a \notin M$, $b \in M$.</u>

Basta considerar $D = D(b)$, $a \notin D(b)$.

COROLARIO 2: Son conjuntos separadores:

a) El de todos los s.d. completamente irreductibles

b) El de todos los s.d. irreductibles

c) El de todos los s.d. irreductibles minimales.

COROLARIO 3: Toda álgebra de Hilbert A es isomorfa a una sub-álgebra del producto directo de todos los cocientes A/D, donde D recorre alguno de los conjuntos a), b), c), precedentemente indicados.

Por razones de brevedad, en lo que sigue, la expresión "M es un s.d. maximal entre los s.d. que no contienen al elemento a" será sustituída por el "el s.d. M es máximo respecto de a".

El siguiente teorema de A.Monteiro, caracteriza en términos de la operación $\rightarrow$, los s.d. máximos respecto de un elemento fijo .

TEOREMA 10: El s.d. M es máximo respecto de a si y sólo si

1) $a \notin M$

2) para todo $x \notin M$, $x \rightarrow a \in M$.

OBSERVACION: El conjunto $\mathcal{P}$ de todos los s.d. irreductibles minimales de un álgebra finita A es minimal en el sentido de no poseer partes propias que sean separadoras. En efecto, veamos que si $Q \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} - \{Q\}$ no es separador. Si $a \neq 1$ es el elemento máximo de $A - Q$ (que existe en virtud del teorema 7), todo s.d. $P \in \mathfrak{P} - \{Q\}$ contiene al elemento a , puesto que, como $P \not\subseteq Q$, existe un $b \in P - Q$, luego $b \leqslant a$ y se tiene $a \in P$.

3.- REPRESENTACION TOPOLOGICA .

Probamos en este párrafo que toda álgebra de Hilbert es isomorfa a una sub-álgebra del álgebra de Hilbert de todos los abiertos de un espacio topológico, siguiendo la pauta del teorema análogo probado por M.Stone (1937) para las álgebras de Heyting(') .

Sea X un conjunto (fijo) de sistemas deductivos propios del álgebra de Hilbert A que contenga al conjunto de todos los s.d. completamente irreductibles de A .

A cada elemento $a \in A$ hagamos corresponder el conjunto de todos los s.d. $P \in X$ que contienen al elemento a :

$$\varphi(a) = \{ P \; ; \; a \in P \in X \} .$$

Sea $\mathcal{A} = (\varphi(a))_{a \in A}$ y $\mathcal{H}$ el conjunto de todos los abiertos de una topología sobre X engendrados por $\mathcal{A}$.

Consideremos el álgebra de Hilbert $(\mathcal{H}, \rightarrow)$ dónde la operación de implicación es dada por

$$G_1 \rightarrow G_2 = \operatorname{int}((X - G_1) \cup G_2) .$$

(') Carol R.Karp nos ha comunicado recientemente que ha demostrado un teorema de representación de este mismo tipo.

TEOREMA 11: <u>La aplicación $\varphi : A \to \mathcal{H}$ es un monomorfismo. Además, el espacio topológico $(X, \mathcal{H})$ verifica el axioma T_0</u>.

DEMOSTRACION: 1) φ es una aplicación biunívoca de A en $\mathcal{H}$..

Sean $a, b \in A$, $a \neq b$. Entonces, ó bien $a \nleq b$ ó $b \nleq a$. Supongamos que $a \nleq b$. Por Corolario 1, Teorema 9, existe un s.d. completamente irreductible P, y por lo tanto $P \in X$, tal que $a \in P$, $b \notin P$, esto es, $P \in \varphi(a)$, $P \notin \varphi(b)$. Por consiguiente $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. La misma conclusión se obtiene para $b \nleq a$.

2) φ es un homomorfismo.

Debemos mostrar que, dados $a, b \in A$, se tiene $\varphi(a \to b) = \varphi(a) \to \varphi(b) = \mathrm{int}((X - \varphi(a)) \cup \varphi(b))$.

(i) $\varphi(a \to b) \subseteq \mathrm{int}((X - \varphi(a)) \cup \varphi(b))$.

Probaremos que $\varphi(a \to b) \subseteq ((X - \varphi(a)) \cup \varphi(b))$, la inclusión (i) resultará inmediatamente tomando interior de ambos miembros.

Sea $P \in \varphi(a \to b)$, esto es $a \to b \in P$.

Si $a \in P$, de $a, a \to b \in P$, resulta $b \in P$, o sea $P \in \varphi(b)$. Si $a \notin P$, $P \notin \varphi(a)$, esto es $P \in X - \varphi(a)$. En cualquier hipótesis, $P \in (X - \varphi(a)) \cup \varphi(b)$.

(ii) $\mathrm{int}((X - \varphi(a)) \cup \varphi(b)) \subseteq \varphi(a \to b)$.

Sea $P \in \mathrm{int}((X - \varphi(a)) \cup \varphi(b))$. Existe, entonces, un número finito de abiertos de $\mathcal{A}$, $\varphi(c_1),\ldots,\varphi(c_n)$, tales que

$P \in \varphi(c_1) \cap \ldots \cap \varphi(c_n) \subseteq (X - \varphi(a)) \cup \varphi(b)$.

Esto quiere decir que existen $c_1,\ldots, c_n \in P$, tales que, para todo $Q \in X$, si $c_1,\ldots, c_n \in Q$, entonces $a \in Q$ ó $b \notin Q$. En particular: $a \in P$ ó bien $b \notin P$.

Si de esta disyuntiva se dá $b \notin P$, entonces, como $b \leqslant a \to b$, se tiene $a \to b \notin P$.

Si se dá $a \in P$, también $a \to b \in P$. En efecto, si $a \to b \notin P$, por Lema 3, $b \notin D(a) \vee P$. Pero esto es imposible, pues si Q es un s.d. completamente irreductible que contiene a $D(a) \vee P$ y no contiene $a \to b$ (Teorema 9), se tiene:

$Q \in X$, $c_1,\ldots, c_n \in Q$, $a \in Q$ y $b \notin Q$.

En cualquier caso, entonces, es $a \to b \in P$, esto es $P \in \varphi(a \to b)$.

3) El espacio topológico $(X, \mathcal{H})$ es T_0 .

Sean dados $P,Q \in X$, $P \neq Q$. Existe, entonces, un $a \in A$ tal que a pertenece a uno y sólo a uno de los s.d. P,Q . Esto es, uno y uno solo de los puntos $P,Q \in X$ pertenece al abierto $\varphi(a)$.

OBSERVACION 1: El antes citado Teorema de Stone expresa, en particular, que si A es un álgebra de Heyting y X el conjunto de todos sus filtros primos (s.d. irreductibles de A), X es un espacio casi-compacto (respecto de la topología cuyos abiertos son generados por los conjuntos $\varphi(a)$, donde $\varphi(a)=\{P \,;\, a \in P \in X\}$, $a \in A$).

Cabría esperar, que en el caso de las álgebras de Hilbert, considerando X como el conjunto de todos los s.d. irreductibles de A, el espacio de representación fuese casi-compacto.

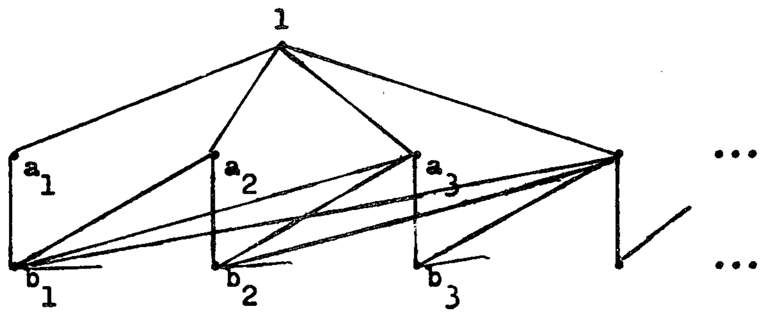
Pero no ocurre así, en general, como se muestra en el ejemplo siguiente:

Consideremos el conjunto $A=\{1, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots\}$, ordenado por la relación que definimos, indicando los casos de precedencia inmediata:

1) $a_n < 1$, para todo n.

2) Para cada n, $b_i < a_n$ si y sólo si $i= 1, 2, \ldots, n$.

El diagrama de Hasse de A se indica en la figura siguiente:



Consideremos a A como un álgebra de Hilbert con la implicación definida como en ejemplo 2ª, § 1, Parte I. Es fácil ver que en las álgebras de este tipo los s.d. son simplemente secciones superiores Los s d. irreductibles de A, son (Teorema 7) aquellas secciones superiores P cuyo complementario $A - P$ es filtrante superiormente.

Consideremos el conjunto X de todos los s.d. irreductibles de A, munido de una topología cuyos abiertos son engendrados por la familia de partes de X: $\mathcal{U} =(\varphi(x))_{x \in A}$.

Con esta topología X no es casi-compacto puesto que:

a) La familia $\mathcal{B} =(\varphi(b_i))_{i \geqslant 1}$ es un cubrimiento de X.

b) Ninguna subfamilia finita de B cubre X.

a) $X= \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(b_i)$.

Si no fuese a) válida, existiría un $P \in X$ tal que, para todo entero $i \geq 1$, $P \notin \varphi(b_i)$, esto es, $b_i \notin P$ para todo b_i, ó, lo que es lo mismo

$$P \cap \{b_1, b_2, \ldots\} = \emptyset$$

En estas condiciones, el s.d. P no puede ser irreductible porque, ó bien

1) Hay por lo menos dos elementos a_j, a_k $(j \neq k)$ tales que $a_j, a_k \notin P$; ó bien
2) Hay un sólo elemento $a_k \notin P$; ó bien
3) P contiene a todos los elementos a_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

En el caso 1) la única cota superior de a_j y a_k es 1 que pertenece a P. En el caso 2) b_{k+1}, b_{k+2}, por ejemplo, no pertenecen a P, y todas sus cotas superiores $1, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ son elementos de P. En el caso 3) cualquier par de elementos distintos b_j, b_k es seguido sólo por elementos de P.

Consecuentemente, a) es válida.

b) $\varphi(b_{i_1}) \cup \ldots \cup \varphi(b_{i_n}) \neq X$, cualesquiera sean $b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}$.

En efecto, sea $k = \max.\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ y

$$P = \{b_j \; ; \; j > k\} \cup \{a_i \; ; \; i \neq k\} \cup \{1\} .$$

Verifícase sin dificultad que P es un s.d. irreductible, y como $b_{i_1}, \ldots, b_{i_n} \notin P$, se tiene

$$P \in X, \quad P \notin \varphi(b_{i_1}) \cup \ldots \cup \varphi(b_{i_n}) .$$

OBSERVACION 2: Sea $\mathcal{L}'(\mathcal{G})$ el cálculo proposicional intuicionista, con el conjunto $\mathcal{G}$ de variables proposicionales. Para fijar ideas puede suponerse $\mathcal{G}$ numerable, como es lo corriente en lógica.

Sea $\mathcal{D}'$ el conjunto de las tesis de $\mathcal{L}'(\mathcal{G})$ en las que sólo figura el conectivo de implicación, y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de las tesis del cálculo proposicional implicativo positivo $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. $\mathcal{D}'$ es una parte del conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ y es inmediato que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$.

Se puede deducir del Teorema 11 (con independencia de cuales sean las formulaciones particulares de los cálculos $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{L}'(\mathcal{G})$) la proposición que afirma que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ (ver S.Kanger (1955)). En efecto, sea L(G) el álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ y φ el monomorfismo de L(G) en el álgebra de Heyting $\mathcal{H}$ de los abiertos de un cierto espacio topológico X. Toda fórmula $\alpha \in \mathcal{D}'$, es tal que $\varphi(|\alpha|) = X$, pues es sabido que las tesis del cálculo intuicionista al ser interpretadas en un espacio topológico X, dan el abierto X. Luego $|\alpha| = 1$, esto es $\alpha \in \mathcal{D}$.

4.- DUAL Y DOBLE DUAL DE UN ALGEBRA DE HILBERT.

Un reticulado completo donde vale la ley distributiva

$$a \wedge \bigvee_i x_i = \bigvee_i (a \wedge x_i) ,$$

es, como se sabe por un teorema de T.Ward (1938), un álgebra de Heyting.

Por teorema 6, A^* es, entonces, un álgebra de Heyting, que será llamada el <u>álgebra dual</u> del álgebra de Hilbert A (').

El álgebra $(A^*)^*$, dual del álgebra A^*, será llamada el <u>álgebra doble dual</u> de A.

Nos próponemos demostrar que un álgebra de Hilbert A cualquiera, puede ser isomórficamente representada por una sub-álgebra de su doble dual A^{**}.

Por comodidad en la notación α, β, ... designarán aquí elementos de A^* ; ξ, η, ... , elementos de A^{**}.

Notemos que, desde que A^* es un álgebra de Heyting, los s.d. de A^* coinciden con los filtros de A^*

(') De acuerdo al uso de la palabra "dual" sería preferible llamar "álgebra dual" a A^* munida del orden inverso al de inclusión. A^* sería así, un álgebra de Heyting dual. Aquí estamos interesados en el álgebra $(A^*)^*$ por lo que la distincion se hace irrelevante.

TEOREMA 12: <u>Existe un monomorfismo $j: A \to A^{**}$</u>.

DEMOSTRACION: Sea $D: A \to A^{*}$, la aplicación que a cada $a \in A$ hace corresponder el s.d. principal $D(a) \in A^{*}$.

D tiene las dos propiedades siguientes:

1) $a \leq b$ equivale a $D(b) \subseteq D(a)$

2) $D(b) \subseteq D(a) \vee \alpha$ equivale a $D(a \to b) \subseteq \alpha$.

1) es trivial. 2) se sigue inmediatamente del Lema 3.

Análogamente, sea $\Delta: A^{*} \to A^{**}$, definida para cada $\alpha \in A^{*}$ por:

$$\Delta(\alpha) = \{\beta \,;\, \alpha \subseteq \beta\}$$

($\Delta(\alpha)$ es el filtro (s.d.) principal engendrado por α $\Delta(\alpha) \in A^{**}$).

Δ tiene las propiedades siguientes:

1') $\alpha \subseteq \beta$ equivale a $\Delta(\beta) \subseteq \Delta(\alpha)$

2') $\Delta(\alpha \vee \beta) = \Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$.

1') es trivial. 2') vale por el hecho de ser A^{*} un reticulado.

Mostremos ahora que la aplicación:

$$j = \Delta \circ D : A \to A^{**}$$

es un monomorfismo.

En primer lugar, de 1), 1') se sigue que j es biunívoca. Veamos que j es un homomorfismo, es decir que $j(a \to b) = \Delta(D(a \to b)) = \Delta(D(a)) \to \Delta(D(b)) = j(a) \to j(b)$.

Verifiquemos para ello que $\Delta(D(a \to b))$ es el elemento máximo en A entre los ξ tales que

$$\Delta(D(a)) \cap \xi \subseteq \Delta(D(b)).$$

(i) $\qquad \Delta(D(a) \cap \Delta(D(a \to b)) \subseteq \Delta(D(b)).$

En efecto, por 2')

$$\Delta(D(a)) \cap \Delta(D(a \to b)) = \Delta(D(a) \vee D(a \to b)).$$

Por 2):

$$D(b) \subseteq D(a) \vee D(a \to b),$$

puesto que $D(a \to b) \subseteq D(b)$. Aplicando 1'):

$$\Delta(D(a) \vee D(a \to b)) \subseteq \Delta(D(b)),$$

teniendo en cuenta las inclusiones anteriores resulta (i).

(ii) Si $\Delta(D(a)) \cap \xi \subseteq \Delta(D(b))$, entonces $\xi \subseteq \Delta(D(a \to b))$.

Veamos que si $\alpha \in \xi$, entonces $\alpha \in \Delta(D(a \to b))$.

Sea $\alpha \in \xi$, luego $\Delta(\alpha) \subseteq \xi$.

De esto y de la hipótesis de (ii):

$$\Delta(D(a)) \cap \Delta(\alpha) \subseteq \Delta(D(b)) .$$

Por 2'):

$$\Delta(D(a)) \cap \Delta(\alpha) = \Delta(D(a) \vee \alpha) ,$$

luego $\qquad \Delta(D(a) \vee \alpha) \subseteq \Delta(D(b)).$

Aplicando 1'), tenemos $D(b) \subseteq D(a) \vee \alpha$, y por 2) $D(a \to b) \subseteq \alpha$. Aplicando 1') $\Delta(\alpha) \subseteq \Delta(D(a \to b)$, y como $\alpha \in \Delta(\alpha)$ se tiene finalmente $\alpha \in \Delta(D(a \to b))$.

(i) y (ii) muestran que $\Delta(D(a \to b))$ es el máximo entre los ξ tales que $\Delta(D(a)) \cap \xi \subseteq \Delta(D(b))$, con lo que concluye la demostración.

OBSERVACION : Se plantea el problema de saber en qué condicio nes $A \cong A^{**}$, más precisamente, en qué condiciones $j = \Delta \circ D$ es un isomorfismo.

Al respecto es válido el siguiente

TEOREMA: <u>Para que $j: A \longrightarrow A^{**}$ sea un isomorfismo es necesario y suficiente que A sea un álgebra de Heyting finita.</u>

DEMOSTRACION:

a) Es suficiente:

Sea A un álgebra de Heyting finita. Mostremos que $j = \Delta \circ D$ es una aplicación de A sobre A^{**}.

Siendo A un álgebra de Heyting finita, todos sus filtros (s.d.) son principales, luego

$$A^{*} = \{D(a)\}_{a \in A} .$$

A^{*} es un álgebra de Heyting finita, luego, por la misma razón

$$A^{**} = \{\Delta(\alpha)\}_{\alpha \in A^{*}} = \{\Delta(D(a))\}_{a \in A} = \{j(a)\}_{a \in A}$$

b) Es necesario:

Supongamos que $j = \Delta \circ D$ es un isomorfismo sobre el álgebra de Heyting A^{**}.

Como j respeta la implicación, respeta también las relaciones de orden inducidas por las implicaciones en A y A^{**}, luego A y A^{**} son isomorfas en cuanto al orden y, por consiguiente, A es un álgebra de Heyting.

Para mostrar que A es finita, probaremos que todos los filtros e ideales de A son principales. Un lema auxiliar, que ponemos al final, concluirá la demostración.

1) Todos los filtros de A son principales.

Sea α un filtro de A, $\alpha \in A^{*}$, $\Delta(\alpha) \in A^{**}$.

Como j es una aplicación de A sobre A^{**}, existe un $a \in A$ tal que $j(a) = \Delta(D(a)) = \Delta(\alpha)$. Siendo Δ biunívoca, se tiene $D(a) = \alpha$, esto es α es el filtro principal generado por a.

2) Todos los ideales de A son principales.

Sea I un ideal de A. Se verifica sin dificultad que el subconjunto de A^{*}: $\xi = \{D(x)\}_{x \in I}$, es un filtro de A^{*}.

Como $j = \Delta \circ D$ es una aplicación de A sobre A^{**}, para algún $b \in A$, $\xi = \Delta(D(b))$.

Decir que $x \in I$, equivale a decir que $D(x) \in \xi = \Delta(D(b))$, esto es $D(b) \subsetneq D(x)$, ó lo que es lo mismo, $x \leqslant b$.

En consecuencia I es el ideal principal generado por b.

LEMA AUXILIAR: <u>Si R es un reticulado distributivo, tal que todos sus filtros e ideales son principales, R tiene un número finito de elementos.</u>

DEMOSTRACION: En primer lugar, de la hipótesis resulta inmediatamente que R tiene primer y último elementos.

Consideremos el conjunto I de todos los $x \in R$ tales que $I(x) = \{ y \; ; \; y \leqslant x \}$ tiene un número finito de elementos.

Mostremos que I es un ideal.

Verifiquemos sólo que (el resto es trivial) si $a, b \in I$, entonces $a \vee b \in I$. En efecto, $I(a \vee b) = \{ x \vee y \; ; \; x \leqslant a ; \; y \leqslant b \}$, porque si $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, entonces $x \vee y \leqslant a \vee b$ y, recíprocamente, si $z \leqslant a \vee b$, se tiene $z = z \wedge (a \vee b) = (z \wedge a) \vee (z \wedge b)$, donde $z \wedge a \leqslant a$, $z \wedge b \leqslant b$.

En consecuencia el número de elementos de $I(a \vee b)$ es finito.

Por hipótesis, I es un ideal principal, sea $I = I(a)$. Luego I tiene un número finito de elementos. Si $a = 1$, $I = R$ y el reticulado R es finito. Veamos que no puede ser $a \neq 1$.

Supongamos, por el absurdo, $a \neq 1$ y sea F un filtro maximal entre los que no contienen al elemento a. Por hipótesis F es un filtro principal, sea $F = F(b)$.

Como $b \notin I$, $I(b)$ contiene una infinidad de elementos. $I(b) \cap I$ es finito, ya que I es finito.

En consecuencia, existe un elemento $c \in I(b) - I$, $c \neq b$.

El filtro $F(c)$ contiene propiamente a $F(b)$ y, como $c \notin I$, esto es, $c \nleqslant a$, el elemento a no pertenece a $F(c)$. Lo que contradice la supuesta maximalidad de $F(b)$.

PARTE III

1.- EXPLICACION PRELIMINAR

En esta parte vamos a mostrar que las álgebras de Hilbert libres con un número finito de generadores libres son finitas, e indicar un procedimiento recursivo para su construcción efectiva.

Para la demostración de este resultado utilizaremos una técnica original de A. Monteiro (1960), que consiste esencialmente en representar el álgebra libre en consideración L como una subálgebra del producto directo Π de todos sus cocientes por s.d. irreductibles minimales.

A menos que $\{1\}$ sea un s.d. irreductible de L, existirán varios "ejes" en la representación Π de L, cuya estructura se presume más fácil de estudiar que la de L misma.

Para tener información acerca de los ejes de Π, esto es, de los cocientes de L por s.d. irreductibles minimales, se hace preciso averiguar que relaciones guardan los s.d. irreductibles minimales con los generadores libres de L. El § 3 se dedica al estudio de esta cuestión.

Jaskowski (1936), ha introducido el concepto de lo que aquí llamamos <u>álgebra ampliada</u> en relación con su construcción de una matriz característica del cálculo intuicionista.

Para la demostración de los resultados del § 3 y § 4, como así también en la construcción de las álgebras libres, que se estudia en § 5, este concepto juega un papel central.

Las álgebras ampliadas y su inmediata generalización, las <u>álgebras con penúltimo elemento</u>, son estudiadas en el § 2.

2.- ALGEBRAS CON PENULTIMO ELEMENTO.

DEFINICION 9: <u>Un elemento p de un álgebra de Hilbert A se dirá (si existe) penúltimo elemento de A si: $x \leqslant p < 1$, para todo $x \in A$, $x \neq 1$. A será llamada álgebra con penúltimo elemento</u>.

Las álgebras con penúltimo elemento aparecen de modo natural como cocientes de un álgebra por sus sistemas deductivos completamente irreductibles (= máximos respecto de un elemento).

TEOREMA 13: <u>Sea $h: A \longrightarrow B$ un epimorfismo de núcleo $M = N(h)$. $h(a)$ es penúltimo elemento de B si y sólo si M es máximo respecto de a</u>.

DEMOSTRACION: Por Teorema 10, decir que M es máximo respecto de a, equivale a decir:

1) $a \notin M$

2) Para todo $x \notin M$, $x \to a \in M$.

O, lo que es evidentemente igual

1') $h(a) \neq h(1)$

2') Para todo $h(x) \neq h(1)$, $h(x) \leqslant h(a)$.

Como h es un epimorfismo, 1') y 2') expresan que $h(a)$ es penúltimo elemento de B.

Sea p el penúltimo elemento de un álgebra B. Es de fundamental importancia el hecho de que el elemento p sólo puede expresarse como la implicación de dos elementos de B, en la forma $1 \to p$.

LEMA 8: <u>$x \to y = p$ implica $x = 1$, $y = p$.</u>

DEMOSTRACION: Basta mostrar que $x = 1$ (h_{12}).

Si fuese $x \neq 1$, teniendo en cuenta que p es penúltimo elemento de A, se tendría $x \leqslant p$, y, aplicando h_{13}, resultaría $p = x \to y = x \to (x \to y) = x \to p = 1$, lo que es absurdo pues $p \neq 1$.

Sea $h_p : B \longrightarrow B$ el endomorfismo principal (§ 2, Parte I) relativo a p. Las clases de equivalencia, módulo $D(p) = \{1, p\}$, contienen, con excepción de la clase $D(p)$ misma, un solo elemento.

Basta observar que para cada $x \notin \{1, p\}$ se tiene que

$$h_p(x) = p \to x = x$$

Como $h_p(x) = p \to x \equiv x$ (mód. $D(p)$) se tiene, en particular:

$$(p \to x) \to x \in D(p).$$

No puede ser, por Lema 8, $(p \to x) \to x = p$, luego

$$(p \to x) \to x = 1,$$

esto es, $p\to x \leqslant x$. Por otro lado de h_1', se obtiene, $x \leqslant \leqslant p\to x$, y de ambas relaciones, la igualdad $p\to x = x$.

$B - \{p\} = h_p(B)$ es entonces, una subálgebra de B que será llamada la <u>reducida</u> del álgebra B y que designaremos B^-.

El epimorfismo $\rho: B \to B^-$ definido por $\rho(x) = h_p(x) = p\to x$ para todo $x \in B$ será llamado la <u>reducción</u> de B. Podemos suponer $B^- = B/D(p)$ y a ρ identificado con el homomorfismo canónico relativo a $D(p)$.

Podemos decir que de un álgebra B con penúltimo elemento p, pasamos a su reducida B^- simplemente eliminando p y conservando la operación de implicación. Es posible, inversamente, a partir de un álgebra A arbitraria, introducir un penúltimo elemento $p \notin A$ y definir sobre $A \cup \{p\} = B$ una operación de modo tal que $B^- = A$.

Dada el álgebra $(A, \to)$, sea p un objeto no perteneciente a A y $A^+ = A \cup \{p\}$. Sea $\overset{+}{\to}$ una operación binaria sobre A^+ definida por:

i) Si $x, y \in A$, $x \overset{+}{\to} y = x \to y$

ii) Sea $x \in A$, $x \neq 1$. $\overset{+}{\to}$ opera sobre p de acuerdo a la tabla:

$\xrightarrow{+}$	p	x	1
p	1	x	1
x	1		
1	p		

Es materia de verificación el siguiente teorema, debido esencialmente a S. Jaskowski (1936).

TEOREMA 14: <u>$(A^+, \xrightarrow{+})$ es un álgebra de Hilbert</u>.

Observando como se ha definido $\xrightarrow{+}$, resulta inmediatamente que p es penúltimo elemento de A y

LEMA 9: <u>$(A^+)^- = A$</u>.

Si B es un álgebra con penúltimo elemento p, tenemos:

LEMA 10: <u>$(B^-)^+ = B$</u>.

Llamaremos <u>ampliada</u> de A al álgebra A^+ antes definida.

Los dos lemas siguientes serán de utilidad en lo que sigue.

LEMA 11: <u>Si B es un álgebra con penúltimo elemento p, y K un conjunto de generadores de B, entonces $p \in K$.</u>

DEMOSTRACION: Si $p \notin K$, se tendría $K \subseteq B - \{p\} = B^{-}$. B^{-} es una subálgebra de B, luego $B = \overline{K} \subseteq B - \{p\}$, lo que es absurdo.

LEMA 12: <u>Si K es un conjunto de generadores de A, $K \cup \{p\}$ genera al álgebra ampliada $A^{+} = A \cup \{p\}$.</u>

DEMOSTRACION: De $K \subseteq K \cup \{p\}$, resulta $A = \overline{K} \subseteq \subseteq \overline{K \cup \{p\}}$, luego $A^{+} = A \cup \{p\} \subseteq \overline{K \cup \{p\}}$, y finalmente $A^{+} = \overline{K \cup \{p\}}$.

3.- SISTEMAS DEDUCTIVOS IRREDUCTIBLES MINIMALES DE UN ALGEBRA LIBRE.

En este párrafo estudiamos las relaciones que existen entre los s.d. irreductibles minimales de un álgebra libre; y el conjunto de sus generadores libres.

TEOREMA 15: Sea L un álgebra libre y G el conjunto de sus generadores libres. Si P es un s.d. irreductible minimal de L, entonces $P \cap G = \emptyset$.

DEMOSTRACION: Supongamos, por el absurdo, que exista un $g_0 \in P \cap G$.

Sea $h: L \longrightarrow L/P = A$, el homomorfismo canónico relativo a P.

Consideremos el álgebra ampliada $A^{+} = A \cup \{p\}$.

$h(G)$ es un conjunto de generadores de A. También lo es $h(G - \{g_0\})$, puesto que $h(g_0) = 1$ es inesencial como generador. Por el Lema 12, $h(G - \{g_0\}) \cup \{p\}$ genera al álgebra A.

Sea f la aplicación de G sobre $h(G - \{g_0\}) \cup \{p\}$ definida por:

$$f(g) = \begin{cases} h(g) & \text{si } g \in G - \{g_0\} \\ p & \text{si } g = g_0 \end{cases}$$

y φ el homomorfismo de L sobre A^+ que prolonga la aplicación f.

Consideremos finalmente la reducción $\rho : A^+ \longrightarrow (A^+)^- = A$.

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A^+ \arrow[dd, "\rho"] \\ L \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

Los epimorfismos $\rho \circ \varphi$, $h : L \longrightarrow A$ coinciden, como es inmediato, sobre el conjunto G de generadores de L, luego $h = \rho \circ \varphi$.

Aplicando Lema 1, se tiene

$$Q = N(\varphi) \subseteq N(h) = P$$

El sistema deductivo Q es máximo respecto de g_0, puesto que $\varphi(g_0) = p$ es penúltimo elemento de A^+ (Teorema 13) y por lo tanto irreductible (Lema 6).

Además, Q es una parte propia de P, puesto que $g_0 \notin Q$ y $g_0 \in P$.

Resumiendo: Q es un s.d. irreductible contenido propiamente en P. Esto es absurdo, pues se ha supuesto P irreductible minimal.

TEOREMA 16: Sea A un álgebra de Hilbert y G un conjunto finito de generadores de A. Si P es un s.d. irreductible de A tal que $P \cap G = \emptyset$, entonces

<u>existe por lo menos un generador $g_0 \in G$ tal que P es un s.d. máximo respecto de g_0.</u>

DEMOSTRACION: Supongamos por el absurdo que P no sea máximo respecto de ningún generador. Entonces (Teorema 10), para cada $g \in G$ existe un elemento $x_g \notin P$ tal que $x_g \to g \notin P$.

Como P es irreductible, todo conjunto finito de elementos de $A - P$ tiene una cota superior en $A - P$ (consecuencia inmediata de Teorema 7).

Esto es, existe un elemento $a \notin P$ tal que:

(1) $\quad x_g \to g \leqslant a, \quad x_g \leqslant a$, para todo $g \in G$.

Sea M un s.d. maximal entre los que contienen a P sin contener á a, (Lema 7) y sea $h: A \to A/M$ el homomorfismo canónico relativo a M.

$h(G)$ es un conjunto de generadores de A/M. A/M es un álgebra que tiene a $h(a)$ como penúltimo elemento (Teorema 13). Mostremos que $h(a)$ no pertenece al conjunto de generadores $h(G)$, lo que contradirá la afirmación del Lema 11.

De la segunda relación en (1), $x_g \leqslant a$, se sigue (h7)

$$a \to g \leqslant x_g \to g,$$

y teniendo en cuenta la primera relación en (1)

$$a \to g \leqslant a, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Como $a \notin M$, $a \to g \notin M$, luego $h(a) \neq h(g)$, para todo $g \in G$; esto es $h(a) \notin h(G)$.

TEOREMA 17: Sea L un álgebra libre y G un conjunto finito de generadores libres de L. Para que un s.d. P sea irreductible minimal es necesario y suficiente que:

1) $P \cap G = \emptyset$
2) Exista $g_o \in G$ tal que P sea máximo respecto de g_o.

DEMOSTRACION: a) Es necesario: Si P es un s.d. irreductible minimal, 1) se verifica por Teorema 15. Como vale 1), 2) se verifica por Teorema 16.

b) Es suficiente: Sea P un s.d. que verifica las propiedades 1) y 2). Por verificar 2), P es irreductible (Lema 6). Sea Q un s.d. irreductible tal que $Q \subseteq P$, mostremos que $Q = P$. Siendo $P \cap G = \emptyset$, con mayor razón $Q \cap G = \emptyset$. Por Teorema 16 existe un $g \in G$ tal que Q es máximo respecto de g. Como P contiene a Q, sin contener a g $(P \cap G = \emptyset)$, es $P = Q$.

Esto prueba que P es un s.d. irreductible minimal.

4.- ALGEBRAS LIBRES CON NUMERO FINITO DE GENERADORES LIBRES

Sea L_n el álgebra libre con el conjunto $G=\{g_1,\dots g_n\}$ de generadores libres, $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los s.d. irreductibles minimales de L_n y, para cada $P \in \mathcal{P}$, sea $h_P : L_n \longrightarrow A_P = L_n/P$ el homomorfismo canónico.

$\mathcal{P}$ es un conjunto separador de s.d. (Corolario 2, Teorema 10) y por lo tanto, la aplicación h de L_n en $\Pi = \prod_{P\in\mathcal{P}} A_P$ definida por:

$$h(x) = (h_P(x))_{P\in\mathcal{P}},$$

es un monomorfismo. Podemos considerar a L_n, identificándola con su imagen $h(L_n)$, como una subálgebra de Π.

TEOREMA 18: <u>Toda álgebra libre con un número finito de generadores libres es finita.</u>

DEMOSTRACION: (Por inducción sobre el número de generadores libres)

El álgebra L_1, con un generador libre, tiene dos elementos.

Supongamos que todas las álgebras L_k, con $1 \leqslant k < n$ son finitas. Notamos que esto implica que cualquier ál -

gebra que admita un conjunto de generadores en número estrictamente inferior a n es finita, ya que una tal álgebra es imagen homomórfica de L_{n-1}.

Para probar que L_n es finita es suficiente ver que Π tiene un número finito de ejes, cada uno de los cuales tiene un número finito de elementos, esto es:

a) Para cada $P \in \mathcal{P}$, $A_P = L_n/P$ es finita.

b) El conjunto $\mathcal{P}$ de los s.d. irreductibles minimales de L_n es finito.

Dado $P \in \mathcal{P}$ y $h_P: L_n \longrightarrow A_P$, el conjunto constituido por los elementos $h_P(g_1), h_P(g_2), \ldots, h_P(g_n)$, es un conjunto de generadores de A_P.

Por el Teorema 17 sabemos que P es máximo respecto de uno por lo menos de los generadores libres de L_n, sea g_j. Por Teorema 13, $h_P(g_j)$ es penúltimo elemento de A_P.

Es inmediato entonces, que la subálgebra A_P^- de A_P es generada por los $h_P(g_i)$, $1 \leqslant i < n$, tales que $h_P(g_i) \neq h_P(g_j)$. Por lo tanto A_P admite un conjunto de generadores en número menor que n y, por la hipótesis de inducción, A_P es finita. En consecuencia $A_P = (A_P^-)^+$ es también finita; esto prueba a).

Observemos que existe un número natural m, que es cota superior para el número de elementos de las álgebras cocientes A_P, $P \in \mathcal{P}$.

En efecto, si m' es el número de elementos de L_{n-1}, m' es mayor ó igual al número de elementos de cualquier álgebra $A_{\bar{P}}$, pues estas álgebras admiten un conjunto de menos de n generadores. Basta entonces hacer $m = m' + 1$.

La circunstancia observada, unida al hecho de ser L_n finitamente generada, es suficiente, como vamos a mostrar, para concluir que $\mathcal{P}$ es finito.

Notemos que, considerando identificadas las álgebras isomorfas, existe sólo un número finito de álgebras de Hilbert cuyo número de elementos es m a lo sumo (para cada conjunto finito X el número de operaciones binarias definidas sobre X, esto es, de aplicaciones de $X \times X$ en X es finito).

Así, el número de álgebras A_P, $P \in \mathcal{P}$, es finito. Pero puede ocurrir que para dos s.d. $P,Q \in \mathcal{P}$, $P \neq Q$, se tenga $A_P = A_Q$. En tal caso, sin embargo no ocurre que sea $h_P(g) = h_Q(g)$ para todo $g \in G$, pues esto implicaría $h_P = h_Q$ y por lo tanto $P = Q$.

Esto es, si $P \neq Q$, siendo $A_P = A_Q$, las sucesiones: $(h_P(g_1),h_P(g_2),\ldots,h_P(g_n))$ y $(h_Q(g_1),h_Q(g_2),\ldots h_Q(g_n))$ son distintas.

Como para cada álgebra A_P, $P \in \mathcal{P}$, existe un número finito de sucesiones de n elementos de A_P, concluímos que existe sólo un número finito de s.d. $Q \neq P$ tales que $A_Q = A_P$.

Siendo el número de álgebras A_P, $P \in \mathcal{P}$, finito, $\mathcal{P}$ es finito. Esto prueba b) y termina la demostración del teorema.

COROLARIO 1: Toda álgebra de Hilbert finitamente generada es finita.

COROLARIO 2: A partir de un conjunto finito de abiertos de un espacio topológico X, aplicando indefinidamente la operación: int.((X - G') ∪ G") (G', G" abiertos) se obtiene sólo un número finito de abiertos.

5.- CONSTRUCCION DE LAS ALGEBRAS DE HILBERT FINITAS.

A) Vamos a dar un procedimiento recursivo para la construcción efectiva de las álgebras libres finitas.

Suponemos construídas las álgebras libres L_k, $1 \leqslant k < n$, y construiremos a partir de ellas el álgebra libre L_n.

Por comodidad, denotaremos con N al conjunto de los enteros $1,2,\ldots,n$.

Sean Π y $h:L_n \longrightarrow \Pi$ definidos como en el párrafo anterior.

Procuraremos construir Π é indicar en Π el conjunto $h(G) = \{ h(g_i) \}_{i \in N}$.

(Los elementos de la subálgebra $h(L_n)$, isomorfa a L_n se obtendrán efectuando la operación $\rightarrow$, definida en Π, a partir de los elementos de $h(G)$.)

Esto equivale a determinar:

1º) el eje P-ésimo de Π ; es decir, el álgebra cociente $A_P = L/P$.

2º) las coordenadas P-ésimas de cada uno de los elementos de $h(G)$; esto es, la familia $(h_P(g_i))_{i \in N}$ de generadores de A_P.

Puede decirse entonces, con términos que precisaremos después, que nuestro objetivo se limita a seleccionar entre todos los posibles pares del tipo $(A , (a_i)_{i \in N})$, donde A es un álgebra de Hilbert y $(a_i)_{i \in N}$ una familia de generadores de A, aquellos pares de la forma $(A_p , (h_p(g_i))_{i \in N})$.

Veamos que existe una correspondencia biunívoca entre los pares del tipo $(A , (a_i)_{i \in N})$ y los homomorfismos canónicos de L_n.

Dada un álgebra A y una familia $(a_i)_{i \in N}$ de generadores de A, existe un (y uno solo) epimorfismo $\alpha : L_n \longrightarrow A$ tal que, para cada $i \in N$, $\alpha(g_i) = a_i$ (el homomorfismo α prolonga la aplicación f de G en A, definida por $f(g_i) = a_i$, para todo $i \in N$).

En estas condiciones, diremos que el par $(A , (a_i)_{i \in N})$ representa al homomorfismo α .

Es claro que un homomorfismo α , cualquiera, de L_n sobre un álgebra A es representado por el par $(A , (\alpha(g_i))_{i \in N})$.

Sean $(a_i)_{i \in N}$, $(b_i)_{i \in N}$ familias de generadores de las álgebras A , B respectivamente. Supongamos que $(A , (a_i)_{i \in N})$, $(B , (b_i)_{i \in N})$, representen los homomorfismos α , β de L_n sobre A , B respectivamente. Interesa saber qué condiciones deben verificar estos pares para que representen un mismo homomorfismo canónico de L_n, esto es, para que $N(\alpha) = N(\beta)$.

LEMA 13: <u>$N(\alpha) = N(\beta)$ si y sólo si existe un isomorfismo $j: A \longrightarrow B$ tal que $j(a_i) = b_i$, para todo $i \in N$.</u>

DEMOSTRACION: Decir que $N(\alpha) = N(\beta)$ equivale decir (Lema 1) que existe un isomorfismo $j: A \longrightarrow B$ tal que $j \cdot \alpha = \beta$.

Para que $j \circ \alpha = \beta$ es necesario y suficiente que los homomorfismos $j \cdot \alpha$, $\beta : L_n \longrightarrow B$, coincidan sobre el conjunto G de generadores de L_n, es decir

$$j(\alpha(g_i)) = \beta(g_i), \quad \text{para todo } i \in N.$$

Como, por hipótesis, $\alpha(g_i) = a_i$, $\beta(g_i) = b_i$, la desigualdad anterior puede escribirse $j(a_i) = b_i$, para todo $i \in N$. Lo que termina la demostración.

Escribiremos $(A , (a_i)_{i \in N}) \equiv (B , (b_i)_{i \in N})$ para expresar que existe un isomorfismo j de A sobre B tal que $j(a_i) = b_i$, para todo $i \in N$.

Es evidente que la relación $\equiv$ es una relación de equivalencia. Conviniendo en identificar los pares que están en la relación $\equiv$, la correspondencia que a cada homomorfismo canónico de L_n asigna el par que lo representa es por el lema anterior, una correspondencia biunívoca. Podemos decir que hay tantos pares (distintos en la relación $\equiv$) como homomorfismos canónicos de L_n, ó, si se quiere, como s.d. de L_n.

B) Vamos ahora a caracterizar todos los pares $(A\ ,\ (a_i)_{i\in N})$ que representan homomorfismos canónicos α de núcleo $N(\alpha)\in\mathfrak{P}$. Previo a ello, es conveniente clasificar los s.d. de $\mathfrak{P}$ en partes disjuntas de la manera siguiente:

Sea S una parte propia de $N, S\subset N$ $(N - S \neq \emptyset)$. Designemos con $\mathfrak{P}_S$ al conjunto de todos los s.d. P de L_n tales que:

1) $P \cap G = \emptyset$
2) P es máximo respecto de g_i si y solo si $i\in N - S$.

Se sigue inmediatamente del Teorema 17,, que

$$\mathfrak{P} = \bigcup_{S\subset N} \mathfrak{P}_S$$

Es claro, además, que si S, S' son partes propias de N, distintas $(S \neq S')$, entonces $\mathfrak{P}_S \cap \mathfrak{P}_{S'} = \emptyset$.

TEOREMA 19: <u>Para que $(A\ ,\ (a_i)_{i\in N})$ represente un epimorfismo $\alpha: L_n \longrightarrow A$ de núcleo $N(\alpha)\in\mathfrak{P}_S$ es necesario y suficiente que:</u>

i) $a_i \neq 1$, para todo $i\in N$
ii) a_i es penúltimo elemento de A si y solo si $i\in N - S$.

DEMOSTRACION: Por la definición de $\mathcal{P}_S$, decir que $N(\alpha) \in \mathcal{P}_S$ equivale decir:

1) $N(\alpha) \cap G = \emptyset$

2) $N(\alpha)$ es máximo respecto de g_i si y sólo si $i \in N-S$.

Teniendo en cuenta que $\alpha(g_i) = a_i$, para todo $i \in N$, la condición 1) anterior puede escribirse en la forma:

i) $\alpha(g_i) = a_i \neq 1$, para todo $i \in N$.

Por otro lado, aplicando el Teorema 13, la condición 2) puede escribirse:

ii) $\alpha(g_i) = a_i$ es penúltimo elemento de A si y sólo si $i \in N - S$.

Esto termina la demostración.

Observemos que el álgebra A es, efectivamente, un álgebra con penúltimo elemento, dado que $N - S \neq \emptyset$.

Designemos con E_S a la clase de todos los pares $(A\ ,\ (a_i)_{i \in N})$ (identificados como se ha dicho) tales que:

i) $a_i \neq 1$, para todo $i \in N$

ii) a_i es penúltimo elemento de A si y sólo si $i \in N-S$.

El Teorema 19 puede enunciarse, en forma equivalente, como estableciendo la igualdad:

$$E_S = \{ (A_P\ ,\ (h_P(g_i))_{i \in N})\ ;\ P \in \mathcal{P}_S \}.$$

Si ponemos $E = \bigcup_{S \subset N} E_S$, se tiene:

$$E = \{ (A_P\ ,\ (h_P(g_i))_{i \in N})\ ;\ P \in \mathcal{P} \}.$$

Nuestro problema quedará resuelto si indicamos la manera de construír todos los pares de E.

C) Sea $(A, (a_i)_{i\in N}) \in E_S$; A^- la reducida del álgebra A y ρ la reducción de A en A^-.

LEMA 14: <u>$(a_i)_{i\in S}$ es una familia de generadores de A^- tal que $a_i \neq 1$ para todo $i \in S$</u>.

DEMOSTRACION: $(\rho(a_i))_{i\in N}$ es una familia de generadores de A^-, pues es imagen por el homomorfismo ρ de la familia $(a_i)_{i\in N}$ de generadores de A.

Como para todo $i \in N - S$, a_i coincide con el penúltimo elemento de A (ii), $\rho(a_i) = 1$ para todo $i \in N- S$.

Para los $i \in S$, $\rho(a_i) = a_i \neq 1$. Luego:

$$\{\rho(a_i)\}_{i\in N} = \{a_i\}_{i\in S} \cup \{1\} .$$

Eliminando el generador no esencial 1, tenemos que $\{a_i\}_{i\in S}$ es un conjunto de generadores de A^-.

El resultado anterior, nos induce a considerar, para cada $S \subset N$, la clase F_S de todos los pares $(B, (b_i)_{i\in S})$, donde $(b_i)_{i\in S}$ es una familia de generadores de B, tal que:

$$b_i \neq 1, \text{ para todo } i \in S.$$

(Suponemos, aquí también, identificados los pares de F_S que están en la relación $\equiv$ definida como antes).

Observemos que si $S = \emptyset$, $F_\emptyset$ sólo contiene el par $(B, (b_i)_{i\in\emptyset})$, donde $B = \{1\}$ es el álgebra con un solo elemento y $(b_i)_{i\in\emptyset} = \emptyset$ es la familia vacía $(\bar{\emptyset} = B)$

El Lema 14 expresa que si $(A , (a_i)_{i\in N}) \in E_S$, entonces $(A^-, (a_i)_{i\in S}) \in F_S$.

Designemos con R la aplicación de E_S en F_S definida por:

$R((A , (a_i)_{i\in N})) = (A^-, (a_i)_{i\in S})$.

Las álgebras B en los pares $(B ,(b_i)_{i\in S}) \in F_S$ son álgebras con menos de n generadores. Estas álgebras son imágenes homomórficas de álgebras libres con menos de n generadores libres y pueden ser construídas a partir de las mismas. Mostraremos que el proceso por el cual se pasa de un par de E_S a un par de F_S (aplicación R), puede ser invertido, lo que permitirá construír los pares de E_S a partir de los de F_S.

TEOREMA 20: <u>R es una aplicación biunívoca de E_S sobre F_S. Además $R^{-1}((B,(b_i)_{i\in S}))=(B^+,(b_i)_{i\in N})$, donde $B^+ = B \cup \{p\}$ es la ampliada de B y $b_i = p$ para todo $i \in N - S$.</u>

DEMOSTRACION:

1) R está bien definida, es decir, si

$(A\ , (a_i)_{i\in N}) \equiv (A', (a_i')_{i\in N})$ se tiene

$(A^-, (a_i)_{i\in S}) \equiv (A'^-, (a_i')_{i\in S})$.

Por hipótesis, existe un isomorfismo $j:A \longrightarrow A'$ tal que $j(a_i) = a_i'$ para todo $i \in N$. La restricción j' de j á A^- es un isomorfismo de A^- sobre A'^- tal que $j'(a_i) = a_i'$ para todo $i \in S$, luego:

$$(A^-, (a_i)_{i\in S}) \equiv (A'^-, (a_i')_{i\in S}) .$$

2) R es una aplicación de E_S sobre F_S .

Sea dado $(B\ , (b_i)_{i\in S}) \in F_S$. Consideremos el par $(B^+, (b_i)_{i\in N})$ donde $B^+ = B \cup \{p\}$ y $b_i = p$ para todo $i \in N - S$.

Este par pertenece a E_S porque $\{b_i\}_{i\in N} = \{b_i\}_{i\in S} \cup \{p\}$ es un conjunto de generadores de B, por Lema 12 .

$R((B^+, (b_i)_{i\in N})) = ((B^+)^-, (b_i)_{i\in S}) = (B\ , (b_i)_{i\in S})$.

3) R es biunívoca.

Si $R((A\ , (a_i)_{i\in N})) = (A^-, (a_i)_{i\in S})$, podemos identificar (Lema 10) A con $(A^-)^+$. La familia $(a_i)_{i\in N}$ de

A es tal que $a_i = p$ para todo $i \in N - S$, luego, aplicando 2) R es biunívoca.

De 2) resulta la expresión de la aplicación inversa R^{-1}.

Escribiendo $F = \bigcup_{S \subset N} F_S$, es evidente que R define una aplicación biunívoca de E sobre F .

D) Resta sólo sistematizar la construcción de los pares de las clases F_S $(S \subset N)$.

Designemos con $L(S)$ al álgebra libre con el conjunto $\Sigma = \{g_i\}_{i \in S}$ de generadores libres. (Si el número de elementos de S es s $(s < n)$, $L(S)$ es isomorfa al álgebra libre L_s con s generadores libres; por razones de exposición convendrá poner en evidencia la parte S).

Es natural introducir la convención $L(\emptyset) = L_0 = \{1\}$ (álgebra con un solo elemento).

LEMA 15: <u>$(B , (b_i)_{i \in S}) \in F_S$ si y sólo si este par representa a un epimorfismo $\beta : L(S) \longrightarrow B$ tal que $N(\beta) \cap \Sigma = \emptyset$</u> .

DEMOSTRACION: Sea β el homomorfismo representado por el par $(B , (b_i)_{i \in S})$; esto es, sea $\beta(g_i) = b_i$, para todo $i \in S$.

Decir que $(B\ ,\ (b_i)_{i\in S}) \in F_S$ equivale a decir que la familia $(b_i)_{i\in S}$ de generadores de B es tal que $b_i \neq 1$, para todo $i \in S$.

Como $b_i = \beta\,(g_i)$, lo anterior puede expresarse equivalentemente diciendo que $\beta\,(g_i) \neq 1$, para todo $i \in S$, ó lo que es lo mismo $N(\beta) \cap \Sigma = \emptyset$.

Observemos que en el caso $S = \emptyset$ el homomorfismo β que representa al único par $(\{1\}\ ,\ \emptyset\ )$ de $F_{(\emptyset)}$ es el homomorfismo canónico $\beta : L(\emptyset) = \{1\} \longrightarrow \{1\}$. Para este homomorfismo $N(\beta) \cap \Sigma = \emptyset$, como es obvio.

Resulta del teorema anterior que F_S es la clase de todos los pares de la forma $(B\ ,\ (\beta(g_i))_{i\in S})$, donde β recorre el conjunto de todos los homomorfismos canónicos $\beta : L(S) \longrightarrow B$ tales que $N(\beta)$ no contiene generadores libres de $L(S)$.

E) Sobre la base de los resultados anteriores resumiremos ahora el procedimiento completo para construír el álgebra libre L_n con n generadores libres.

Suponemos conocidas (además del álgebra libre con 0 generadores libres $L_0 = \{1\}$) las álgebras libres $L_1, L_2, \ldots , L_{n-1}$ con $1,2,\ldots,n-1$ generadores libres.

a) Construcción de la clase de pares F :

Para cada parte propia S del conjunto $N = \{1,2,..n\}$, consideremos el álgebra libre $L(S)$ con el conjunto $\Sigma = \{g_i\}_{i \in S}$ de generadores libres ($L(S)$ es isomorfa a alguna de las álgebras L_k , $0 \leqslant k < n$).

Para cada s.d. D de $L(S)$ tal que $D \cap \Sigma = \emptyset$, construímos el álgebra cociente $B = L(S)/D$. Si $\beta : L(S) \to B$ es el homomorfismo canónico relativo a D, indicaremos en B la familia de todos los elementos $b_i = \beta(g_i)$ con $i \in S$.

El conjunto de todos los pares $(B , (b_i)_{i \in S})$ así construídos constituye la clase F_S . $F = \bigcup_{S \subset N} F_S$.

b) Construcción de la clase E :

Para cada $(B , (b_i)_{i \in S}) \in F_S$, construímos el par $(B^+, (b_i)_{i \in N})$ donde $B^+ = B \cup \{p\}$ y $b_i = p$ para todo $i \in N - S$.

E_S es la clase de todos los pares así obtenidos, y $E = \bigcup_{S \subset N} E_S$.

c) Construcción de L_n :

Sea $E = \{(A_t , (a_i^{(t)})_{i \in N})\}$ $t \in T$

Consideremos el producto directo $\Pi = \prod_{t \in T} A_t$, y para cada $t \in T$ el homomorfismo $h_t : L_n \longrightarrow A_t$ determinado por la condición:

$$h_t(g_k) = a_k^{(t)} \quad , \text{ para cada } k \in N \,.$$

La aplicación h de L_n en Π definida por

$$h(x) = (h_t(x))_{t \in T} \quad ,$$

es un monomorfismo de L_n en Π .

$h(L_n) \cong L_n$ es la subálgebra de Π generada por los elementos a , $h(g_k) = (h_t(g_k))_{t \in T} = (a_k^{(t)})_{t \in T}, (k=1,\dots,n)$.

F) Podemos ejemplificar el procedimiento anteriormente descripto, con la construcción de las álgebras libres con 1, 2 y 3 generadores libres.

Comenzaremos con el caso del álgebra con 3 generadores libres que se presta más para mostrar la marcha del procedimiento.

(i) <u>Algebra libre L_3 , con 3 generadores libres (g_1 , g_2 , g_3)</u>.

Consideramos conocidas las álgebras $L_0 = \{1\}$, L_1 y L_2 (fig. 1 y 2, Parte I).

$N = \{1, 2, 3\}$ tiene $7 = 2^3 - 1$ partes propias :

$$\emptyset \,,\, \{1\} \,,\, \{2\} \,,\, \{3\} \,,\, \{1,2\} \,,\, \{2,3\} \,,\, \{3,1\}$$

a) Construcción de la clase F .

1º) Clases $F_{\{1,2\}}$, $F_{\{2,3\}}$ y $F_{\{3,1\}}$

Razonemos sobre el álgebra L_2 (fig. 2, Parte I) cambiando las notaciones oportunamente.

Los sistemas deductivos de L_2 que no contienen ninguno de los generadores libres a,b son los 15 siguientes:

$D(1) = \{1\}$; $D(k)$; $D(m)$; $D(g)$; $D(h)$; $D(e)$; $D(f)$;

$D(n)$; $D(i)$; $D(j)$; $D(c)$; $D(d)$;

$D(k) \vee D(m) = \{k, m, 1\}$;

$D(e) \vee D(f) = \{e, f, g, h, k, m, 1\}$;

$D(i) \vee D(j) = \{i, j, k, m, n, 1\}$.

Para cada uno de estos s.d. construímos el cociente L_2/D respectivo, indicando las imágenes de los generadores a,b en el cociente.

Así, para el cociente $L_2/D(j)$ tenemos :

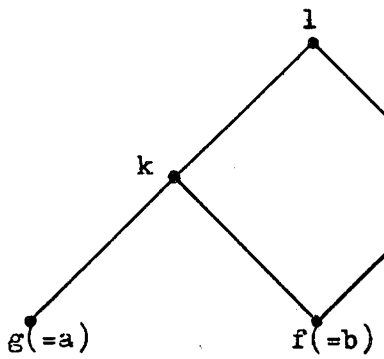


Figura 3

$\rightarrow$	f	g	h	k	1
f	1	g	1	1	1
g	h	1	h	1	1
h	k	g	1	k	1
k	h	g	h	1	1
1	f	g	h	k	1

(Hemos utilizado el resultado del Lema 4, 1, k, g, h, f son los elementos máximos de las clases de equivalencia módulo $D(j)$, la tabla de la operación se obtiene, entonces, directamente de la tabla 2, Parte I).

Para obtener $F_{\{1,2\}}$ (resp. $F_{\{2,3\}}$, $F_{\{3,1\}}$) sustituiremos en cada cociente a por a_1, b por a_2 (resp. a_2 ,a_3 y a_3, a_1), tendremos así $3 \times 15 = 45$ álgebras con sus correspondientes generadores.

2°) Clases $F_{\{1\}}$, $F_{\{2\}}$ y $F_{\{3\}}$.

Razonando sobre el álgebra de figura 1, Parte I, tenemos un solo s.d. que no contiene al generador a: el s.d. $D(1) = \{1\}$. Hay, entonces, un solo cociente: $L_2/D(1) \cong L_2$. Obtenemos $F_{\{1\}}$, $F_{\{2\}}$ y $F_{\{3\}}$ sustituyendo a por a_1, a_2, a_3 respectivamente: 3 álgebras en total.

3°) Clase $F_{\emptyset}$.

El único par de $F_{\emptyset}$, es como se ha indicado antes $(\{1\} , \emptyset)$.

F contiene en total $45 + 3 + 1 = 49$ pares.

b) Construcción de E .

A partir de cada uno de los 49 pares obtenidos en a) construímos los 49 pares de E.

Por ejemplo, a partir del par indicado en figura 3 (que supondremos pertenece a $F_{\{1,2\}}$, colocando $a = a_1$,

$b = a_2$) obtenemos el par indicado en la figura siguiente:

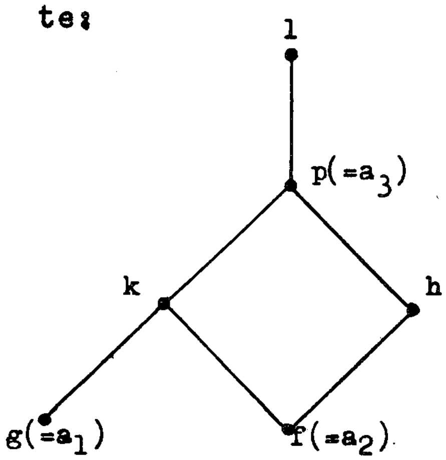
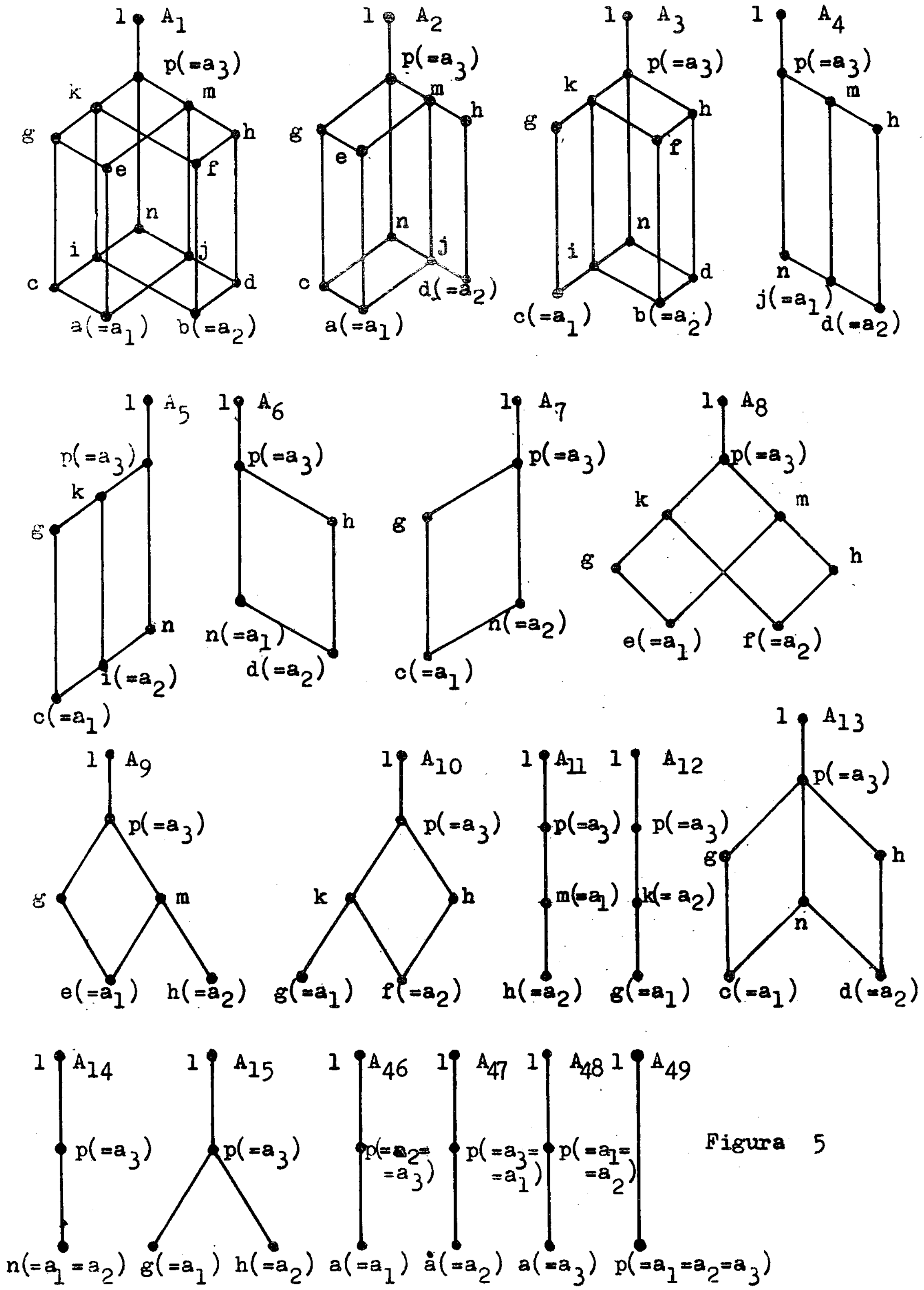


Figura 4

$\rightarrow$	f	g	h	k	l	p
f	l	g	l	l	l	l
g	h	l	h	l	l	l
h	k	g	l	k	l	l
k	h	g	h	l	l	l
l	f	g	h	k	l	p
p	f	g	h	k	l	l

Indicamos en la figura siguiente, los diagramas de todos los pares de E , con sus correspondientes generadores a_1 , a_2 , a_3 .

Una tabla de la operación $\rightarrow$ válida para todas las álgebras de figura 5, se obtiene adjuntando a la tabla 2 (Parte I) una fila y una columna encabezadas por "p" y definiendo la operación $\rightarrow$ de p con los restantes elementos como se indicó en la definición de álgebra ampliada en párrafo 2 .



1 A1
p(=a3)
k m g h e f n i j c d
a(=a1) b(=a2)
1 A2
p(=a3)
m h g e n j c
d(=a2)
a(=a1)
1 A3
p(=a3)
k h g f n i d
c(=a1) b(=a2)
1 A4
p(=a3)
m h n
j(=a1)
d(=a2)
1 A5
p(=a3)
k g n
i(=a2)
c(=a1)
1 A6
p(=a3)
h
n(=a1)
d(=a2)
1 A7
p(=a3)
g
n(=a2)
c(=a1)
1 A8
p(=a3)
k m g h
e(=a1) f(=a2)
1 A9
p(=a3)
g m
e(=a1) h(=a2)
1 A10
p(=a3)
k h
g(=a1) f(=a2)
1 A11
p(=a3)
m(=a1)
h(=a2)
1 A12
p(=a3)
k(= a2)
g(=a1)
1 A13
p(=a3)
g h n
c(=a1) d(=a2)
1 A14
p(=a3)
n(=a1 =a2)
1 A15
p(=a3)
g(=a1) h(=a2)
1 A46
p(=a2= =a3)
a(=a1)
1 A47
p(=a3= =a1)
å(=a2)
1 A48
p(=a1= =a2)
a(=a3)
1 A49
p(=a1=a2=a3)

Figura 5

Los ejes $A_{16},\dots,A_{30}$ se obtienen de $A_1,\dots, A_{15}$ sustituyendo a_1, a_2, a_3 por a_2, a_3, a_1 respectivamente. $A_{31},\dots, A_{45}$ se obtienen de $A_1,\dots, A_{15}$ sustituyendo a_1, a_2, a_3 por a_3, a_1, a_2 respectivamente.

c) El producto Π es el conjunto de todas las sucesiones $(x_1, x_2,\dots, x_{49})$, con $x_k \in A_k$, algebrizado por $(x_1,\dots,x_{49}) \to (y_1,\dots,y_{49}) = (x_1 \to y_1,\dots,x_{49} \to y_{49})$.

L_3 es la subálgebra de Π generada por los elementos $g_1 = (a_1,\dots,a_1)$; $g_2 = (a_2,\dots,a_2)$; $g_3 = (a_3,\dots,a_3)$.

Una cota superior para el número de elementos de L_3, obtenida multiplicando el número de elementos de cada uno de los 49 ejes de Π es del orden de $3 \cdot 10^{37}$. Un cálculo hecho teniendo en cuenta que los generadores son elementos minimales, dá una cota superior del orden de 10^{27}.

ii) Algebra libre L_2, con 2 generadores libres (g_1, g_2).

Suponemos conocidas L_o y L_1.

$N = \{1,2\}$ tiene 3 partes propias: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$.

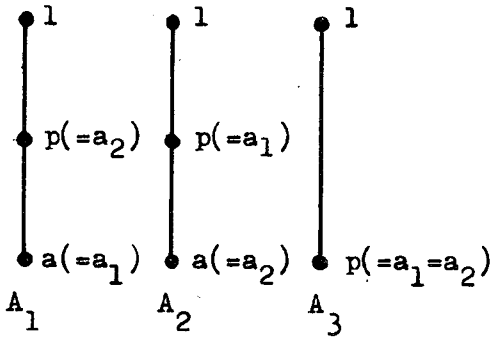
a) Construcción de F.

1°) $F_{\{1\}}$, $F_{\{2\}}$ tienen, como en i), b), 2°) un par cada una, isomorfo a L_1 .

2°) $F_{\emptyset}$, como en i), b), 3°) .

b) la clase E consiste, entonces, de los pares

Figura 6

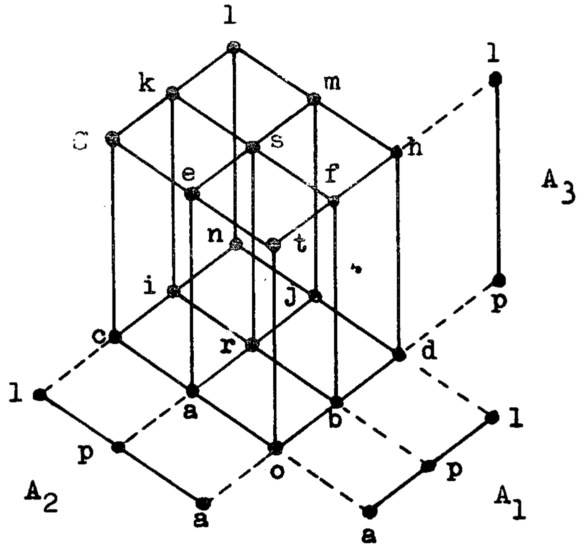


$\rightarrow$	a	1	p
a	1	1	1
1	a	1	p
p	a	1	1

c) Construcción de L_2 .

El producto directo $\Pi = A_1 \times A_2 \times A_3$ constituído por todas las ternas (x_1, x_2, x_3) , donde $x_k \in A_k$ $(k = 1, 2, 3)$ se representa en la figura siguiente

Figura 7



a = (a,p,p)	g = (a,1,1)	n = (1,1,p)
b = (p,a,p)	h = (1,a,1)	1 = (1,1,1)
c = (a,1,p)	i = (p,1,p)	r = (p,p,p)
d = (1,a,p)	j = (1,p,p)	s = (p,p,1)
e = (a,p,1)	k = (p,1,1)	t = (a,a,1)
f = (p,a,1)	m = (1,p,1)	0 = (a,a,p)

La operación $\rightarrow$ es definida en Π por

$$(x_1,x_2,x_3)\rightarrow(y_1,y_2,y_3) = (x_1\rightarrow y_1, x_2\rightarrow y_2, x_3\rightarrow y_3).$$

Así, por ejemplo, $f\rightarrow i = (p,a,1)\rightarrow(p,1,p) =$

$= (p\rightarrow p, a\rightarrow 1, 1\rightarrow p) = (1,1,p) = n.$

Podemos de este modo construir la tabla de la operación $\longrightarrow$ sobre Π que se indica a continuación.

Es fácil determinar la subálgebra L_2 de Π generada por $a = (a,p,p)$ y $b = (p,a,p)$, que coincide con la ya indicada en figura 2, tabla 2 (Parte I).

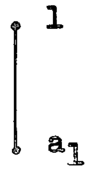
$\longrightarrow$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	l	r	s	t	0
a	l	h	l	h	l	h	l	h	l	l	l	l	l	l	l	l	h	h
b	g	l	g	l	g	l	g	l	l	l	l	l	l	l	l	l	g	g
c	m	h	l	h	m	h	l	h	l	m	l	m	l	l	m	m	h	h
d	g	k	g	l	g	k	g	l	k	l	k	l	l	l	k	k	g	g
e	n	d	n	d	l	h	l	h	n	n	l	l	n	l	n	l	h	d
f	c	n	c	n	g	l	g	l	n	n	l	l	n	l	n	l	g	c
g	j	d	n	d	m	h	l	h	n	j	l	m	n	l	j	m	h	d
h	c	i	c	n	g	k	g	l	i	n	k	l	n	l	i	k	g	c
i	e	h	g	h	e	h	g	h	l	m	l	m	l	l	m	m	t	t
j	g	f	g	h	g	f	g	h	k	l	k	l	l	l	k	k	t	t
k	a	d	c	d	e	h	g	h	n	j	l	m	n	l	l	l	g	0
m	c	b	c	d	g	f	g	h	i	n	k	l	n	l	i	k	t	0
n	e	f	g	h	e	f	g	h	k	m	k	m	l	l	s	s	t	t
l	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	l	r	s	t	0
r	g	h	g	h	g	h	g	h	l	l	l	l	l	l	l	l	t	t
s	c	d	c	d	g	h	g	h	n	n	l	l	n	l	n	l	t	0
t	n	n	n	n	l	l	l	l	n	n	l	l	n	l	n	l	l	n
0	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l

iii) <u>Algebra libre L_1, con un generador libre</u>

Aún para este caso trivial es aplicable el procedimiento de construcción.

$F = F_\emptyset$ contiene el único par $(\{1\}, \emptyset)$.

La clase E contiene el único par cuyo diagrama es



En concecuencia, Π tiene un solo eje isomorfo a L_1.

6.- ALGEBRAS CARACTERISTICAS.

A.Monteiro ha mostrado que una cadena con tres elementos es un álgebra característica para el cálculo implicativo positivo con dos variables proposicionales. La cadena de tres elementos es, justamente, la ampliada del álgebra L_1 con un generador libre.

Utilizando las conclusiones del § anterior, podemos probar, más generalmente, que $M = L_{n-1}^{+}$, ampliada del álgebra libre con $n-1$ generadores libres, es un álgebra característica para el cálculo proposicional implicativo positivo con n variables proposicionales, $\mathcal{L}(g_1, g_2, \ldots, g_n)$.

Con $a_1, \ldots, a_n$ se indicarán aquí, los generadores libres de L_n.

Notemos que, del § anterior resulta la existencia de una familia $(A_t)_{t \in T}$ de álgebras tal que:

i) Para cada t, A_t es generada por ciertos elementos $a_1^t, \ldots, a_n^t$, en número $\leq n$;

ii) si para cada $t \in T$, $h_t : L_n \longrightarrow A_t$ es el epimorfismo determinado por $h_t(a_i) = a_i^t$ $(i = 1, \ldots, n)$ se tiene $\bigcap_{t \in T} N(h_t) = \{1\}$;

iii) $A_t = B_t^+$, donde B_t tiene como generadores una parte propia de los generadores indicados en i) para A_t .

Sea $\sigma : L_n \longrightarrow F_M$ el epimorfismo determinado unívocamente por la condición $\sigma(a_i) = \Pi_i \quad (i = 1,\dots,n)$.

Para probar que $M = L_{n-1}^+$ es matriz característica de $\mathcal{L}(g_1,\dots, g_n)$, de acuerdo al Lema 5 (I, § 3, C), será suficiente probar el siguiente:

TEOREMA 21: <u>$\sigma : L_n \longrightarrow F_M$ es un isomorfismo</u> .

DEMOSTRACION: Sea $f_t : F_M \longrightarrow A_t$ la aplicación definida por $f_t(\alpha_M) = \alpha_{A_t}(a^t)$, donde $a^t=(a_1^t,\dots,a_n^t) \in A_t^n$.

Debemos verificar que f_t está bien definida, esto es, que si $\alpha_M = \beta_M$, entonces $\alpha_{A_t}(a^t) = \beta_{A_t}(a^t)$.

Cada álgebra B_t es imagen homomórfica de L_{n-1} puesto que iii) B_t tiene $k \leqslant n-1$ generadores . Como L_{n-1} es finita, por Lema 4 (I, § 2, C), podemos considerar a B_t como una subálgebra de L_{n-1} . Además, es de demostración fácil, que de "B_t subálgebra de L_{n-1}" resulta "$A_t = B_t^+$ es subálgebra de $M = L_{n-1}^+$" .

Entonces, es inmediato que $\alpha_M = \beta_M$ implica $\alpha_{A_t} = \beta_{A_t}$ y, por consiguiente, $\alpha_{A_t}(a^t) = \beta_{A_t}(a^t)$.

f_t es, además, un homomorfismo, pues

$$f_t(\alpha_M \to \beta_M) = f_t(\alpha \to \beta)_M = (\alpha \to \beta)_{A_t}(a^t) = \alpha_{A_t}(a^t) \to \beta_{A_t}(a^t) =$$
$$= f_t(\alpha_M) \to f_t(\beta_M) \ .$$

Probemos que $f_t \circ \sigma = h_t$, para lo cual basta verificar que $f_t \circ \sigma$, h_t coinciden en los generadores de L_n .

Indicando con Π_i^t la proyección i-ésima de $A_t^n = A_t x \dots x A_t$, se tiene

$$(f_t \circ \sigma)(a_i) = f_t(\sigma(a_i)) = f_t(\Pi_i) = f_t((g_i)_M) = (g_i)_{A_t}(a^t)$$
$$\Pi_i^t(a^t) = a_i^t = h_t(a_i) \ .$$

De $f_t \circ \sigma = h_t$, por Lema 1, se tiene $N(\sigma) \subseteq N(h_t)$.

Por ii) $N(\sigma) = \{1\}$. Lo que prueba que σ es un isomorfismo.-

BIBLIOGRAFIA

BIRKHOFF, G.- Lattice Theory - Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XXV - N.Y. (1948).

-.- - - - - - On the structure of abstract algebras - Proccedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. XXXI - (1935) - pp. 433-454.

CURRY, H.B.- Leçons de Logique Algébrique - Collección de Logique Mathématique - Serie A, Vol. 2, Paris, 1952.

DIEGO, A.- Sobre Algebras Implicativas.- Comunicación presentada en las Sesiones Matemáticas de la U.M.A. (1960).

FREGE, G.- Begriffschiff - Halle (1879). pp. 25-30

HENKIN, L.- An Algebraic Characterization of Quantifiers - Fundamenta Mathematicae - Vol. XXXVII (1950), pp. 63-74.

HILBERT, D.- Die Logischen Grundlagen der Mathematik- Mathematischen Annalen. 88 Band (1923) pp. 151-165.

HILBERT, D.- BERNAYS, P.- Grundlagen der Mathematik - Erster Band, Berlin (1934). Zweiter Band, Berlin (1939).

JASKOWSKI, S.- <u>Recherches sur le système de la Logique intuicioniste</u>.- Actes du Congrès International de Philosophie Scintifique. Sorbonne. Paris. 1955. Volume VI.- Philosophie des Mathématiques. pp. 58-61- Actualités Scientifiques et Industrielles nº 393.- Paris. Hermann et Cie., Editeurs. (1936).

KANGER, S. - <u>A note on partial postulate sets for propositional logic</u> - Theoria - Volume XXI (1955) - pp. 99-104.

LUKASIEWICZ, J - TARSKI, A.- <u>Untersuchungen über den Aussagenkalkül</u> - Comptes Rendus des séances de la Societé des Sciences de Varsovie. Vol. 23, 1930, cl. iii. pp. 30-50.

MONTEIRO, A. - <u>L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques</u> - Segundo symposium de matemáticas - Villavicencio - Mendoza (1954). pp. 129-162.

- - - - - - - - <u>Linéarization des Algèbres de Heyting</u> - Comunicación presentada al 1960 - International Congress for logic, Methodology and Philosophy of Science, ó <u>Linèarization de la logique positive de Hilbert-</u>

Bernays. Comunicación presentada en las Sesiones Matemáticas de la U.M.A. (1960)

OGASAWARA, T.- Relation between Intuicionistic Logic and Lattice. Journal of Science of the Hiroshima University - Series A, Vol. 9 (1939). pp. 157-164.

SKOLEM, Th. - Consideraciones sobre los fundamentos de la matemática - Revista Matemática Hispano-Americana - 4ª Serie. Tomo 12 (1952). pp. 169-200 y Tomo 13 (1953). pp. 149-174.

STONE, M. - Topological Representation of Distributive Lattices and Browerian Logics - Casopis pro pestováni matematiky a fysiky - Vol. 67 (1937) pp. 1-25.

TARSKI, A. - Der Aussagenkalkül und die Topologie - Fundamenta Mathematicae, Vol. 31 (1938) pp. 103-134.

TARSKI, A. - Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik - Comptes Rendus des séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie. Vol. 23 (1930) cl. iii . pp. 22-29.

TARSKI, A.(') - Logic, semantics, meta-mathematics - (papers from 1923 to 1938. Translated by J.H. Woodger). Oxford. At the Clarendon Press (1956).

WARD, M. - Structure residuation - Annals of Mathematics - Vol. 39 (1938). pp. 558-568.

(') Los trabajos de Tarski han sido consultados en esta obra.-

FE DE ERRATAS

Pág.	reng.	En lugar de:	Debería ser:
5	19	$g \in G$	$g \in \mathcal{G}$
12	17	k	n
19	6	$D(a_1) \vee D(a_2) \vee \ldots D(a_n)$	$D(a_1) \vee D(a_2) \vee \ldots \vee D(a_n)$
23	3	$\overline{K} = A - \{x\}$	$\overline{K} \subseteq A - \{x\}$
23	9	$\overline{K} = S$	$\overline{K} \subseteq S$
23	15	estos	esto
24	9	$\mathcal{L}(G)$	$\mathcal{L}(\mathcal{G})$
24	18	$(\alpha \to \beta)_A \quad \alpha_A \to \beta_A$	$(\alpha \to \beta)_A = \alpha_A \to \beta_A$
25	6	$D(A)$	$\mathcal{D}(A)$
27	11	$x \in D \vee D(a)$	$x \in D_1 \vee D(a)$
28	10	$D \cap \bigvee_{i \in I} D \subseteq \bigvee_{i \in I} (D \cap D)$	$D \cap \bigvee_{i \in I} D_i \subseteq \bigvee_{i \in I} (D \cap D_i)$
38	6	$a \in Q$ ó $b \notin Q$	$a \notin Q$ ó $b \in Q$
38	6	$a \in P$ ó bien $b \notin P$	$a \notin P$ ó bien $b \in P$
38	7	$b \notin P$	$b \in P$
38	8	$a \to b \notin P$	$a \to b \in P$
38	9	$a \in P$	$a \notin P$
38	12	y no contiene $a \to b$	y no contiene b
39	27	B	$\mathcal{B}$
42	4	T.	M.
43	25	A	A^{**}

Pág., reng.		En lugar de:	Debería ser:
44	2	(D(a)	(D(a))
54	17	A	A^{+}
59	18	$1 \leq i < n$	$1 \leq i \leq n$
59	19	A_p	A_p^{-}
50	21	A_p	A_p^{-}
62	1	Hilbert finitas	Hilbert libres finitas
64	10	desigualdad	igualdad
69	15	B	B^{+}
70	12	L_S	$L_{\mathcal{S}}$
86	10	Colleccion	Collection
86	15	Begriffschiff	Begriffsschrift
87	2	intuicioniste	intuitioniste
87	3	Scintifique	Scientifique
87	21	Linéarization	Linéarisation
87	24	Linèarization	Linéarisation
88	3	Intuicionistic	Intuitionistic
88	13	Browerian	Brouwerian

impreso en
DIESTRA PRODUCCIONES
O'Higgins 42-B. BLANCA
Octubre de 1965