

LUIZ MONTEIRO et LORENZO GONZALEZ COPPOLA

Sur une Construction des
Algèbres de Lukasiewicz trivalentes

1964

INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

Nº 17

SUR UNE CONSTRUCTION DES
AIGBRES DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES

par

Luiz F.T. Monteiro et Lorenzo González Coppola

1964

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca

Este fascículo contiene el Preprint de un trabajo en curso de publicación en Portugaliae Mathematica.

Ce fascicule contient le Preprint d'un travail à être publié dans Portugaliae Mathematica.

SUR UNE CONSTRUCTION DES ALGÈBRES
DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES

par

Luiz F. T. Monteiro et Lorenzo Gonzalez Coppola

1 - INTRODUCTION . La notion d'algèbre de Boole monadi - que joue un rôle central dans l'étude du calcul fonctionnel monadique classique , (Paul Halmos (1962)) . D'un autre côté les algèbres de Lukasiewicz trivalentes - dont la théorie a été fondée et développée par Gr. C. Moisil (1940,1941,1960) - joue un rôle analogue dans l'étude du calcul propositionnel trivalent de Lukasi - wicz (1920) .

Antônio Monteiro a trouvé une certaine cons - truction \mathcal{F} (qui sera indiquée plus loin) qui permet d'obtenir à partir de chaque algèbre de Boole monadique A une algèbre de Lukasiewicz trivalente $\mathcal{F}(A)$; ayant par cela même établi une relation entre ces deux notions.

Pour démontrer que $\mathcal{F}(A)$ est une algèbre de Lukasiewicz trivalente , A. Monteiro a utilisé la théo - rie des N -lattices , au sens de Helena Rasiowa (1958) , et en particulier les résultats qu'il a établis sur les N -lattices semi - simples ; mais comme la construction \mathcal{F} ne fait intervenir que des notions relatives à la théorie des algèbres de Boole monadiques il est naturel

de chercher à démontrer le résultat indiqué sans faire usage de la théorie des N-lattices .

Nous remercions le Prof. A. Monteiro de nous avoir posée cette question , dont la solution est indiquée dans cette note . Nous espérons ainsi contribuer à rendre plus accessible la démonstration du résultat indiqué . Dans le paragraphe 2 nous rappelons les notions et les formules que nous utiliserons par la suite , dans le paragraphe 3 nous indiquons la construction \mathcal{L} et dans le paragraphe 4 la démonstration que nous avons trouvée

2 - DEFINITIONS . Nous supposons connues les notions de réticulé distributif et d'algèbre de Boole (G.Birkhoff (1948)) ; mais comme les calculs que nous avons à faire sont assez longs il est commode d'avoir un système d'axiomes aussi court que possible pour la notion de réticulé distributif . A cet effet rappelons que d'après M.Sholander (1951) un réticulé distributif peut être caractérisé comme un système $\mathcal{A} = (A , \wedge , \vee)$ formé par un ensemble , non vide , A , et deux opérations binaires \wedge et \vee définies sur A qui vérifient les axiomes suivants (quels que soient a, b, c de A) :

$$A1) \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

$$A2) \quad a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a)$$

Les réticulés distributifs que nous allons considérer auront toujours un premier et un dernier élément, que nous représenterons respectivement par 0 et 1 .

Une algèbre de Boole est un réticulé distributif A , ayant un premier et un dernier élément, tel que chaque élément x de A a un complément, que nous représenterons par $\neg x$.

Rappelons maintenant les définitions suivantes :

2.1. DEFINITION . Un quantificateur existentiel dans une algèbre de Boole est une fonction ∇ de A dans A qui vérifie les conditions suivantes (quels que soient les éléments x, y de A) :

$$E0) \quad \nabla 0 = 0$$

$$E1) \quad x \wedge \nabla x = x$$

$$E2) \quad \nabla(x \wedge \nabla y) = \nabla x \wedge \nabla y$$

(P.Halmos (1962)) .

2.2. DEFINITION . Un algèbre de Boole monadique est un système $\mathcal{A} = (A, \nabla)$ formé par une algèbre de Boole A et un quantificateur existentiel ∇ défini sur A .

2.3. DEFINITION . Dans une algèbre de Boole Monadique on appelle quantificateur universel à l'opération Δ définie par la formule $\Delta x = \neg \nabla \neg x$.

Dans le calcul fonctionnel monadique classique le quantificateur existenciel ∇ et son dual Δ sont représentés par les symboles \exists et \forall .

Indiquons maintenant la liste des règles de calcul valables dans toute algèbre de Boole Monadique et que nous aurons à mentionner dans la démonstration que sera indiquée au n° 4.

S0) $1 \vee x = 1$	I0) $0 \wedge x = 0$
S1) $0 \vee x = x$	I1) $1 \wedge x = x$
S2) $x \vee y = y \vee x$	I2) $x \wedge y = y \wedge x$
S3) $x \vee (y \vee z) =$ $= (x \vee y) \vee z$	I3) $x \wedge (y \wedge z) =$ $= (x \wedge y) \wedge z$
S4) $x \vee (x \wedge y) = x$	I4) $x \wedge (x \vee y) = x$
S5) $x \vee (y \wedge z) =$ $= (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	I5) $x \wedge (y \vee z) =$ $= (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
S6) $x \vee \neg x = 1$	I6) $x \wedge \neg x = 0$
M) $\neg (x \wedge y) =$ $= \neg x \vee \neg y$	
E0) $\nabla 0 = 0$	U0) $\Delta 1 = 1$
E1) $x \wedge \nabla x = x$	U1) $x \vee \Delta x = x$
E2) $\nabla (x \wedge \nabla y) =$ $= \nabla x \wedge \nabla y$	U2) $\Delta (x \vee \Delta y) =$ $= \Delta x \vee \Delta y$
E3) $\nabla 1 = 1$	U3) $\Delta 0 = 0$
E4) $\nabla \nabla x = \nabla x$	U4) $\Delta \Delta x = \Delta x$
E5) $\nabla (x \vee y) =$ $= \nabla x \vee \nabla y$	U5) $\Delta (x \wedge y) =$ $= \Delta x \wedge \Delta y$

$$\begin{array}{ll}
 \text{E6)} \quad \nabla \Delta x = \Delta x & \text{U6)} \quad \Delta \nabla x = \nabla x \\
 \text{E7)} \quad \nabla (x \wedge \Delta y) = & \text{U7)} \quad \Delta (x \vee \nabla y) = \\
 & = \nabla x \wedge \Delta y & = \Delta x \vee \nabla y \\
 \text{E8)} \quad - \nabla x = \Delta - x & \text{U8)} \quad - \Delta x = \nabla - x \\
 \text{E9)} \quad \nabla x \vee \Delta x = \nabla x & \text{U9)} \quad \Delta x \wedge \nabla x = \Delta x
 \end{array}$$

La notion d'algèbre de Lukasiewicz trivalente introduite par Gr. Moisil (1960) peut être formulée plus simplement au moyen de la définition suivante qui a été indiquée par A. Monteiro, dans son cours sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes (premier semestre 1963).

2.5. DEFINITION . Une algèbre de Lukasiewicz trivalente est un système $\mathcal{Q} = (L, \wedge, \sim, \nabla, \cap, \cup)$ tel que : 1°) L est un réticulé distributif par rapport aux opérations \cap et \cup , 1 étant le dernier élément de L. 2°) L'opération \sim vérifie les conditions ; N1) $\sim \sim x = x$; N2) $\sim (x \cap y) = \sim x \cup \sim y$. 3°) L'opération ∇ vérifie les conditions : $\nabla 1) \sim x \cup \nabla x = 1$ $\nabla 2) x \cap \sim x = \sim x \cap \nabla x$; $\nabla 3) \nabla (x \cap y) = \nabla x \cap \nabla y$.

3. LA CONSTRUCTION \mathcal{F} . Nous allons maintenant reproduire ici la construction \mathcal{F} trouvée par A. Monteiro. Soit (A, ∇) un algèbre de Boole monadique et soit \rightarrow

l'opération définie sur A au moyen de la formule suivante : $x \rightarrow y = \nabla - x \vee y$. L'opération binaire \rightarrow (d'implication contraposable) est définie par la formule : $x \rightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (-y \rightarrow -x)$.

Posons encore, par définition :

$$x \cup y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

$$x \cap y = -(-x \cup -y)$$

En effectuant les calculs on trouve :

$$D1) x \cup y = \Delta x \vee y \vee (x \wedge \Delta - y)$$

$$D2) x \cup y = (x \vee y) \wedge (\Delta x \vee y \vee \Delta - y)$$

$$C1) x \cap y = \nabla x \wedge y \wedge (x \vee \nabla - y)$$

$$C2) x \cap y = (x \wedge y) \vee (\nabla x \wedge y \wedge \nabla - y)$$

Considérons maintenant le système algébrique $(A, 1, -, \nabla, \cap, \cup)$.

3.1. DEFINITION . Nous dirons que l'élément x est congruent à l'élément y et nous écrirons $x \equiv y$ si $x \rightarrow y = 1$ et $y \rightarrow x = 1$, ou, ce que est équivalent, si $\nabla x = \nabla y$ et $\Delta x = \Delta y$.

Enfin, énonçons le théorème démontré par A.

Monteiro .

3.2. THEOREME . La relation " \equiv " définie sur A est une relation d'équivalence compatible avec les

opérations $, - , \nabla , \cap , \cup$. Soit $L = A / \equiv$
 l'ensemble quotient de A par \equiv , et repré-
 sentons par $|a|$ la classe d'équivalence qui
 contient l'élément a de A . Si nous posons :
 $I = |1|$; $\sim |x| = |-x|$; $\nabla |x| = |\nabla x|$;
 $|x| \cap |y| = |x \cap y|$; $|x| \cup |y| =$
 $= |x \cup y|$, alors le système $(L, I, \sim ,$
 $\nabla , \cap , \cup)$ est une algèbre de Lukasiewicz
 trivalente .

4. DEMONSTRATION DU THEOREME 3.2 . Nous allons mainte-
 nant indiquer la démonstration, du théorème 3.2 , que nous
 avons trouvée . Comme elle est assez longue nous la décom-
 poserons , comme d'habitude , dans une série de lemmes .

4.1. LEMME . $\nabla (x \cup y) = \nabla x \vee \nabla y$

DEM. En effet , en utilisant les formules D1 ,
 (E5 et E6) , E7 , (S5 et E8) , (S6 et I1) , (S2 et E9) ,
 nous avons : $\nabla (x \cup y) = \nabla (\Delta x \vee y \vee (x \wedge \Delta - y)) =$
 $= \Delta x \vee \nabla y \vee \nabla (x \wedge \Delta - y) =$
 $= \Delta x \vee \nabla y \vee (\nabla x \wedge \Delta - y) =$
 $= \Delta x \vee ((\nabla y \vee \nabla x) \wedge (\nabla y \vee - \nabla y)) =$
 $= \Delta x \vee \nabla y \vee \nabla x = \nabla x \vee \nabla y .$

4.2. LEMME . $\Delta (x \cup y) = \Delta x \vee \Delta y$

DEM. En effet , d'après les formules D2 , U5 ,

(U2 et U4) , I5 , U5 , (I4,I5,I6 et S1) , U5 , (S2 et S4)
 nous avons : $\Delta (x \cup y) = \Delta ((x \vee y) \wedge (\Delta x \vee y \vee \Delta -y)) =$
 $= \Delta (x \vee y) \wedge \Delta (\Delta x \vee y \vee \Delta -y) =$
 $= \Delta (x \vee y) \wedge (\Delta x \vee \Delta y \vee \Delta -y) =$
 $= (\Delta(x \vee y) \wedge \Delta x) \vee (\Delta(x \vee y) \wedge \Delta y) \vee (\Delta(x \vee y) \wedge$
 $\wedge \Delta -y) =$
 $= \Delta((x \vee y) \wedge x) \vee \Delta((x \vee y) \wedge y) \vee \Delta((x \vee y) \wedge -y) =$
 $= \Delta x \vee \Delta y \vee \Delta(x \wedge -y) =$
 $= \Delta x \vee \Delta y \vee (\Delta x \wedge \Delta -y) = \Delta x \vee \Delta y$

4.3. LEMME . $\nabla(x \cap y) = \nabla x \wedge \nabla y$

DEM. En effet , par suite des formules C2 , E5 ,
 (E2 et E4) , S5 , E5 , (S4,S5,S6 et I1) , E5 , (I2 et I4),
 nous avons : $\nabla (x \cap y) = \nabla ((x \wedge y) \vee (\nabla x \wedge y \wedge \nabla -y)) =$
 $= \nabla (x \wedge y) \vee \nabla (\nabla x \wedge y \wedge \nabla -y) =$
 $= \nabla (x \wedge y) \vee (\nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla -y) =$
 $= (\nabla(x \wedge y) \vee \nabla x) \wedge (\nabla(x \wedge y) \vee \nabla y) \wedge (\nabla(x \wedge y) \vee \nabla -y) =$
 $= \nabla((x \wedge y) \vee x) \wedge \nabla((x \wedge y) \vee y) \wedge \nabla((x \wedge y) \vee -y) =$
 $= \nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla (x \vee -y) =$
 $= \nabla x \wedge \nabla y \wedge (\nabla x \vee \nabla -y) = \nabla x \wedge \nabla y$

4.4. LEMME . $\Delta(x \cap y) = \Delta x \wedge \Delta y$

DEM. En effet , en utilisant les formules C1 ,
 (U5 et U6), U7 ,(I5 et U8) , (I6 et S1) , (I2 et U9) ,
 nous avons : $\Delta(x \cap y) = \Delta(\nabla x \wedge y \wedge (x \vee \nabla -y)) =$
 $= \nabla x \wedge \Delta y \wedge \Delta(x \vee \nabla -y) =$

$$\begin{aligned}
&= \nabla x \wedge \Delta y \wedge (\Delta x \vee \nabla \neg y) = \\
&= \nabla x \wedge ((\Delta y \wedge \Delta x) \vee (\Delta y \wedge \neg \Delta y)) = \\
&= \nabla x \wedge \Delta y \wedge \Delta x = \Delta x \wedge \Delta y
\end{aligned}$$

4.5. LEMME . La relation " \equiv " définie sur A est une relation d'équivalence .

DEM . On vérifie immédiatement que :

- 1) $x \equiv x$
- 2) Si $x \equiv y$ alors $y \equiv x$
- 3) Si $x \equiv y$ et $y \equiv z$ alors $x \equiv z$

4.6. LEMME . La relation " \equiv " définie sur A est compatible avec les opérations " \cup " et " \cap ".
c'est-à-dire : si $x \equiv x'$ et $y \equiv y'$ alors
 $x \cup y \equiv x' \cup y'$ et $x \cap y \equiv x' \cap y'$.

DEM . Par hypothèse nous avons : H1) $\nabla x = \nabla x'$;
H2) $\Delta x = \Delta x'$; H3) $\nabla y = \nabla y'$; H4) $\Delta y = \Delta y'$.

Nous avons à démontrer que :

- T1) $\nabla (x \cup y) = \nabla (x' \cup y')$
- T2) $\Delta (x \cup y) = \Delta (x' \cup y')$
- T3) $\nabla (x \cap y) = \nabla (x' \cap y')$
- T4) $\Delta (x \cap y) = \Delta (x' \cap y')$

T1) En utilisant successivement: le lemme 4.1 , (H1 et H3),
le lemme 4.1 , nous avons : $\nabla (x \cup y) = \nabla x \vee \nabla y =$
 $= \nabla x' \vee \nabla y' = \nabla (x' \cup y')$

- T2) D'après le lemme 4.2 , (H2 et H4) , lemme 4.2 , on a : $\Delta(x \cup y) = \Delta x \vee \Delta y = \Delta x' \vee \Delta y' = \Delta(x' \cup y')$
- T3) Par suite du lemme 4.3 , (H1 et H3) , lemme 4.3 , nous avons : $\nabla(x \cap y) = \nabla x \wedge \nabla y = \nabla x' \wedge \nabla y' = \nabla(x' \cap y')$
- T4) Enfin le lemme 4.4 , (H2 et H4) et le lemme 4.4 impliquent : $\Delta(x \cap y) = \Delta x \wedge \Delta y = \Delta x' \wedge \Delta y' = \Delta(x' \cap y')$.

4.7. LEMME. La relation " \equiv " définie sur A est compatible avec les opérations " $-$ " et " ∇ "; c'est-à-dire si $x \equiv y$ alors $-x \equiv -y$ et $\nabla x \equiv \nabla y$.

- DEM. Supposons donc que : H1) $\nabla x = \nabla y$;
- H2) $\Delta x = \Delta y$. Il faut montrer que :
- T1) $\nabla -x = \nabla -y$ T2) $\Delta -x = \Delta -y$
- T3) $\nabla \nabla x = \nabla \nabla y$ T4) $\Delta \nabla x = \Delta \nabla y$

T1) De U8 , H2 , U8 on déduit :

$$\nabla -x = -\Delta x = -\Delta y = \nabla -y$$

T2) D'après E8 , H1 , E8 , nous avons :

$$\Delta -x = -\nabla x = -\nabla y = \Delta -y$$

T3) De E4 , H1 , E4 , il résulte que :

$$\nabla \nabla x = \nabla x = \nabla y = \nabla \nabla y$$

T4) De U6 , H1 , U6 , on conclut :

$$\Delta \nabla x = \nabla x = \nabla y = \Delta \nabla y$$

4.8 . La relation d'équivalence " \equiv " définie sur A , détermine une partition de A en classes d'équivalence. Représentons par $L = A / \equiv$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence (ou ce qui revient au même : l'ensemble quotient de A par \equiv), et par $|x|$ la classe d'équivalence qui contient l'élément x de A . Posons, par définition : I) $\sim |x| = | - x |$; II) $\nabla |x| = | \nabla x |$; III) $|x| \cap |y| = |x \cap y|$; IV) $|x| \cup |y| = |x \cup y|$. Remarquons que d'après les lemmes 4.6 et 4.7 nous pouvons affirmer que les opérations précédentes sont bien définies. Observons encore que la classe d'équivalence $|1|$ contient seulement l'élément 1. En effet, les conditions suivantes sont deux à deux équivalentes : (1) $x \in |1|$, (2) $x \equiv 1$, (3) $\nabla x = \nabla 1$ et $\Delta x = \Delta 1$, (4) $\nabla x = 1$ et $\Delta x = 1$, (5) $x = 1$. Nous écrirons pour simplifier : $I = |1| = \{1\}$.

4.9. LEMME : Le système (L, \cap, \cup) est un réticulé distributif.

DEM . Il suffit de montrer que les opérations \cap et \cup vérifient les axiomes de Sholander A1 et A2 .

$$\underline{A1) |x| \cap (|x| \cup |y|) = |x|}$$

Cette égalité est équivalente à

$$|x \cap (x \cup y)| = |x|$$

et nous devons montrer que : (1) $x \cap (x \cup y) \equiv x$.

En utilisant successivement les lemmes 4.3, 4.1 et I4,

$$\begin{aligned} \text{nous avons : (2) } \nabla(x \cap (x \cup y)) &= \nabla x \wedge \nabla(x \cup y) = \\ &= \nabla x \wedge (\nabla x \vee \nabla y) = \nabla x \end{aligned}$$

D'après les lemmes 4.4, 4.2 et I4, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \text{(3) } \Delta(x \cap (x \cup y)) &= \Delta x \wedge \Delta(x \cup y) = \Delta x \wedge (\Delta x \vee \\ &\vee \Delta y) = \Delta x \quad \text{et (1) est une conséquence de (2) et (3).} \end{aligned}$$

$$\underline{A2) \quad |x| \cap (|y| \cup |z|) = (|z| \cap |x|) \cup (|y| \cap |x|)}$$

cette condition est équivalente à

$$|x \cap (y \cup z)| = |(z \cap x) \cup (y \cap x)|$$

Montrons donc que

$$(1) \quad x \cap (y \cup z) \equiv (z \cap x) \cup (y \cap x)$$

En utilisant successivement, (lemmes 4.3 et 4.1), I5,

(S2 et I2), lemme 4.3, lemme 4.1, on a :

$$\begin{aligned} \text{(2) } \nabla(x \cap (y \cup z)) &= \nabla x \wedge (\nabla y \vee \nabla z) = \\ &= (\nabla x \wedge \nabla y) \vee (\nabla x \wedge \nabla z) = \\ &= (\nabla z \wedge \nabla x) \vee (\nabla y \wedge \nabla x) = \\ &= \nabla(z \cap x) \vee \nabla(y \cap x) = \nabla((z \cap x) \cup (y \cap x)) \end{aligned}$$

D'après les lemmes 4.4 et 4.2, I5, (S2 et I2), lemme 4.4, lemme 4.2, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{(3) } \Delta(x \cap (y \cup z)) &= \Delta x \wedge (\Delta y \vee \Delta z) = \\ &= (\Delta x \wedge \Delta y) \vee (\Delta x \wedge \Delta z) = \\ &= (\Delta z \wedge \Delta x) \vee (\Delta y \wedge \Delta x) = \\ &= \Delta(z \cap x) \vee \Delta(y \cap x) = \Delta((z \cap x) \cup (y \cap x)) \end{aligned}$$

et (1) est une conséquence de (2) et (3).

4.10. LEMME . I est le dernier élément du reticulé L.

DEM. Pour cela , il est suffit de montrer que :

$|x| \cap I = |x|$ quel que soit $|x| \in L$, ou ce qui est équivalent $|x \cap 1| = |x|$ quel que soit $|x| \in L$, c'est-à-dire que : (1) $x \cap 1 \equiv x$, quel que soit $x \in A$.

Le lemme 4.3 , E3 et I1 impliquent :

$$(2) \nabla(x \cap 1) = \nabla x \wedge \nabla 1 = \nabla x \wedge 1 = \nabla x$$

et d'après le lemme 4.4 , U0 et I1 nous avons :

$$(3) \Delta(x \cap 1) = \Delta x \wedge \Delta 1 = \Delta x \wedge 1 = \Delta x$$

De (2) et (3) on déduit (1) .

4.11. LEMME. L'opération " \sim " définie sur L vérifie les conditions N1 et N2 .

$$\text{DEM. } \underline{N1) \sim \sim |x| = |x|}$$

Cette condition est équivalente à $|- - x| = |x|$, ou à $|x| = |x|$, ce que est évident .

$$\underline{N2) \sim (|x| \cap |y|) = \sim |x| \cup \sim |y|}$$

Cette condition est équivalente à

$$|-(x \cap y)| = |-x \cup -y|$$

et nous devons donc montrer que :

$$(1) -(x \cap y) \equiv -x \cup -y$$

En effet , de U8 , lemme 4.4 , M , U8 et lemme 4.1 , on déduit : (2) $\nabla(-(x \cap y)) = -(\Delta(x \cap y)) = -(\Delta x \wedge \Delta y) = -\Delta x \vee -\Delta y =$

$$= \nabla - x \vee \nabla - y = \nabla (-x \cup -y)$$

D'après E8, lemme 4.3, M, E8, lemme 4.2, on a :

$$\begin{aligned} (3) \Delta(- (x \cap y)) &= - (\nabla (x \cap y)) = \\ &= - (\nabla x \wedge \nabla y) = \nabla x \vee \nabla y = \\ &= \Delta - x \vee \Delta - y = \Delta (-x \cup -y) \end{aligned}$$

et (1) est une conséquence de (2) et (3) .

4.12 . LEMME . L'opération " ∇ " définie sur L vérifie les conditions $\nabla 1$, $\nabla 2$ et $\nabla 3$.

$$\text{DEM. } \underline{\nabla 1) \sim |x| \cup \nabla |x| = I}$$

Cette condition est équivalente à $| -x \cup \nabla x | = I$

Il faut donc montrer que : (1) $-x \cup x \equiv 1$.

En effet, d'après (lemme 4.1 et E4), E5, S6, on a :

$$\begin{aligned} (2) \nabla (-x \cup \nabla x) &= \nabla -x \vee \nabla x = \\ &= \nabla (-x \vee x) = \nabla 1 . \end{aligned}$$

Et de (lemme 4.2 et U6), E8, S6, U0, on déduit :

$$\begin{aligned} (3) \Delta (-x \cup \nabla x) &= \Delta -x \vee \Delta x = \\ &= -\nabla x \vee \nabla x = 1 = \Delta 1 . \end{aligned}$$

et (1) est une conséquence de (2) et (3) .

$$\underline{\nabla 2) |x| \cap \sim |x| = \sim |x| \cap \nabla |x|}$$

Cette condition est équivalente à :

$$|x \cap -x| = | -x \cap \nabla x |$$

et nous avons à montrer que : (1) $x \cap -x \equiv -x \cap \nabla x$.

En utilisant successivement le lemme 4.3 et E4, I2,

lemme 4.3, on a : (2) $\nabla(-x \cap \nabla x) = \nabla -x \wedge \nabla x =$

$$= \nabla x \wedge \nabla -x = \nabla (x \cap -x) .$$

Le lemme 4.4 et U6 , E8 , I6 , impliquent :

$$(i) \Delta (-x \cap \nabla x) = \Delta -x \wedge \nabla x = -\nabla x \wedge \nabla x = 0$$

et d'après le lemme 4.4 , U5 , I6 , U3 :

$$(ii) \Delta (x \cap -x) = \Delta x \wedge \Delta -x = \Delta (x \wedge -x) = \Delta 0 = 0$$

De (i) et (ii) on déduit (3) $\Delta (-x \cap \nabla x) = \Delta (x \cap -x)$

et (1) est une conséquence de (2) et (3) .

$$\underline{\nabla 3) \nabla (|x| \cap |y|) = \nabla |x| \cap \nabla |y|}$$

Cette condition est équivalente à

$$|\nabla (x \cap y)| = |\nabla x \cap \nabla y|$$

c'est-à-dire à : (1) $\nabla (x \cap y) = \nabla x \cap \nabla y$

D'après E4 , lemme 4.3 , E4 , lemme 4.3 , nous avons :

$$(2) \nabla (\nabla (x \cap y)) = \nabla (x \cap y) = \nabla x \wedge \nabla y = \\ = \nabla \nabla x \wedge \nabla \nabla y = \nabla (\nabla x \cap \nabla y)$$

D'après : U6 , lemme 4.3 , U6 , lemme 4.4 , on a :

$$(3) \Delta (\nabla (x \cap y)) = \nabla (x \cap y) = \nabla x \wedge \nabla y = \\ = \Delta \nabla x \wedge \Delta \nabla y = \Delta (\nabla x \cap \nabla y)$$

et (1) est une conséquence de (2) et (3) .

D'après les lemmes 4.9,4.10,4,11 et 4.12 nous pouvons affirmer que le système $(L = A/\equiv , I , \sim , \nabla , \cap , \cup)$ est une algèbre de Lukasiewicz trivalente et le théorème 3.2 est démontré .

BIBLIOGRAPHIE

BIRKHOFF (Garrett)

- (1948) Lattice theory. Revised edition. American
Mathematical Society Colloquium Publications.
Vol.25 . Amer.Math.Soc.New York , 1948 .

HALMOS (Paul R.)

- (1962) Algebraic Logic. Chelsea Publishing Company.
New York . 1962 .

LUKASIEWICZ (Jan)

- (1920) O logike trojwartosciowej. Ruch Filozoficzny.
5 (1920) , 170 .

MOISIL (Gr.C.)

- (1940) Racheries sur les logiques non-chrysippien-
nes . Annales Scientifiques de l'Université
de Jassy . 26 (1940) , 431 -466.
- (1941) Notes sur les logiques non-chrysippiennes .
Annales Scientifiques de l'Université de
Jassy . 27 (1941) , 86 - 98 .
- (1960) Sur les ideaux des algèbres Lukasiowiczien-
nes trivalentes . Analele Universitatii C.
I. Parhon. Seria Acta Logica . 3 (1960) ,
83 - 95.

RASIOWA (Helena)

- (1958) N-lattices and constructive logic with strong
negation . Fundamenta Mathematicae . 46 (1958),
61 - 80 .

SHOLANDER (Marlow)

(1951) Postulates for distributive lattices . Ca -
nadian Journal of Mathematics . 3 (1951) ,
28 - 30 .