NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

28

DAVID MAKINSON

ASPECTOS DE LA LOGICA MODAL

1971
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

ASPECTOS DE LA LOGICA MODAL

por

DAVID MAKINSON

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
INSTITUTO DE MATEMATICA
BAHIA BLANCA - 1971

INDICE

PREFACIO

Estas notas presentan algunos aspectos de la teoría de las lógicas modales proposicionales, que pueden ser de interés particular para **los matemáticos.**

En el primer capítulo se define la clase de todas las lógicas modales autocongruentes, y se estudian desde un punto de vista sintáctico algunas de las subclases y elementos. Los capítulos subsiguientes tratan de los modelos. El segundo capítulo en particular se ocupa de las álgebras modales, su uso como modelos para las lógicas modales autocongruentes y las propiedades algebraicas intrínsecas. El tercer capítulo estudia modelos relacionales para lógicas modales regulares. Una addenda trata brevemente de las relaciones entre álgebras modales y modelos relacionales.

o se mencionan muchos aspectos de la lógica modal. Por ejemplo no se estudian las lógicas modales cuantificadas, y aún dentro del campo de la lógica modal proposicional no se discuten las lógicas modales que no son autocongruentes. Pero dentro de los temas que se tratan, se subraya lo general. Esto significa que se presta muy poca atención a las lógicas modales específicas y que el estudio se concentra sobre propiedades generales y amplias clases de lógicas modales, más que sobre el comportamiento de sistemas aislados.

Algunos de los resultados que se incluyen en estas notas son nuevos. Entre ellos 1.12 y 1.13 del capítulo 1; 2.4, 2.5, 2.6 del capítulo 2, y quizás también algunos entre los 2.12-2.14, 2.17-2.25. La definición de un modelo relacional que se da en el capítulo 3 es más general que la común, y utiliza un concepto nuevo, el de conjunto cerrado de evaluaciones en un marco relacional. Con esta definición más generalizada podemos establecer 3.8 y 3.22, que se basan en resultados ya conocidos, pero los amplían. Sin embargo, como se señala en la addenda, es necesario un refinamiento aún mayor del concepto de un modelo relacional para lograr una teoría de las relaciones entre modelos relacionales y álgebras modales que sea realmente elegante. Los resultados 4.1-4.5 que se presentan en la addenda sin demostración, van más allá que el material publicado hasta ahora.

Estas notas se basan en un seminario dado en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, Argentina, en los últimos meses del año 1969 mientras el autor se encontraba en Argentina contratado por la Organización de Estados Americanos. El autor agradece a ambas instituciones, así como a la Universidad Americana de Beirut por otorgar la licencia. Los participantes en el seminario contribuyeron a dar forma a estas notas. Newton da Costa en particular indujo al autor a distinguir claramente entre lógicas modales y sus axiomatizaciones; Roberto Cignoli impidió que el autor cometiera errores en el tratamiento de álgebras modales subdirectamente irreducibles; y Luisa Iturrioz supervisó la preparación de la versión dactilografiada. Además el autor quiere agradecer a su esposa, Fanny Miriam Goldman de Makinson,

que lo ayudó en problemas de la lengua castellana.

Estas notas están dedicadas a dos hombres cuya influencia sobre el trabajo es clara y manifiesta: Antonio Monteiro y Arthur Prior.

INTRODUCCION

Es difícil estudiar lógica modal sin una explicación de las ideas generales que la sustentan. Nuestro trabajo es en cierta manera independiente de esas ideas. Las estructuras que investigamos y las propiedades que demostramos que tienen, son de carácter matemático. Pero estas ideas generales prestan un interés y una motivación a un tema que puede fácilmente aparecer tanto árido como arbitrario.

Temdremos que suponer que el lector está algo familiarizado con la lógica proposicional clásica de funciones de verdad. Esta es la lógica de los operadores proposicionales tales como $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ y $\equiv$, que forman proposiciones a partir de proposiciones, de una manera muy especial: el valor de verdad de una proposición compleja formada por medio de tales operadores es determinado únicamente y uniformemente por los valores de verdad de las partes más simples. Las ideas centrales de la lógica de funciones de verdad son las de una tautología y una contratautología. Hasta aquí llega lo que se da por sentado.

La lógica modal se ha desarrollado como resultado de <u>ciertas limitaciones aparentes en los medios de expresión</u> de la lógica clásica. La lógica de los operadores funcionales de verdad, combinada con la lógica de los cuantificadores, es suficientemente general para muchos fines. En particular, y según la opinión de muchos lógicos, es lo suficientemente general como para permitir la expresión de todos los principios de inferencia y variedades de deducción que son realmente utilizados en matemática. Pero en algunos aspectos, la lógica clásica puede aparecer algo limitada. Existen ciertos conceptos lógicos, ciertos operadores de una naturaleza lógica aparente, que esta clase de lógica parece incapaz de dominar.

Los más sencillos entre éstos son los conceptos de <u>necesidad lógica</u> y de <u>posibilidad lógica.</u> Naturalmente podemos utilizar estas nociones de una cierta manera, aún dentro de los límites de la lógica clásica. Podemos, por ejemplo, llamar necesaria a una fórmula de lógica proposicional clásica si es una tautología, y posible si no es una contratautología. Pero esto significa utilizar los conceptos de necesidad y posibilidad meramente como <u>propiedades</u> o <u>predicados</u> de fórmulas y proposiciones. En otras palabras, significa tratar posibilidad y necesidad como conceptos de un metalenguaje, utilizados para clasificar expresiones de un lenguaje objeto. Sin embargo, podríamos desear ir aún más lejos. Podríamos desear tratar los conceptos de necesidad y posibilidad como <u>operadores</u>, que forman proposiciones a partir de proposiciones dentro de un mismo lenguaje. Asi entendidos, los conceptos forman parte de, o por lo menos se reflejan en, el mismo lenguaje objeto, como operadores del sistema. Siguiendo esta idea, podemos introducir en la lógica clásica nuevos operadores unarios $\Box$ y $\Diamond$, y entender expresiones de la forma $\Box\alpha$ y $\Diamond\alpha$ como correspondientes a las afirmaciones: "es lógicamente necesario que α " y " es lógicamente posible que α " respectivamente. Podemos entonces construir reglas para definir el comportamiento de estos operadores. Es en este punto donde pueden comenzar las investigaciones matemáticas.

Si estuviéramos primordialmente interesados en los aspectos más filosóficos del tema, podríamos incluir aquí varios tópicos serios de discusión. No trataremos de desarrollarlos en gran detalle, pero deberán por lo menos ser comprendidos.

Un aspecto concierne la misma legitimidad del intento de representación del concepto de necesidad lógica y de posibilidad, dentro de un sistema. En varios artículos estimulantes W.V.Quine ha sostenido que los conceptos de posibilidad lógica y necesidad son primordialmente predicacionales, y que el uso operacional de los mismos tiene sentido sólo si se puede traducir en uso predicacional. En otras palabras, los conceptos de necesidad y posibilidad son en primer lugar metalinguísticos, y no pueden ser correctamente incluidos dentro de un lenguaje objeto.

Otro tópico de discusión lo constituye la utilidad de la tarea. Muchas veces se ha señalado que si bien podemos usar técnicas matemáticas en el estudio de sistemas de lógica modal, no parecemos necesitar ninguna lógica modal para el análisis de los principios de razonamiento empleados en las matemáticas propiamente dichas. Si hay algunos modos de inferencia a los cuales corresponde la lógica modal, se deben encontrar fuera de las matemáticas.

En respuesta a este punto, se sugiere a menudo que la lógica modal puede ser valiosa para el estudio del concepto de <u>implicación lógica</u>. Se sugiere que podemos reducir el concepto de <u>implicación lógica</u> al de necesidad lógica de una implicación material. En otras palabras, podemos definir el significado de una proposición de la forma: " α implica lógicamente β " en los términos de la aseveración: " es lógicamente necesario que α materialmente implique β " En símbolos, $\alpha \rightarrow \beta$ se transforma en $\Box(\alpha \supset \beta)$. Se argumenta también que nociones modales pueden ser usadas para iluminar algunos otros conceptos, en particular la idea intuicionista de la prueba, que a su vez, según algunos, puede dar mayor comprensión que la misma lógica clásica, de la lógica de las matemáticas.

Cada uno de estos puntos puede ser discutido extensamente, y los problemas que originan son complejos e importantes. Sin embargo, como nuestro objetivo principal es tratar aquí los aspectos matemáticos de la situación, nos debemos contentar con dejar de lado toda discusión ulterior. Las ideas principales pueden resumirse así: Las lógicas modales son típicamente formadas tomando ciertos operadores $\Box$ y $\Diamond$ y agregándolos a una base inalterada de lógica clásica. Estos operadores tienen, heurísticamente al menos, las interpretaciones: "es lógicamente necesario que ..." y "es lógicamente posible que ...". Pueden entonces construirse sistemas de lógica, teniendo en cuenta estas interpretaciones informales, y estudiarse sus propiedades.

CAPITULO I

Lógicas Modales Autocongruentes

Si consideramos $\Box$ y $\Diamond$ como operadores unarios arbitrarios, estamos en completa libertad de construir cualquier lógica que deseemos. Si aún así no olvidamos el significado de esos operadores que hemos sugerido, tenemos algunas pautas a seguir.

A grandes rasgos, hay dos maneras principales de construir una lógica modal: sintácticamente, por medio de axiomas y reglas de derivación, y semánticamente, por medio de modelos y un concepto de validez dentro de una clase de modelos. Comenzaremos en este capítulo por encarar el problema de la manera sintáctica, debido a su relativa sencillez, y pasaremos en capítulos posteriores a encararlo por medio de modelos.

La primera tarea es decidir qué es lo que consideraremos como fórmulas. A lo largo de estas páginas, <u>fórmulas</u> serán las expresiones construidas a partir de una lista denumerable de variables proposicionales, por medio de los operadores $\neg$ y $\wedge$, junto con el operador adicional unario $\Box$. Introducimos otros operadores de la lógica clásica, como $\vee$, $\supset$, y $\equiv$, como abreviaciones de la manera habitual, y el operador $\Diamond$ se introduce como una abreviación de $\neg\Box\neg$, de acuerdo con la deseada interpretación de $\Box$ y de $\Diamond$. Podríamos, si así lo deseáramos, haber elegido algún otro conjunto funcionalmente completo de operadores para la lógica clásica, y podríamos haber tomado $\Diamond$ como primitivo, considerando a $\Box$ como abreviación de $\neg \Diamond \neg$. Son también posibles otras opciones aún de operadores primitivos. No importa demasiado cuál opción se haga: la hecha aquí es el resultado de marginales razones de elegancia.

Si S es cualquier conjunto de fórmulas, diremos que S es cerrado con respecto a <u>substitución</u> si para cada fórmula α , si $\alpha \in S$ será $\Sigma(\alpha) \in S$, para cada fórmula $\Sigma(\alpha)$ obtenida de α substituyendo fórmulas arbitrarias por variables proposicionales. Diremos que un conjunto S de fórmulas es cerrado con respecto a <u>separación</u> si para cada α, β , si $\alpha \in S$ y $(\alpha \supset \beta) \in S$ entonces $\beta \in S$; y diremos que S es cerrado con respecto a <u>congruencia</u> si para cada α, β , si $(\alpha \equiv \beta) \in S$ entonces será $(\Box \alpha \equiv \Box \beta) \in S$. Definimos una <u>lógica autocongruente modal</u> como cualquier conjunto S de fórmulas que contiene todas las tautologías en $\neg$ y $\wedge$, y que es cerrado con respecto a substitución, separación, y congruencia. Definimos <u>la lógica modal C</u> como la lógica particular determinada tomando como axiomas todas las tautologías, y tomando como reglas de derivación sólo las reglas de substitución, separación y congruencia. Claramente C es la menor de las lógicas modales autocongruentes. Nos ocuparemos de la clase de todas las lógicas modales autocongruentes junto con algunas de sus subclases, y algunos de sus elementos más notables.

Es necesario estar advertido de que en la literatura, el nombre C ha sido a veces utilizado para referirse por lo menos a otras dos lógicas modales. Es necesario también estar prevenido de que hay lógicas modales que no son autocongruentes. En particular, las lógicas de Lewis S1, S2, S3, S6, S7, y S8 no satisfacen la condición de congruencia, y caen así fuera del ámbito de nuestra definición. Por otra parte, los sistemas S4, y S5 de Lewis, el sistema T de Feys, el así llamado "sistema Brouwersche" y muchas otras lógicas modales son autocongruentes. Las razones por las cuales nos restringimos en estas páginas a las lógicas modales autocongruentes, descuidando así las otras, son en parte formales y en parte informales. Desde el punto de vista informal, las lógicas que satisfacen la condición de congruencia parecen estar más de acuerdo con la interpretación básica de los operadores modales que aquéllas que no la satisfacen. Desde el punto de vista formal las lógicas autocongruentes modales tienen estructuras más manejables y más fácilmente tratables algebraicamente.

Antes de proseguir, deberemos atraer la atención del lector sobre algunos puntos bastante sutiles acerca de las definiciones. Hemos definido una lógica modal autocongruente como un <u>conjunto</u> de fórmulas, que satisface ciertas condiciones. Como consecuencia de ello, es muy ambigüo hablar de añadir un axioma o una regla de derivación a una lógica modal dada. El resultado de una tal adición depende no sólo de la lógica misma, es decir del conjunto de las tesis, sino también de la particular axiomatización o presentación de la misma, que está siendo sobreentendida. Así debemos siempre hablar, explícita o implícitamente, de agregar un axioma o una regla de derivación a una axiomatización particular de la lógica, en vez de agregarlo a la lógica misma.

Un simple ejemplo ilustrará este punto. Se puede demostrar que la lógica C que recién hemos definido no tiene ninguna tesis de la forma $\Box\alpha$. Por consiguiente podemos dar a C otra axiomatización, agregando simplemente la regla $\Box\alpha / \alpha \wedge \neg\alpha$ a las reglas de nuestra axiomatización original. Ahora la nueva axiomatización produce exactamente las mismas tesis que la anterior, y así determina la misma lógica C. Pero si ahora añadimos la fórmula $\Box(p \vee \neg p)$ a la nueva axiomatización, obtenemos una lógica inconsistente, mientras que si añadimos la misma fórmula $\Box(p \vee \neg p)$ a la antigua axiomatización, obtendremos una lógica que puede demostrarse que es consistente.

Para resumir, no tiene sentido hablar de añadir un axioma o una regla a una lógica, cuando ésta última es interpretada como un conjunto de fórmulas. En vez de esto, consideramos la adición a una cierta presentación de la lógica.

Otro aspecto que debe tomarse en cuenta es que, en lo que toca a la lógica C y a la mayor parte de sus extensiones autocongruentes, hay una importante diferencia entre la condición de clausura de separación por una parte, y aquéllas de substitución y congruencia por la otra. Esta diferencia puede expresarse diciendo que mientras la primera es internalizable, las últimas condiciones no son internalizables. Para explicar la diferencia supongamos que construimos las fórmulas que "corresponden" a las condiciones de clausura. Para la separación, las correspondientes fórmulas son todas aquéllas de la forma $(\alpha \wedge (\alpha \supset \beta)) \supset \beta$, y son todas tesis de la misma C, pues son ejemplos de substitución de tautologías. Pero para substitución las correspondientes fórmulas son todas aquéllas de la clase $\alpha \supset \Sigma(\alpha)$ donde $\Sigma(\alpha)$ es cualquier ejemplo de substitución de α. Hay muchas fórmulas de esta clase que no son tesis de C. Por ejemplo la fórmula $p \supset (q \wedge \neg q)$ donde p y q son variables proposicionales. Nuevamente, para la condición de congruencia las fórmulas correspondientes son aquéllas de la forma $(\alpha \equiv \beta) \supset (\Box\alpha \equiv \Box\beta)$ y es posible demostrar usando modelos que no todas son tesis de C. En particular, si p y q son variables proposicionales, entonces $(p \equiv q) \supset (\Box p \equiv \Box q)$ no es una tesis de C.

Esta observación corresponde a un aspecto característico de la interpretación intuitiva de la lógica. Deberíamos interpretar una regla de derivación o una condición de clausura como diciendo: si tal y tal es una forma lógicamente válida, entonces lo es tal y tal. Es sólamente en circunstancias especiales que podemos decir correctamente también: si una proposición de tal y tal forma es verdadera, entonces la correspondiente proposición de la forma tal y tal también es verdadera. La observación también origina una pregunta que concierne no sólo a la lógica modal, pero también a la lógica proposicional en general.

Cuestion 1.1

¿Podemos decir algo interesante sobre las condiciones bajo las cuales una condición de clausura de una lógica proposicional es internalizable?.

Echemos ahora una mirada a la clase de todas las lógicas autocongruentes. Si encaramos el problema de un modo bastante abstracto, podemos considerarlo topológicamente. Si S es cualquier conjunto de fórmulas, podemos definir $\mathcal{L}(S)$ como la menor entre las lógicas modales autocongruentes que incluyen a S. Es clara que $\mathcal{L}(S)$ siempre existe, y aún más, que satisface las siguientes condiciones generales.

Observación 1.2

Sean S y S' conjuntos de fórmulas. Entonces $S \subseteq \mathcal{L}(S)$, $\mathcal{L}\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S)$, $\mathcal{L}(\emptyset) = C$. Más aún, $S \subseteq S'$ implica que $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(S')$, y S es una lógica modal autocongruente si y solamente si $S = \mathcal{L}(S)$.

Otra manera de encarar la misma situación es por intermedio de los conceptos de la teoría de reticulados. La clase de todas las lógicas modales autocongruentes es parcialmente ordenada por la inclusión de conjuntos, y de hecho tenemos lo siguiente.

Observación 1.3

La clase de todas las lógicas modales autocongruentes forma un reticulado completo con respecto a la inclusión de conjuntos. Si S y S' son lógicas modales autocongruentes entonces su ínfimo S X S' en este reticulado coincide con su intersección como conjuntos. Su supremo $S+S'$ en el reticulado es la menor entre las lógicas modales autocongruentes que contiene $S \cup S'$, en otras palabras, es $\mathcal{C}(S \cup S')$. Claramente $S \cup S' \subseteq S+S'$, pero la inversa no se cumple generalmente.

Estas observaciones pertenecen más a la "lógica universal" que al estudio específico de la lógica modal, y no podemos obtener mucha información de esta manera a menos de que podamos encontrar propiedades específicas de la operación de clausura $\mathcal{C}$ y del supremo $S+S'$. Hasta ahora, se ha trabajado poco en esta dirección. En verdad, se conoce muy poco sobre la clase de <u>todas</u> las lógicas modales autocongruentes, y lo poco que se conoce-como en el teorema 2.2 del capítulo 2 - se puede demostrar sin utilizar conceptos de topología o de reticulados. A este nivel de generalidad, aún el problema siguiente está abierto, aunque con toda probabilidad, su respuesta sea negativa.

<u>Cuestion 1.4</u>

¿El reticulado de todas las lógicas modales autocongruentes es distributivo?.

Digamos que una lógica modal autocongruente S es una <u>lógica modal regular</u> si $(\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)) \in S$. Definimos R como la menor entre las lógicas modales regulares. Claramente, R puede ser axiomatizado añadiendo la fórmula $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$ a nuestra axiomatización original de C. A pesar de su flaqueza, R tiene ya algunas propiedades interesantes. Digamos que un conjunto S de fórmulas es cerrado con respecto a monotonía si para todas las fórmulas α, β, si $(\alpha \supset \beta) \in S$ entonces $(\Box\alpha \supset \Box\beta) \in S$.

Observación 1.5

La lógica R, y en realidad toda lógica modal regular, es cerrada con respecto a monotonía.

Verificación

Supongamos que $(\alpha \supset \beta) \in S$, donde S es una lógica modal regular. Ahora la fórmula $[(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \equiv (\alpha \wedge \beta))]$ es un ejemplo de substitución de una tautología, y entonces es elemento de S. Por consiguiente, como S es cerrado con respecto a separación, $(\alpha \equiv (\alpha \wedge \beta)) \in S$, y así por congruencia, $(\Box\alpha \equiv \Box(\alpha \wedge \beta)) \in S$. Pero también tenemos que $(\Box(\alpha \wedge \beta) \equiv (\Box\alpha \wedge \Box\beta)) \in S$, y usando un ejemplo de substitución de una tautología con dos aplicaciones de separación, $(\Box\alpha \supset \Box\beta) \in S$.

Observación 1.6

Todas las fórmulas de las clases siguientes son tesis de R, y por consiguiente de cualquier lógica modal regular.

$$\Box(\alpha \supset \beta) \supset (\Box\alpha \supset \Box\beta) \qquad \Box(\alpha \supset \beta) \supset (\Diamond\alpha \supset \Diamond\beta)$$

$$\Box(\alpha \equiv \beta) \supset (\Box\alpha \equiv \Box\beta) \qquad \Box(\alpha \equiv \beta) \supset (\Diamond\alpha \equiv \Diamond\beta)$$

$$\Diamond(\alpha \supset \beta) \supset (\Box\alpha \supset \Diamond\beta)$$

$$(\Box\alpha \wedge \Diamond\beta) \supset \Diamond(\alpha \wedge \beta)$$

$$\Diamond(\alpha \vee \beta) \equiv (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$$

Verificación Parcial

El modo más directo de verificar la observación es construir un esquema de derivación en R para cada uno de los esquemas de fórmula. Algunos de éstos son bastante largos. Consideramos, como un ejemplo, la derivación para el esquema

$$\Box(\alpha \supset \beta) \supset (\Box\alpha \supset \Box\beta).$$

Ahora y luego, hablaremos brevemente de una tautología, cuando para ser exactos, significamos un ejemplo de substitución de una tautología, y hablaremos de aplicar separación cuando, para ser exactos, queremos decir aplicación de separación una o más veces.

Ahora, $\quad \left[((\alpha \supset \beta) \wedge \alpha) \supset \beta\right] \in R$

porque es una tautología. Por consiguiente, como por la observación 1.5, R es cerrada con respecto a monotonía,

$$\left[\Box((\alpha \supset \beta) \wedge \alpha) \supset \Box\beta\right] \in R$$

Pero también $\quad \left[\{\Box((\alpha \supset \beta) \wedge \alpha)\} \equiv \{\Box(\alpha \supset \beta) \wedge \Box\alpha\}\right] \in R$

y así, usando una tautología y separación, tenemos

$$\left[(\Box(\alpha \supset \beta) \wedge \Box\alpha) \supset \Box\beta\right] \in R$$

Otra tautología y separación da

$$\left[\Box(\alpha \supset \beta) \supset (\Box\alpha \supset \Box\beta)\right] \in R$$

Observación 1.7

El reticulado de todas las lógicas modales regulares es un subreticulado del reticulado de todas las lógicas modales autocongruentes.

Esbozo de verificación

Como clase, es un subclase, y la relación de orden es la misma: inclusión de conjuntos. En cada reticulado el ínfimo es la intersección de conjuntos, y así los ínfimos coinciden. Es también fácil verificar que los supremos coinciden.

Estamos ahora en condiciones de considerar otras lógicas modales, más fuertes. Una manera de formar una lógica modal regular es por medio de la adición de un número finito o infinito de axiomas a nuestra axiomatización de R. Algunos candidatos posibles serían los siguientes:

$$\Box(p \vee \neg p)$$
$$\neg\Box(p \wedge \neg p)$$
$$\Box p \supset p$$
$$\Box p \supset \Box\Box p$$
$$p \supset \Box\Diamond p$$

La adición de selecciones de estos cinco axiomas a nuestra axiomatización de R da origen a un máximo de $2^5 = 32$ lógicas, incluyendo la misma R. En realidad, no todas estas lógicas son diferentes. Por ejemplo, si agregamos la tercera fórmula $\Box p \supset p$ a R, podemos derivar la segunda, $\neg\Box(p \wedge \neg p)$

Nuevamente, si agregamos la última fórmula

$p \supset \Box\Diamond p$ a R,

podemos derivar la primera fórmula

$$\Box(p \vee \neg p)$$

Más aún, nuestra lista de candidatos para axiomas es bastante arbitraria: las fórmulas consideradas son recomendadas principalmente por su plausibilidad intuitiva y su simplicidad. Pueden ser también consideradas fórmulas más complejas, tales como: $$\Box\Box q \supset (\Box p \supset \Box p)$$

$$(p \wedge \Diamond q) \supset \Diamond(q \wedge \Diamond p)$$

$$(\Diamond\Box p \wedge \Box q) \supset \Diamond\Box(p \wedge q)$$

$$(\Box p \wedge \neg\Box\Box p) \supset \Diamond(\Box\Box p \wedge \neg\Box\Box\Box p)$$

y así sucesivamente. Cada una de éstas, y muchas otras, tienen algún interés, desde el punto de vista formal y desde el punto de vista de su interpretación intuitiva.

De este rango seleccionaremos un concepto importante. Decimos que una lógica modal autocongruente es una lógica modal normal si es regular y contiene también la fórmula

$$\Box(p \vee \neg p)$$

Definimos la lógica N como la lógica determinada por la adición de

$$\Box(p \vee \neg p)$$

como un axioma, a nuestra axiomatización de R. Desarrollando esta definición, N es formado por la adición de

$$\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q) \quad \text{y} \quad \Box(p \vee \neg p)$$

a nuestra axiomatización original de C. Claramente, N es la menor entre las lógicas modales normales. Hay que estar advertido de que en la literatura la palabra "normal" ha sido a veces utilizada en este sentido (ver por ejemplo Lemmon 1966) y algunas veces en un sentido más restrictivo (ver por ejemplo Kripke 1963). La lógica N tiene también otros nombres (ver por ejemplo Lemmon 1966, Makinson 1966).

Las lógicas normales tienen mucha estructura y muchas propiedades atractivas. Utilizando la misma verificación que para la observación 1.7, tenemos:

Observación 1.8

El reticulado de todas las lógicas modales normales es un subreticulado del reticulado de todas las lógicas modales regulares, y así a su vez un subreticulado del reticulado de todas las lógicas modales autocongruentes.

Digamos que un conjunto S de fórmulas es cerrado con respecto a necesidad si para todas las fórmulas α , si $\alpha \in S$ entonces $\Box\alpha \in S$. Hay conexiones estrechas entre la normalidad de una lógica y su clausura con respecto a necesidad, como surge de las siguientes observaciones.

Observación 1.9

Si S es una lógica modal regular, entonces S es normal si y solamente si S es cerrada con respecto a necesidad.

Verificación

Sea S una lógica modal regular. Supongamos primero que S es normal. Ahora sea α cualquier fórmula y supongamos que $\alpha \in S$. Entonces usando una tautología y separación,

$$((p \vee \neg p) \supset \alpha) \in S$$

Como hemos supuesto a S regular, tenemos por observación 1.5 que S es cerrado con respecto a monotonía, así

$$(\Box(p \vee \neg p) \supset \Box\alpha) \in S$$

Pero como S es normal, $\Box(p \vee \neg p) \in S$

así que por separación $\Box\alpha \in S$

Para la recíproca, supongamos que S es regular y que es cerrada con respecto a necesidad. Ahora $(p \vee \neg p) \in S$

porque es una tautología. Así que por la condición de necesidad $\Box(p \vee \neg p) \in S$
y entonces S es normal.

Observación 1.10

Sea S cualquier conjunto de fórmulas. Entonces S es una lógica modal normal si y solamente si S contiene todas las tautologías, $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$,
y es cerrado con respecto a substitución, separación, y necesidad.

Verificación

Supongamos que S es una lógica modal normal. Entonces por definición S contiene todas las tautologías y es cerrado con respecto a substitución y separación. Más aún, como S es normal, S es regular, y sabemos por la observación 1.6 que cada lógica modal regular contiene la fórmula

$$\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$$

Finalmente de la observación 1.9 sabemos que S es cerrado con respecto a necesidad.

Para la recíproca, supongamos ahora que S contiene todas las tautologías, $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$,
y es cerrado con respecto a substitución, separación y necesidad. Debemos mostrar que S es normal.

Primero verificamos que S es cerrado con respecto a monotonía. Supongamos que $(\alpha \supset \beta) \in S$
Entonces por la condición de necesidad

$\Box(\alpha \supset \beta) \in S$. Por consiguiente usando $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$ junto con substitución y separación, $(\Box\alpha \supset \Box\beta) \in S$

Luego verificamos que S es cerrado con respecto a congruencia. Supongamos que $(\alpha \equiv \beta) \in S$. Entonces utilizando tautologías y separación,

$(\alpha \supset \beta) \in S$ y $(\beta \supset \alpha) \in S$. Por consiguiente, como S es cerrado con respecto a monotonía,

$(\Box\alpha \supset \Box\beta) \in S$ y $(\Box\beta \supset \Box\alpha) \in S$

En consecuencia, utilizando una tautología y separación,

$$(\Box\alpha \equiv \Box\beta) \in S$$

Luego verificamos que

$$(\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)) \in S$$

Ahora $((p \wedge q) \supset p) \in S$ y $((p \wedge q) \supset q) \in S$,pues ambas son tautologías. Por consiguiente, como S es cerrado con respecto a la monotonía,

$$(\Box(p \wedge q) \supset \Box p) \in S \quad y \quad (\Box(p \wedge q) \supset \Box q) \in S$$

De aquí usando una tautología y separación,

$$(\Box(p \wedge q) \supset (\Box p \wedge \Box q)) \in S$$

También, $[p \supset (q \supset (p \wedge q))] \in S$, pues es una tautología, y así como S es cerrado con respecto a monotonía,

$$[\Box p \supset \Box(q \supset (p \wedge q))] \in S$$

Pero como S contiene la fórmula

$$\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$$

y es cerrado con respecto a substitución, tenemos

$$\left[\Box(q \supset (p \wedge q)) \supset (\Box q \supset \Box(p \wedge q))\right] \in S$$

Por consiguiente, usando una tautología y separación tenemos

$$\left[\Box p \supset (\Box q \supset \Box(p \wedge q))\right] \in S$$

y entonces usando otra tautología y separación,

$$\left[(\Box p \wedge \Box q) \supset \Box(p \wedge q)\right] \in S$$

. Ahora juntando las dos fórmulas condicionales, tenemos por una tautología y separación que la fórmula bicondicional

$$\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$$

es elemento de S.

Así sabemos que S contiene todas las tautologías y también contiene $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$, y es cerrado con respecto a substitución, separación, y congruencia. De aquí que por definición S es una lógica modal regular. Pero como S es también cerrado con respecto a la condición de necesidad, tenemos por la observación 1.9 que S es normal, y la verificación es completa.

La observación 1.10 nos da una caracterización muy útil de la clase de todas las lógicas modales normales. Produce, como consecuencia inmediata, otra axiomatización de N, la menor entre las lógicas modales normales.

Observación 1.11

La lógica modal N puede ser axiomatizada tomando como axiomas todas las tautologías y

$\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$ y , como reglas de derivación sólo substitución, separación, y necesidad.

Verificación

Sabemos que N es la menor entre las lógicas modales normales, y claramente la axiomatización hecha determina una lógica que es el menor elemento de una clase que, por la observación 1.10, es idéntica a la clase de todas las lógicas modales normales.

Parece ser que el primer autor que caracterizó lógicas modales del mismo modo que las observaciones 1.10 y 1.11 fue Kurt Gödel. A pesar de que Gödel no consideró esta lógica N, llamaremos al sistema axiomático mencionado en la observación 1.11 la axiomatización Gödeliana de N. Cualquier sistema formado por la simple adición al mismo de un número de axiomas, ya sea finito o infinito, será llamado un sistema Gödeliano de axiomas.

Llegamos ahora a un lema que, si bien feo, es bastante poderoso y útil. Lo utilizaremos para mostrar que el reticulado de todas las lógicas modales normales es distributivo.

Lema 1.12

Sea S cualquier lógica modal normal, y sea S' cualquier conjunto de fórmulas que es cerrado con respecto a substitución y necesidad. Entonces las siguientes conjuntos de fórmulas son idénticos:

(1) La clausura del conjunto $S \cup S'$ con respecto a separación,

(2) El conjunto de todas las fórmulas β tales que para

algún $\alpha \in S$ y algunas $\alpha'_1, \ldots\ldots, \alpha'_n \in S'$, la fórmula

$$(\alpha \wedge \alpha'_1 \wedge \ldots \wedge \alpha'_n) \supset \beta$$

es un ejemplo de subtitución de una tautología,

(3) La menor entre las lógicas modales normales que incluyen $S \cup S'$.

Prueba

Para ser breves, nos referimos a los conjuntos como T_1, T_2, T_3 respectivamente. Debe quedar bien claro, por lógica clásica, que $T_1 \subseteq T_2$: para una verificación detallada hay que hacer una inducción en el número de aplicaciones de separación. Asimismo, $T_2 \subseteq T_3$, pues cada lógica modal normal contiene todas las tautologías y es cerrado con respecto a substitución y separación. Queda por demostrar que $T_3 \subseteq T_1$. Para ello es suficiente mostrar que T_1 es una lógica modal normal que incluye $S \cup S'$, y por consiguiente necesitamos solamente verificar que T_1 es una lógica modal normal.

Ahora como por hipótesis S es una lógica modal normal, S contiene todas las tautologías y asimismo, por la observación 1.10, la fórmula $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
Por consiguiente, como $S \subseteq (S \cup S') \subseteq T_1$, el conjunto T_1 contiene todas las tautologías y

$$\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$$

Por construcción, T_1 es cerrado con respecto a separación. Podemos probar que T_1 es cerrada con respecto a substitución por medio de una argumentación inductiva simple, utilizando la hipótesis de que tanto S como S' son cerrados con respecto a substitución. Así en vista de la observación 1.10 la prueba es completa si podemos demostrar que T_1 es cerrado con respecto a la condición de necesidad. Para ello, argumentaremos inductivamente de la siguiente manera.

Si $\beta \in T_1$ entonces por la definición de T_1, β se puede obtener por medio de un número finito de aplicaciones de separación, partiendo del conjunto $S \cup S'$. Supongamos que este número, n, es cero. Entonces $\beta \in S \cup S'$, entonces $\beta \in S$ ó $\beta \in S'$. Pero por hipótesis S' es cerrado con respecto a necesidad, y también por hipótesis S es normal, luego por la observación 1.10 es cerrado con respecto a necesidad. Por consiguiente $\Box\beta \in S$ ó $\Box\beta \in S'$, y así

$$\Box\beta \in S \cup S'$$

de modo que $\Box\beta \in T_1$

Para el paso inductivo, supongamos que n= k, y que β es obtenida por separación de α y $\alpha \supset \beta$.
Entonces tanto α como $\alpha \supset \beta$ es obtenible en menos que k aplicaciones de separación, y entonces por la hipótesis de la inducción $\Box\alpha \in T_1$ y $\Box(\alpha \supset \beta) \in T_1$
Pero ya sabemos que $(\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)) \in T_1$
y que T_1 es cerrada con respecto a substitución y separación.
De aquí es claro que $(\Box\alpha \supset \Box\beta) \in T_1$
y entonces: $\Box\beta \in T_1$

Teorema 1.13

El reticulado de todas las lógicas modales normales es distributivo.

Prueba

Sean S, S', S" lógicas modales normales. Es suficiente

demostrar que $S \times (S' + S'') \subseteq (S \times S') + (S \times S'')$
pues sabemos por teoría general de reticulados que las otras leyes distributivas pueden ser obtenidas a partir de ésta.
Supongamos que $\alpha \in S \times (S' + S'')$
Luego por las observaciones 1.3 y 1.8 tenemos que $\alpha \in S$ y $\alpha \in (S' + S'')$
De esta última tenemos por el lema 1.12 que hay fórmulas

$$\alpha' \in S' \quad \text{y} \quad \alpha_1'', \ldots, \alpha_n'' \in S''$$

tales que $(\alpha' \wedge \alpha_1'' \wedge \ldots \wedge \alpha_n'') \supset \alpha$
es un ejemplo de substitución de una tautología. Como S" es una lógica normal y cada uno de los $\alpha_1'', \ldots, \alpha_n''$ es elemento de S", tenemos que $\alpha'' = (\alpha_1'' \wedge \ldots \wedge \alpha_n'')$ es elemento de S". Entonces tenemos

$$\alpha' \in S' \quad , \quad \alpha'' \in S''$$

tales que $(\alpha' \wedge \alpha'') \supset \alpha$
es un ejemplo de substitución de una tautología. De aquí es claro que $(\alpha \vee (\alpha' \wedge \alpha'')) \supset \alpha$
ypor consiguiente también

$$((\alpha \vee \alpha') \wedge (\alpha \vee \alpha'')) \supset \alpha$$

son ejemplos de substitución de tautologías. Pero como

$$\alpha \in S \quad \text{y} \quad \alpha' \in S'$$

tenemos $(\alpha \vee \alpha') \in S$ y $(\alpha \vee \alpha') \in S'$
de modo que $(\alpha \vee \alpha') \in (S \times S')$
Similarmente, como $\alpha \in S$ y $\alpha'' \in S''$
tenemos $(\alpha \vee \alpha'') \in S$ y $(\alpha \vee \alpha'') \in S''$
de modo que $(\alpha \vee \alpha'') \in (S \times S'')$
De aquí, claramente $(\alpha \vee \alpha') \wedge (\alpha \vee \alpha'') \in (S \times S') + (S \times S'')$
Como esta lógica es normal y por tanto contiene todas las

tautologías y es cerrado con respecto a substitución y separación $\alpha \in (S \times S') + (S \times S'')$,
y la demostración es completa.

El razonamiento utilizado en el lema 1.12 es bastante típico de las pruebas sintácticas de teoremas sobre lógicas modales, o realmente sobre cualquier otra lógica. El punto central lo constituye generalmente una inducción: ya sea en la longitud de una derivación, el número de aplicaciones de varias reglas, la longitud de una fórmula, o algún otro índice sintáctico. Estos argumentos son a menudo largos, pero algunas veces inevitables. En particular, no parece haber ninguna otra manera fácil de establecer el teorema 1.13. Sin embargo algunos otros resultados que pueden ser obtenidos del lema 1.12, pueden ser obtenidos más elegantemente usando modelos. En particular, se podría deducir del lema 1.12 que hay sólo dos lógicas modales normales consistentes maximales, pero veremos en el capítulo 2 que este resultado es sólo un caso particular de un teorema más general que probaremos usando métodos algebraicos.

Ahora que hemos establecido algunas propiedades bastante generales de la clase de todas las lógicas modales normales, echemos una mirada a unas pocas lógicas modales normales específicas. Hay una infinidad disponibles, y en lugar de tratar de abarcar a muchas de ellas, seleccionaremos solamente cuatro de las más conocidas: la lógica T de Feys, la S4 de Lewis, la lógica "Brouwersche" B de Becker, y al S5 de Lewis. Estas lógicas se pueden definir axiomáticamente, como sigue.

<u>La lógica T de Feys</u> es el sistema determinado por la adición del axioma $\Box p \supset p$ a la axiomatización Gödeliana de N.

<u>La lógica S4 de Lewis</u> es el sistema determinado por la adición de los axiomas $\Box p \supset p$ y $\Box p \supset \Box\Box p$ a la axiomatización Gödeliana de N.

<u>La lógica "Brouwersche" B de Becker</u> es el sistema determinado por la adición de los axiomas

$$\Box p \supset p \quad \text{y} \quad p \supset \Box\Diamond p$$

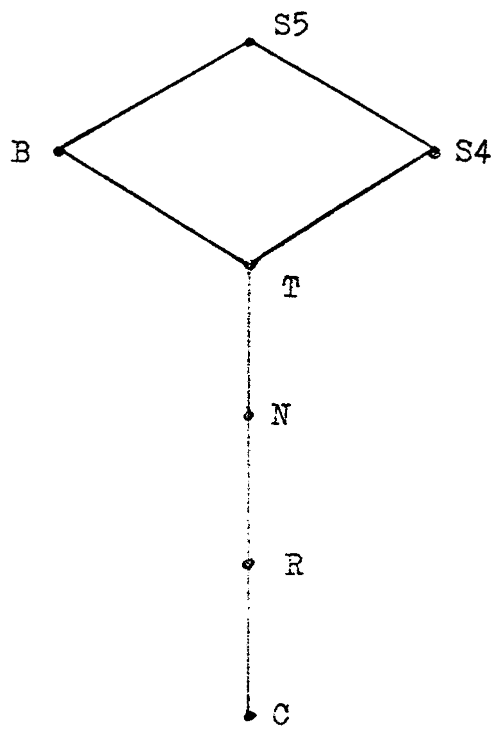
a la axiomatización Gödeliana de N.

<u>La lógica S5 de Lewis</u> es el sistema determinado por la adición de los axiomas

$$\Box p \supset p \quad , \quad \Box p \supset \Box\Box p \quad \text{y} \quad p \supset \Box\Diamond p$$

a la axiomatización Gödeliana de N.

Vale la pena señalar que se obtienen los mismos sistemas si añadimos estos axiomas a nuestra axiomatización <u>original</u> de N. La lógica S5 de Lewis puede también ser axiomatizada agregando sólo $\Box p \supset p$ y $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ a cualquiera de las dos axiomatizaciones de N. Así tenemos cuatro lógicas que, cuando se consideran junto con las lógicas C, R, y N, se encuentran en las siguientes relaciones una con la otra.



Las lógicas que se encuentran en posiciones más por arriba en el diagrama incluyen aquéllas que se encuentran más abajo en el mismo. Es fácil mostrar, usando modelos, que todas estas relaciones de inclusión son propias, y que no existen otras relaciones de inclusión entre estas lógicas que aquéllas implicadas por el diagrama. Cada lógica tiene su propia reserva de tesis y sus propiedades específicas. Terminaremos el capítulo con la lista de algunas de las tesis más interesantes de cada una.

<u>Observación 1.14</u>

Todas las fórmulas de las clases siguientes son tesis de la lógica T de Feys:

$$\Box\alpha \supset \alpha \qquad\qquad \alpha \supset \Diamond\alpha$$

$$\Box\alpha \supset \Diamond\alpha$$

$$\Diamond(\alpha \supset \Box\alpha) \qquad\qquad \Diamond(\Diamond\alpha \supset \alpha)$$

$$\neg\Box(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

<u>Observación 1.15</u>

Todas las fórmulas de las clases siguientes son tesis de la lógica S4 de Lewis:

$$\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha \qquad\qquad \Diamond\Diamond\alpha \supset \Diamond\alpha$$

$$\Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box(\Box\alpha \supset \Box\beta)$$

$$(\Box\alpha \vee \Box\beta) \equiv \Box(\Box\alpha \vee \Box\beta) \qquad\qquad (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta) \equiv \Diamond(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$$

<u>Observación 1.16</u>

Todas las fórmulas de las clases siguientes son tesis de la lógica "Brouwersche" B de Becker:

$$\alpha \supset \Box\Diamond\alpha \qquad\qquad \Diamond\Box\alpha \supset \alpha$$

$$(\alpha \wedge \Diamond\beta) \supset \Diamond(\beta \wedge \Diamond\alpha)$$

$$(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta) \supset \Diamond(\alpha \wedge \Diamond\Diamond\beta)$$

<u>Observación 1.17</u>

Todas las fórmulas de las clases siguientes son tesis de la lógica S5 de Lewis:

$$\Diamond\alpha \supset \Box\Diamond\alpha \qquad\qquad \Diamond\Box\alpha \supset \Box\alpha$$

$$\neg\Box\alpha \supset \Box\neg\Box\alpha$$

$$\Box\alpha \vee \Box\neg\Box\alpha$$

$$\Box(\alpha \vee \Box\beta) \equiv (\Box\alpha \vee \Box\beta) \qquad \Diamond(\alpha \wedge \Diamond\beta) \equiv (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$$

$$\Box(\alpha \vee \neg\Box\beta) \equiv (\Box\alpha \vee \neg\Box\beta) \qquad \Diamond(\alpha \wedge \neg\Diamond\beta) \equiv (\Diamond\alpha \wedge \neg\Diamond\beta)$$

$$\Box(\alpha_1 \vee \ldots \alpha_a \vee \Box\beta_1 \vee \ldots \vee \Box\beta_b \vee \neg\Box\gamma_1 \vee \ldots \vee \neg\Box\gamma_c) \equiv$$

$$\equiv \Box(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_a) \vee (\Box\beta_1 \vee \ldots \vee \Box\beta_b \vee \neg\Box\gamma_1 \vee \ldots \vee \neg\Box\gamma_c)$$

El modo más directo de verificar estas observaciones es construir un esquema para una derivación apropiada en cada caso. La tarea es larga, y omitiremos todos los detalles, muchos de los cuales se pueden encontrar en el libro de Feys 1965.

De las lógicas individuales aquí definidas, S5 es la más fuerte. Es también la más simple en cuanto a estructura. Por ejemplo, las tesis de S5 mencionadas en la observación 1.17 son suficientes para establecer un fuerte teorema de reducción. Para plantear el teorema, definimos como sigue la profundidad modal $\Delta(\alpha)$ de una fórmula α. Si α es una variable proposicional, entonces

$$\Delta(\alpha) = 0 \quad ; \quad \Delta(\neg\alpha) = \Delta(\alpha) \; ;$$

$$\Delta(\alpha \wedge \beta) = \text{máx}(\Delta(\alpha), \Delta(\beta))$$

$$\Delta(\Box\alpha) = \Delta(\alpha) + 1$$

La profundidad modal de una fórmula es así una medida del número máximo de capas sucesivas de operadores modales dentro de la misma: es una medida de "complejidad modal". Como ejemplos, la profundidad modal de $\Box(p \vee \Box q)$ es 2, y la profundidad modal de $(\Box p \vee \Box q)$ es 1.

Teorema 1.18 (Wajsberg)

Sea α una fórmula cualquiera. Entonces hay una fórmula α' con $\Delta(\alpha') \leq 1$ y con $(\alpha \equiv \alpha') \in S5$

Es lo mismo que decir, a grandes rasgos, que dentro de S5, cada fórmula es equivalente a una fórmula de profundidad modal cero o uno.

Esbozo de Prueba

Induzcamos en la longitud de α, utilizando la idea, sacada de la lógica clásica, de una forma conjunctiva normal para una fórmula. En la lógica modal, los "átomos" de una forma conjuntiva normal serán y las variables proposicionales y las fórmulas de la forma $\Box\beta$, para cualquier β. Así usando el hecho que cada fórmula de la forma

$$\Box(\alpha_1 \wedge \ldots \alpha_n) \equiv (\Box\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Box\alpha_n)$$

es tesis de S5, y usando también la última parte de la observación 1.17, llegamos al teorema.

Otra propiedad de S5, semejante a la del teorema 1.18, puede ser expresada usando la idea de una fórmula completamente modalizada. Decimos que una fórmula α es <u>completamente modalizada</u> si cada aparición de cada variable proposicional en α cae dentro del ámbito de una aparición del operador modal $\Box$.

<u>Teorema 1.19</u>

Si α es una fórmula completamente modalizada, entonces

$$(\alpha \equiv \Box\alpha) \in S5$$

<u>Esbozo de Prueba</u>

Induzcamos en la longitud de α, usando la observación 1.17.

A partir de este resultado, Prior ha construido una elegante axiomatización de S5.

<u>Corolario 1.20 (Prior, Lemmon)</u>

La lógica S5 puede ser axiomatizada tomando como axiomas todas las tautologías y como reglas de derivación sólo substitución, separación, y las dos reglas siguientes:

$$\alpha \supset \beta \;/\; \Box\alpha \supset \beta$$
$$\alpha \supset \beta \;/\; \alpha \supset \Box\beta\,,$$

si α es completamente modalizada.

<u>Esbozo de Prueba</u>

Comparamos este sistema axiomático con, por ejemplo, el sistema axiomático Gödeliano por el cual definimos S5. Construyamos esquemas para derivaciones para demostrar que cada lógica contiene todos los axiomas de la otra, y que cada lógica es cerrada con respecto a las reglas de derivación de la axiomatización de la otra.

Uno de los rasgos atractivos de la axiomatización de S5 por Prior es el modo en el cual resulta paralela a la axiomatización de la lógica cuantificacional clásica hecha por Lukasiewicz. En verdad, si echamos una mirada a los resultados de este capítulo, éstos sugieren una correspondencia de mucho alcance entre el comportamiento de los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ en la lógica clásica, y el comportamiento de los operadores modales $\Box$ y $\Diamond$ en las lógicas modales regulares, y más especialmente en la lógica S5. Volveremos a estudiar esta correspondencia al fin del capítulo 2.

CAPITULO II

Modelos Algebraicos

¿Por qué examinar los modelos de una lógica proposicional? Desde el punto de vista del matemático, la respuesta es simple: los modelos son más interesantes que las fórmulas de la lógica misma. Sin embargo, aún desde el punto de vista del lógico, los modelos pueden ser útiles. A menudo ocurre que los modelos ofrecen la única técnica razonable para establecer un resultado sobre fórmulas, aún cuando la formulación del resultado no mencione explícitamente los modelos. Esto es particularmente frecuente en resultados de una naturaleza "negativa", que establecen la independencia de un axioma, la no derivabilidad de una fórmula, o la diferencia entre dos lógicas. En estos casos los modelos proveen "términos intermedios" para argumentos del siguiente tipo: cada fórmula α en S es válida en el modelo A, pero la fórmula β no es válida en el modelo A, entonces β no es elemento de S. Hay también teoremas bastante generales de una naturaleza más "positiva" que son más elegantemente establecidos por medio de modelos. Veremos algunos ejemplos de esto en este capítulo.

Presupondremos alguna familiaridad con la teoría de álgebras de Boole. Definimos un <u>álgebra modal</u> como una estructura

$$A = (A, - , \cap , *)$$

donde $(A, - , \cap)$ es un álgebra de Boole y donde $*$ es cualquier operación unaria sobre A. En este capítulo usaremos álgebras modales como modelos, y necesitamos algunos conceptos que relacionen fórmulas y lógicas con álgebras modales.

Entendemos una asignación en un álgebra modal A como una función g del conjunto de variables proposicionales, en A. Llamaremos un homomorfismo de fórmulas, en un álgebra modal

$$A = (A, -, \cap, *),$$

a una función h del conjunto de todas las fórmulas, en A, tales que para todas las fórmulas α y β

$$h(\neg\alpha) = -h(\alpha)$$

$$h(\alpha \wedge \beta) = h(\alpha) \cap h(\beta)$$

$$h(\Box\alpha) = *h(\alpha)$$

Evidentemente, el concepto de un homomorfismo de fórmulas es un caso particular del concepto algebraico general de homomorfismo. Es sabido, de "lógica universal", que para cada asignación g en un álgebra modal A, hay uno y solamente un homomorfismo h de fórmulas, en A, que satisface la condición de que para cada variable proposicional p, h(p) = g(p). Por esta razón, una tal h es a veces llamada la extensión de la asignación g, y la designaremos, sin mucho rigor, con la misma letra.

Diremos que una fórmula α es válida en un álgebra modal A si para cada homomorfismo h de las fórmulas, en A, tenemos que

$$h(\alpha) = 1 ,$$

donde 1 es el elemento unidad de A. Diremos que un conjunto S de fórmulas es válido en A, o en otras palabras que el álgebra modal valida a S, si cada $\alpha \in S$ es válida en A. Diremos que un conjunto S de fórmulas es caracterizado por un álgebra modal A si para cada fórmula α, $\alpha \in S$ si y sólamente si α es válida en A. En otras palabras, S es caracterizado por A si y solamente si S coincide con el conjunto de todas las fórmulas válidas en A. Claramente, si S es caracterizado por A, entonces S es válido en A, pero la recíproca no es siempre cierta.

Se debería también prestar algo de atención al concepto de validez de una regla de derivación de una lógica. Diremos que una regla de derivación es <u>válida</u> en un álgebra modal A si para cada secuencia de (n+1) fórmulas $\alpha_1, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n, \beta$ que están entre sí en la relación indicada por la regla, si cada una de las $\alpha_1, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n$ es válida en A entonces β es válida en A. Diremos que la regla de derivación es <u>fuertemente válida</u> en A, si para cada una de tales secuencias $\alpha_1, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n, \beta$ tenemos lo siguiente: para cada homomorfismo h de fórmulas, en A, si $h(\alpha_1) = h(\alpha_2) = \ldots = h(\alpha_n) = 1$ entonces $h(\beta) = 1$

La diferencia entre validez y fuerte validez de una regla es más bien sutil, pero asimismo bastante importante. Decir que la regla de separación es válida en un álgebra modal A, es simplemente decir que para todas las fórmulas α y β, si α es válida en A y $(\alpha \supset \beta)$ es válida en A, entonces β es válida en A. Decir que la regla de separación es fuertemente válida en A es decir algo más: dado cualquier homomorfismo de fórmulas, en A, si $h(\alpha) = 1$ y $h(\alpha \supset \beta) = 1$ entonces $h(\beta) = 1$
En general, la fuerte validez de una regla en un álgebra implica su validez, pero la recíproca no es siempre cierta. Para álgebras modales tenemos lo siguiente.

<u>Observación 2.1</u>

Sea A un álgebra modal. Entonces cada tautología es válida en A. Las reglas de separación y congruencia son fuertemente válidas en A. La regla de substitución es válida en A, pero si A tiene más de un elemento entonces la regla de substitución no es fuertemente válida en A.

Verificación

Del hecho que $(A, -, \cap)$ es un álgebra de Boole, resulta por medio de argumentos de lógica clásica que cada tautología es válida en A. Para mostrar que separación es fuertemente válida en A, sea h cualquier homomorfismo de fórmulas, en A, y supongamos que:

$$h(\alpha) = 1 \quad y \quad h(\alpha \supset \beta) = 1$$

Como h es un homomorfismo,

$$h(\alpha \supset \beta) = -h(\alpha) \cup h(\beta)$$

Como $h(\alpha) = 1$ tenemos que $-h(\alpha) \cup h(\beta) = 0 \cup h(\beta) = h(\beta)$ y así $h(\beta) = 1$

Para mostrar que la regla de congruencia es fuertemente válida en A, sea h cualquier homomorfismo y supongamos que

$$h(\alpha \equiv \beta) = 1$$

Como h es un homomorfismo,

$$h(\alpha \equiv \beta) = (-h(\alpha) \cup h(\beta)) \cap (-h(\beta) \cup h(\alpha)),$$

y de aquí este último es igual a 1. Por consiguiente, por argumentos de la teoría de las álgebras de Boole,

$h(\alpha) = h(\beta)$. Así $* h(\alpha) = * h(\beta)$,

así que $h(\Box\alpha) = h(\Box\beta)$

y así $h(\Box\alpha \equiv \Box\beta) = 1$

Para mostrar que la regla de substitución es válida en A, sea α una fórmula hecha de las variables $p_1, \ldots\ldots\ldots\ldots p_n$, y sea $\Sigma(\alpha)$ una fórmula obtenida de α, substituyendo $\beta_1, \ldots, \beta_n$ para $p_1, \ldots, p_n$ respectivamente. Supongamos que $\Sigma(\alpha)$ no es válida en A. Entonces hay un homomorfismo h de fórmulas, en A, tal que

$$h(\Sigma(\alpha)) \neq 1$$

Sea g una asignación definida por

$$g(p_i) = h(\beta_i)$$

para cada $i \leq n$, dando a g(q) un valor arbitrario en A para cada otra variable q. Entonces, usando la misma letra g para la extensión única de g, podemos mostrar por inducción en la longitud de α que $g(\alpha) = h(\Sigma(\alpha))$, así que

$$g(\alpha) \neq 1$$

y así α no es válida en A.

Para mostrar que la regla de substitución no es fuertemente válida en A, si A tiene más de un elemento, sea p cualquier variable proposicional, y sea g una asignación definida por

$$g(p) = 1$$

dando a g(q) un valor arbitrario en A **para cada** otra variable q. Entonces, usando la misma letra g para la extensión única de g, tenemos $g(p) = 1$

mientras que $g(\neg p) = 0 \neq 1$

y evidentemente la fórmula $\neg p$ es un ejemplo de substitución de la variable proposicional p.

Los únicos modelos algebraicos de que nos preocuparemos en estas páginas son las álgebras modales. Se necesita alguna justificación para esta decisión: después de todo, hay en la literatura conceptos mucho más amplios de un modelo. En un sentido general, un modelo algebraico para una lógica modal en los operadores $\neg, \wedge, \Box$ es una estructura

$$\mathcal{A} = (A, D, -, \cap, *)$$

donde A es un conjunto no vacío, D es un subconjunto de A, y donde $-, \cap, *$ son operaciones sobre A que corresponden a los operadores $\neg, \wedge, \Box$. Los conceptos de la validez de una fórmula, y de la validez y fuerte validez de una regla de derivación, son entonces definidos con referencia al conjunto D, llamado el conjunto de elementos distinguidos del modelo, en lugar de serlo con referencia a cualquier elemento singular del modelo, como fue el caso con nuestra definición de validez en un álgebra modal. Pero se puede demostrar, usando resultados profundos de Harrop sobre la teoría general de modelos para lógicas proposicionales, que cuando tratamos con lógicas modales autocongruentes, no perdemos generalidad al restringirnos a álgebras modales. Más específicamente, si

$$\mathcal{A} = (A, D, -, \cap, *)$$

es un modelo en el sentido más amplio, en el cual todas las tautologías son válidas, y en el cual son válidas también las reglas de substitución, separación y congruencia, entonces hay un álgebra modal $\mathcal{A}' = (A', -', \cap', *')$ tal que exactamente las mismas fórmulas son válidas en $\mathcal{A}'$ y en $\mathcal{A}$. Más aún, si $\mathcal{A}$ es finita entonces se puede elegir un tal $\mathcal{A}'$, tal que $\mathcal{A}'$ también sea finita.

No probaremos este teorema aquí, porque esto equivaldría a tener que levantar todo el andamio de modelos en el sentido general del término, que es precisamente lo que queremos evitar aquí. En lugar de esto, referiremos al lector a la investigación fundamental de Harrop sobre la teoría general de modelos para axiomatizaciones de lógicas proposicionales, resumido en el artículo de Harrop 1965. Debemos subrayar sin embargo que el teorema es válido sólo para aquellos modelos en los cuales las reglas de substitución, separación y también de congruencia son válidas. Esto significa, en efecto, que si fuéramos a considerar las lógicas modales <u>no autocongruentes</u>, lógicas tales como los sistemas

S1, S2, S3, S6, S7, y S8

de Lewis, no podríamos restringir la atención a las álgebras modales: tendríamos que tratar también de modelos

$$A = (A, \supset, -, \cap, *)$$

en el sentido general del término, en los cuales al conjunto D de elementos distinguidos se le permite tener <u>más de un</u> elemento.

Llegamos ahora a un teorema que es fundamental para el desarrollo del resto de este capítulo. Da una caracterización algebraica para cualquier lógica modal autocongruente.

<u>Teorema 2.2 (Lindenbaum, Tarski, Mc Kinsey)</u>

Sea S cualquier lógica modal autocongruente. Entonces hay un álgebra modal que caracteriza a S, con a lo sumo un número numerable de elementos.

<u>Esbozo de Prueba</u>

Construimos un álgebra $|S|$, llamada <u>el álgebra de</u>

Lindenbaum de la lógica S, con las propiedades deseadas. El álgebra $|S|$ está formada como una estructura cociente sobre el conjunto S de fórmulas, y la idea básica de la construcción será familiar para cualquier lector que ya conoce la formación del álgebra de Lindenbaum de la lógica proposicional clásica.

Si α y β son fórmulas, diremos que son equivalentes módulo S, y escribimos : $\alpha \simeq \beta$ (mod S), si

$$(\alpha \equiv \beta) \in S$$

Ahora como S es una lógica modal autocongruente contiene todas las tautologías y es cerrado con respecto a substitución y separación, y de esto es fácil verificar que la relación definida es una genuina relación de equivalencia: reflexiva, transitiva y simétrica. Del mismo modo, podemos también verificar que la relación de equivalencia es compatible con los operadores

$\neg$ y $\wedge$.

Es decir, si $\alpha \simeq \beta$ (mod S)

entonces $\neg\alpha \simeq \neg\beta$ (mod S)

y si ambos $\alpha \simeq \beta$ (mod S) y $\alpha' \simeq \beta'$ (mod S)

entonces $(\alpha \wedge \alpha') \simeq (\beta \wedge \beta')$ (mod S)

Más aún, como S es una lógica modal autocongruente, la relación de equivalencia es compatible con el operador $\Box$. Es decir,

si $\alpha \simeq \beta$ (mod S)

entonces $(\alpha \equiv \beta) \in S$

y así por la condición de congruencia

$$(\Box\alpha \equiv \Box\beta) \in S$$

y entonces $\Box\alpha \simeq \Box\beta$ (mod S)

Así la relación $\alpha \simeq \beta$ (mod S) es una genuina relación de equivalencia que es compatible con los tres operadores de S, y por consiguiente podemos formar una estructura cociente $|S| = (|S|, -, \cap, *)$ cuyos elementos son las clases de equivalencia determinadas por la relación, y cuyas operaciones $-, \cap, *$ pueden ser bien definidas por:

$$- |\alpha| = |\neg \alpha|$$

$$|\alpha| \cap |\beta| = |\alpha \wedge \beta|$$

$$* |\alpha| = |\Box \alpha|$$

Entonces, a partir de la suposición de que S es una lógica modal autocongruente, es fácil verificar que la estructura

$$|S| = (|S|, -, \cap, *)$$

es un álgebra modal.

El elemento unidad de esta álgebra es el conjunto de todas las fórmulas α tales que

$$\alpha \simeq (p \vee \neg p) \pmod{S}$$

y esto coincide con el mismo conjunto S. Más aún, dada cualquier fórmula α, es fácil verificar que $\alpha \in S$ si y solamente si α es válida en $|S|$. Finalmente, como las fórmulas son construídas a partir de una lista denumerable de variables proposicionales, hay sólo un número denumerable de fórmulas, y por consiguiente, como máximo un número denumerable de clases de equivalencia de fórmulas. Es obvio que la lógica S es consistente si y sólamente si el álgebra modal $|S|$ tiene al menos dos elementos.

El paso esencial en la prueba anterior, más que el razonamiento ya usado para el resultado correspondiente en la lógica clásica, reside en la observación de que si la lógica S satisface la condición de congruencia, es decir que siempre que

$$(\alpha \equiv \beta) \in S \qquad \text{entonces} \qquad (\Box\alpha \equiv \Box\beta) \in S$$

la relación de equivalencia módulo S es compatible con el operador $\Box$. Si un conjunto S de fórmulas no satisface la condición de congruencia, entonces no se puede sostener este argumento. Sin embargo, aún en estos casos, es a veces posible obtener resultados similares a los del teorema 2.2, definiendo una relación de equivalencia más compleja que sea compatible con el operador $\Box$. Por ejemplo, la lógica modal S2 de Lewis no satisface la condición de congruencia, pero satisface una condición más débil que es que siempre que

$$\Box(\alpha \equiv \beta) \in S2 \quad \text{entonces} \quad \Box(\Box\alpha \equiv \Box\beta) \in S2.$$

Así, si definimos una relación de equivalencia, llamando α débilmente equivalente a β módulo S2, si y solamente si

$$\Box(\alpha \equiv \beta) \in S2$$

entonces esta relación es compatible con el operador $\Box$, así como también con los operadores de negación y conjunción, Sin embargo, como en estas páginas estamos restringiendo la atención a las lógicas modales autocongruentes, dejaremos de lado el tratamiento de S2 y de otros sistemas similares.

La importancia del teorema 2.2 reside en la manera en que abre la puerta a las técnicas algebraicas. Si S es una lógica modal autocongruente, podemos formar su álgebra de Lindenbaum

$|S|$, sabiendo que $|S|$ es un álgebra modal y que $|S|$ es carac terística para S. Podemos entonces examinar $|S|$ desde un punto de vista algebraico, aplicando todo lo que ya sabemos sobre las álgebras de Boole, y usando instrumentos típicos de análisis algebraico, tales como los conceptos de subálgebra, relación de congruencia, homomorfismo, subproducto directo, etcétera. Comenzaremos por un ejemplo trivial.

Corolario 2.3

Sea S cualquier lógica modal autocongruente. Sean $p_1,\ldots,p_n$ variables proposicionales $(n \geqslant 1)$, y sea $k \geqslant 0$ cualquier número entero positivo. Entonces habrá solamente un número finito de fórmulas construídas a partir de, al máximo, las variables $p_1,\ldots,p_n$, que son de profundidad modal $\leq k$, y que son mutuamente no equivalentes módulo S.

Demostración

Sea $|S| = (|S|, -, \cap, *)$
el álgebra de Lindenbaum de S. Sea

$$B = \{ |p_1|, \ldots, |p_n| \},$$

donde escribimos $|\alpha|$ para indicar la clase de fórmulas equivalen tes a α módulo S. Definimos una secuencia

$$B_0 , B_0^* , B_1 , B_1^* , \ldots$$

de subconjuntos de $|S|$ como sigue.

(1) Sea B_0 la clausura de B con respecto a las operaciones de Boole $-$ y $\cap$.

(2) Para cada $i \geqslant 0$, sea $B_i^* = \{ *x : x \in B_i \}$

(3) Para cada $i \geqslant 0$, sea B_{i+1} la clausura de B_i^* con respecto a las operaciones de Boole.

Ahora está claro que, como S es una lógica modal autocongruente, y $|S|$ es el álgebra de Lindenbaum de S, el número de fórmulas que pueden construirse a partir de las variables proposicionales $p_1, \ldots\ldots\ldots, p_n$ con una profundidad modal $\leq k$ y mutuamente no equivalentes módulo S, es igual a la cardinalidad de $\mathcal{B}_k$. Pero también resulta de la teoría de álgebras de Boole que como $\mathcal{B}$ es finito, $\mathcal{B}_k$ es también finito.

Daremos ahora una aplicación más profunda del teorema 2,2, que determinará los elementos máximales consistentes de una clase muy amplia de lógicas modales autocongruentes. Comenzaremos con alguna terminología.

En el capítulo 1, hemos ya definido el concepto de monotonía para un conjunto S de fórmulas. Si recordamos la definición, se dice que un conjunto S de fórmulas es cerrado con respecto a monotonía si siempre que

$$(\alpha \supset \beta) \in S \quad \text{entonces} \quad (\Box\alpha \supset \Box\beta) \in S$$

Complementaremos esta definición diciendo que un conjunto S de fórmulas es cerrado con respecto a antitonía si siempre que

$$(\alpha \supset \beta) \in S \quad \text{entonces} \quad (\Box\beta \supset \Box\alpha) \in S$$

Diremos que un conjunto S de fórmulas es consistente si no existe una fórmula α tal que $\alpha \in S$ y $\neg\alpha \in S$. Nos proponemos demostrar que cada lógica modal autocongruente consistente que sea cerrada con respecto a monotonía o con respecto a antitonía es una sublógica de, al menos, una de cuatro lógicas muy simples.

Ahora bien, la más simple de las álgebras de Boole, aparte del álgebra trivial de un elemento, es el álgebra de Boole de dos elementos. Asimismo, las álgebras modales más simples, aparte del álgebra trivial de un elemento, son obviamente las cuatro álgebras que se pueden obtener por la adición de una operación $*$ al álgebra de Boole de dos elementos. En estas cuatro álgebras, la operación $*$ se comporta de las cuatro maneras siguientes:

$$*1 = 1 \quad , \quad *0 = 1$$

$$*1 = 1 \quad , \quad *0 = 0$$

$$*1 = 0 \quad , \quad *0 = 1$$

$$*1 = 0 \quad , \quad *0 = 0$$

Llamaremos a estas cuatro álgebras, el álgebra modal de <u>unidad</u>, el álgebra modal de <u>identidad</u>, el álgebra modal de <u>complemento</u> y el álgebra modal de <u>cero</u>, respectivamente.

Cada una de estas cuatro álgebras determina un conjunto correspondiente de fórmulas, definido como el conjunto de todas las fórmulas que son válidas en esa álgebra. Es fácil verificar que cada uno de estos cuatro conjuntos de fórmulas es una lógica modal autocongruente y consistente, y que cada uno es cerrado con respecto a monotonía o antitonía. Es también claro que se puede dar a cada una de estas cuatro lógicas una axiomatización completa por la adición de una sola fórmula a una axiomatización apropiada de la lógica clásica, siendo los axiomas adicionales las fórmulas

$$\Box p \; , \; (\Box p \equiv p) \; , \; (\Box p \equiv \neg p) \; , \; \neg \Box p$$

respectivamente. Llamaremos a estas cuatro lógicas modales autocongruentes consistentes, la lógica de <u>unidad</u>, la lógica de identidad, la lógica de complemento, y la lógica cero, respectivamente. Nos referiremos a las cuatro como constituyendo las lógicas modales degeneradas.

Teorema 2.4

Cada lógica modal autocongruente consistente que es cerrada con respecto a monotonía o con respecto a antitonía, es una sublógica de al menos una de las cuatro lógicas modales degeneradas.

Prueba

Sea S cualquier lógica modal autocongruente consistente, y supongamos que S es cerrada con respecto a monotonía o con respecto a antitonía. Sea

$$|S| = (|S|, -, \cap, *)$$

el álgebra de Lindenbaum de S, construída como en la prueba del teorema 2.2. Por el teorema 2.2, $|S|$ existe y es un álgebra modal característica para S. Como S es consistente, $|S|$ tiene por lo menos dos elementos.

Advertimos ahora que si S es cerrado con respecto a monotonía, entonces el álgebra modal $|S|$ es monotónica, en el sentido que siempre que

$$x \leq y \quad \text{entonces} \quad *x \leq *y$$

También, si S es cerrado con respecto a antitonía entonces $|S|$ es antitónica, en el sentido que siempre que

$$x \leq y \quad \text{entonces} \quad *y \leq *x$$

Para verificar lo primero, supongamos que x, y son elementos de $|S|$ y que $x \leq y$. Entonces $-x \cup y = 1$

Pero como $x, y \in |S|$
tenemos que $x = |\alpha|$ y que $y = |\beta|$ para algunas fórmulas α y β. De aquí

$$-|\alpha| \cup |\beta| = 1$$

de modo que $|\neg\alpha \vee \beta| = 1$,
así que $(\alpha \supset \beta) \in S$
De aquí si S es cerrado con respecto a monotonía,

$$(\Box\alpha \supset \Box\beta) \in S$$

así, retrazando nuestros pasos,

$$|\neg\Box\alpha \vee \Box\beta| = 1$$

de modo que $-*|\alpha| \cup *|\beta| = 1$
así $-*x \cup *y = 1$, y $*x \leq *y$.
Una computación similar abarca el caso de antitonía.

Dividiremos ahora el argumento en dos casos, según que S sea cerrado con respecto a monotonía o sea cerrado con respecto a antitonía.

Caso I. Supongamos que S es cerrado con respecto a monotonía. Entonces como hemos observado recién, el álgebra modal $|S|$ es monotónica. Consideraremos tres subcasos posibles.

Para el primer subcaso, supongamos que

$$*1 = 1 \quad \text{y} \quad *0 = 0$$

donde 1 y 0 son los elementos unidad y cero del álgebra modal $|S| = (|S|, -, \cap, *)$
Entonces el conjunto $\{1, 0\}$ es cerrado con respecto a las tres operaciones $-, \cap, *$,
y así determina una subálgebra de $|S|$ que coincide claramente con el álgebra de identidad. Ahora bien, basándonos en el álgebra universal, cada fórmula válida en $|S|$ es válida en todas

las subálgebras de $|S|$. De aquí que como $|S|$ es caracte- rística para S, S es una sublógica de la lógica de identidad. En más detalle: si α es una fórmula y $\alpha \in S$, entonces es válida en $|S|$ pues $|S|$ es característica para S, así α es válida en el álgebra de identidad, pues esta última es una subálgebra de $|S|$, y entonces α es una tesis de la lógica de identidad, por la definición de esta lógica.

Para el segundo subcaso, supongamos que

$$* 1 \neq 1$$

Entonces por resultados bien conocidos de las álgebras de Boole hay un ultrafiltro ∇ de $|S|$, o más exactamente del álgebra de Boole $(|S|, -, \cap)$ subyacente, con $* 1 \notin \nabla$

Ahora bien para todo $x \in |S|$, $x \leq 1$

y así como $|S|$ es monotónica,

$$* x \leq * 1$$

y entonces como ∇ es un filtro y

$*1 \notin \nabla$ tenemos $* x \notin \nabla$,

para todo $x \in |S|$.

Ahora definimos una función h de $|S|$ en el álgebra cero haciendo $h(x) = 1$

para cada $x \in \nabla$ y $h(x) = 0$

para cada $x \notin \nabla$.

Como ∇ es un ultrafiltro, la función h es homomórfica con respecto a las operaciones de Boole. Más aún, es homomórfica con respecto a la operación modal, desde que para cada $x \in |S|$,

$$h(* x) = 0 = * h(x)$$

Por consiguiente, h es un homomorfismo de $|S|$ en, y claramente sobre, el álgebra de cero. Ahora, basándonos en el álgebra universal, cada fórmula que es válida en $|S|$ es válida en todas las imágenes homomórficas de $|S|$. Por consiguiente como $|S|$ es característica para S, S es una sublógica de la lógica cero.

Para el tercer subcaso supongamos que

$$*0 \neq 0$$

Entonces por resultados bien conocidos de álgebras de Boole, hay un ultrafiltro ∇ de $|S|$ con $*0 \in \nabla$.
Ahora para todos los $x \in |S|$, $0 \leq x$
y así como $|S|$ es monotónica

$$*0 \leq *x$$

y de esta manera como ∇ es un filtro tenemos que

$$*x \in \nabla$$

para cada $x \in |S|$
Definimos una función h de $|S|$ en el álgebra de unidad haciendo a $h(x) = 1$ si $x \in \nabla$ y $h(x) = 0$ si $x \notin \nabla$ como antes. Entonces, por un argumento similar al del subcaso previo, h es un homomorfismo de $|S|$ sobre el álgebra de unidad. Ahora bien, cada fórmula que es válida en $|S|$ es válida en todas las imágenes homomórficas de $|S|$, y entonces como $|S|$ es característica para S , tenemos que S es una sublógica de la lógica de unidad.

Caso 2

Supongamos ahora que S es cerrado con respecto a antitonía . Entonces, como hemos ya dicho, $|S|$ es antitónica. Nuevamente vamos a considerar tres subcasos posibles, según que

$*1 = 0$ y $*0 = 1$, o que $*1 \neq 0$, o que $*0 \neq 1$
y podemos verificar por argumentos similares a aquéllos de los

correspondientes subcasos del primer caso, que S es una sub-lógica de la lógica de complemento, o de la lógica de unidad o de la lógica cero, respectivamente. Esto completa la demostración.

Corolario 2.5

Sea S cualquier lógica modal autocongruente consistente. Entonces:

(1). Si S es cerrada con respecto a monotonía, entonces S es una sublógica de al menos una de las lógicas de unidad, identidad, y cero. En particular, si S es una lógica modal regular, entonces S es una sublógica de por lo menos una de esas tres lógicas.

(2). Si S es cerrada con respecto a monotonía y contiene la fórmula $\Box(p \vee \neg p)$ entonces S es una sublógica de por lo menos una de las lógicas de unidad y de identidad. En particular, si S es una lógica modal normal, S es una sublógica de por lo menos una de esas dos lógicas.

(3). Si S es cerrada con respecto a monotonía y contiene la fórmula $\neg\Box(p \wedge \neg p)$ entonces S es una sublógica de por lo menos una de las lógicas de identidad y de cero.

(4). Si S es cerrada con respecto a monotonía y contiene tanto la fórmula $\Box(p \vee \neg p)$ como la fórmula $\neg\Box(p \wedge \neg p)$ entonces S es una sublógica de la lógica de identidad. En particular, cada lógica modal autocongruente consistente que incluye al sistema T de Feys es una sublógica de la lógica de identidad.

Verificación

Para (1) podemos referirnos al primer caso de la prueba del teorema 2.4, o podemos observar que si S es cerrada con respecto a monotonía entonces

$$(*(p \wedge \neg p) \supset *(p \vee \neg p)) \in S$$

de modo que S no es sublógica de la lógica de complemento. Recordemos también de la observación 1.5 del capítulo I que cada lógica modal regular es cerrada con respecto a monotonía

Para (2) observemos que

$$\Box(p \vee \neg p)$$

no es tesis de la lógica de cero, y para (4) observemos que

$$\neg \Box(p \wedge \neg p)$$

no es tesis de la lógica de unidad. Para (4) basta recordar la definición del sistema T de Feys, del Capítulo I.

Quizás valga la pena señalar que el teorema 2.4 no es válido, en general, para las lógicas modales que no son autocongruentes, y tampoco para las lógicas modales autocongruentes que no son ni cerradas con respecto a monotonía, ni cerradas con respecto a antitonía. Por ejemplo, los sistemas S7 y S8 de Lewis no son autocongruentes, y es fácil mostrar a partir de sus definiciones axiomáticas habituales que ninguna de estas lógicas es una sublógica de alguna de las cuatro lógicas modales degeneradas. Nuevamente, sea

$$\bar{A} = (A, -, \cap, *)$$

el álgebra modal definida poniendo $(A, -, \cap)$ como el álgebra de Boole de cuatro elementos,

$$1, \quad a, \quad -a, \quad 0$$

y poniendo $*$ como la función tal que

$$*1 = a \;, \quad *a = 0 \;, \quad *0 = -a \;, \quad *-a = 1 \,.$$

Entonces si S es el conjunto de todas las fórmulas que son válidas en el álgebra modal A, es fácil verificar que S es una lógica modal autocongruente, pero no es ni cerrada con respecto a monotonía ni cerrada con respecto a antitonía. Más aún, S no es una sublógica de alguna de las cuatro lógicas modales degeneradas, pues tenemos

$$\Box^2(p \wedge \neg p) \in S$$

lo que elimina la lógica de cero y la lógica de identidad, y también tenemos $\quad \neg\Box^2(p \vee \neg p) \in S$

lo que elimina las lógicas de unidad y de complemento.

El teorema 2.2 nos dice que cada lógica modal autocongruente tiene un álgebra modal característica con a lo máximo un número denumerable de elementos. Es natural que tratemos de mejorar este resultado, buscando álgebras finitas características. Sin embargo un teorema muy elegante de Dugundji nos dice que en muchos casos, y de hecho los casos más interesantes, no existe tal álgebra finita característica. Para formular el resultado, definimos como sigue la <u>secuencia de Dugundji</u> de fórmulas $\mu_2, \mu_3, \ldots$:

$$\mu_2 = \Box(p_1 \equiv p_2)$$

$$\mu_3 = \Box(p_1 \equiv p_2) \vee \Box(p_1 \equiv p_3) \vee \Box(p_2 \equiv p_3)$$

y de modo general, para $n \geq 2$, $\quad \mu_n = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} \Box(p_i \equiv p_j)$

Aquí $p_1, p_2, \ldots$ son variables proposicionales diferentes unas de otras. Desde el punto de vista de su interpretación intuitiva cada fórmula μ_n expresa que para cualquier selección de n proposiciones, hay por lo menos dos de entre ellas que son necesariamente equivalentes.

Lema 2.6 (Gödel, Dugundji)

Sea S cualquier conjunto de fórmulas que contiene la fórmula $\Box(p \equiv p)$
y que es cerrado con respecto a substitución y a las reglas:

$$\alpha / (\alpha \vee \beta) \quad \text{y} \quad \alpha / (\beta \vee \alpha)$$

Entonces si hay un álgebra modal finita que es característica para S , alguna fórmula de la secuencia de Dugundji es un elemento de S .

Demostración

Sea $A = (A, -, \cap, *)$
cualquier álgebra modal finita con digamos n elementos, y supongamos que A sea característica para S . Queremos mostrar que $\mu_{n+1} \in S$

Sea h cualquier asignación de variables proposicionales en A. Como A tiene solamente n elementos, hay números enteros i, j con $1 \leq i < j \leq n+1$
tales que $h(p_i) = h(p_j)$.
De aquí que $h(\mu_{n+1}) = h(\mu'_{n+1})$
donde μ'_{n+1} es la fórmula obtenida, de μ_{n+1} reemplazando cada vez que aparece p_j por p_i . Pero resulta claro que μ'_{n+1} es una fórmula disjuntiva,

una de cuyas partes es la fórmula

$$\Box(p_i \equiv p_i)$$

y así por las condiciones del lema

$$\mu'_{n+1} \in S$$

Por consiguiente, como A es característica para S , tenemos

$$h(\mu'_{n+1}) = 1$$

de modo que $h(\mu_{n+1}) = 1$

Pero h es cualquier asignación de variables proposicionales en A. De aquí que como A es característica para S ,

$$\mu_{n+1} \in S$$

Lema 2.7 (Dugundji)

Ninguna de las fórmulas de la secuencia de Dugundji es una tesis de S5.

Verificación

Construiremos un álgebra modal $A = (A, -, \cap, *)$

definiendo $(A, -, \cap)$

como el álgebra de Boole de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales, y definiendo

$$*1 = 1$$

mientras que $*x = 0$

para cada $x \in A$

tal que $x \neq 1$

Es fácil verificar por inducción, usando la definición axiomática de $S5$ en el Capítulo I, que cada tesis de $S5$ es válida en A. Sin embargo, ninguna de las fórmulas en la secuencia de

Dugundji es válida en A. Porque si h es la asignación que define $h(p_i)$ como $\{i\}$, entonces claramente $h(\mu_n) = 0$ para cada $n \geq 2$

Teorema 2.8 (Dugundji)

Sea S cualquier conjunto de fórmulas que contiene la fórmula $\Box(p \equiv p)$
y que es cerrado con respecto a substitución y a las reglas
$$\alpha / (\alpha \vee \beta) \quad \text{y} \quad \alpha / (\beta \vee \alpha)$$
y tal que $S \subseteq S5$.
Entonces no hay un álgebra modal finita que sea característica para S.

Demostración

Inmediata a partir de los lemas 2.6 y 2.7.

Corolario 2.9 (Dugundji)

Ninguna lógica modal normal incluída en $S5$ tiene un álgebra modal finita característica.

Como las álgebras finitas características tienen tan poca aplicación en lógica modal, dirigiremos nuestra atención a un concepto más débil, pero relacionado con aquéllas: la propiedad de modelos finitos. Aquí, sin embargo, debemos ser bastante cuidadosos con nuestra terminología, porque existen dos niveles diferentes en los cuales podemos trabajar: el nivel de las lógicas modales y el nivel de las axiomatizaciones de las lógicas modales.

Se dice que una lógica proposicional tiene la propiedad de modelos finitos si para cada fórmula α que no es una tesis de la lógica, hay un modelo finito en el cual todas las tesis de la lógica son válidas pero en el cual α no es válida. Se dice que una axiomatización de una lógica proposicional tiene la propiedad de modelos finitos si para cada fórmula α que no es una tesis de la lógica, existe un modelo finito en el cual todos los axiomas de la axiomatización son válidos, y todas las reglas primitivas de derivación de la axiomatización son válidas, pero en el cual α no es válida.

De los dos conceptos, el último es mucho más fundamental, por dos razones principales.

En primer lugar, el concepto de la propiedad de modelos finitos para una lógica proposicional es trivial, en el sentido que toda lógica proposicional tiene esa propiedad, si es cerrada con respecto a substitución, como ha notado G. Massey en un artículo que, en el momento en que estoy escribiendo, está en vías de publicación. De hecho, si S es una lógica proposicional cualquiera que es cerrada con respecto a substitución, y si α es una fórmula con $\alpha \notin S$ entonces podemos construir, a partir de las subfórmulas de α y de un elemento adicional, un modelo finito en que todas las fórmulas en S son válidas, pero en que α no es válida. Es decir, la propiedad de modelos finitos para una lógica proposicional, es tan general que no discrimina entre lógicas muy diferentes en sus estructuras.

En segundo lugar, la aplicación principal de la propiedad de modelos finitos es la de ser un paso en el camino para probar decidabilidad, y para conseguir este propósito necesitamos la propiedad de modelos finitos para una adecuada axiomatización de la lógica. La propiedad de modelos finitos está relacionada con la decidabilidad por el siguiente razonamiento. Si una lógica proposicional puede ser axiomatizada por medio de un conjunto finito de axiomas, la regla de substitución, y un conjunto finito de otras reglas "esquemáticas", entonces el conjunto de sus tesis es recursivamente enumerable. Más aún, si una tal axiomatización de la lógica tiene la propiedad de modelos finitos, entonces el conjunto de todas las fórmulas que no son tesis, es también recursivamente enumerable. Ahora, por un teorema general de la teoría de procedimientos efectivos, si F es un conjunto recursivo y S es un subconjunto de F tal que ambos S y $(F - S)$ son recursivamente enumerables, entonces S es recursivo. Relacionando todo esto: si una lógica proposicional puede ser axiomatizada por: un conjunto finito de axiomas, la regla de substitución, y un conjunto finito de otras reglas "esquemáticas"; y si esa axiomatización tiene la propiedad de modelos finitos, entonces la lógica tiene un conjunto recursivo de tesis, es decir, la lógica es decidible.

Así, cuando nos ocupamos de la propiedad de modelos finitos, deberíamos prestar atención a la axiomatización de una lógica, tanto como a la lógica misma. Está claro que si dos axiomatizaciones de una lógica proposicional singular tienen exactamente las mismas reglas primitivas de derivación, entonces si una axiomatización tiene la propiedad de modelos finitos, también lo tendrá la otra. Pero cuando las reglas de derivación son diferentes, no las podemos suponer sin una verificación específica del caso en cuestión, que si una axiomatización tiene la propiedad la otra la tiene también: un contraejemplo ha sido construído por J. Anderson 1968.

Si ahora dirigimos nuestra atención a la propiedad de modelos finitos para lógicas modales, nos encontramos con una situación bastante frustrante. Por una parte, se sabe que la mayoría de las lógicas modales estudiadas en la literatura tienen la propiedad de modelos finitos para sus presentaciones axiomáticas ordinarias. Por ejemplo, todas las lógicas específicas definidas hasta ahora en estas páginas,

C, R, N, T, S4, B, S5,

tienen la propiedad para las axiomatizaciones que hemos usado para definirlas. Pero por otra parte se requiere una verificación por separado para cada lógica, y es muy difícil especificar los límites de generalidad de las técnicas de prueba usadas. El único resultado realmente general que ha sido obtenido hasta ahora se debe a Bull 1966: cada lógica modal autocongruente S con $S4.3 \subseteq S$ tiene la propiedad de modelos finitos para todas sus axiomatizaciones Gödelianas. Aquí, S4.3 es una lógica intermedia entre S4 y S5 definida por la adición del axioma

$$(\Diamond p \wedge \Diamond q) \supset \{\Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(q \wedge \Diamond p)\}$$

a cualquier axiomatización Gödeliana de S4. Es limitada la posibilidad de generalizar los resultados de Bull en una dirección descendente: el autor (1969) ha construido una lógica modal normal: intermedia entre T y S4 tal que ninguna axiomatización Gödeliana de la lógica tiene la propiedad de modelos finitos. Aún queda abierta la cuestión de si todas las extensiones normales de

S4 , o de B

tienen la propiedad de modelos finitos para sus xiomatizaciones Gödelianas.

Así, mientras que hay muchos resultados particulares asociados con la propiedad de modelos finitos en la lógica modal, hay pocos resultados generales. Seleccionaremos unos pocos resultados. En este capítulo describiremos una técnica de Mc Kinsey que es eficaz para varias lógicas modales. Vamos también a dirigir nuestra atención hacia un examen general de álgebras modales simples y subdirectamente irreducibles, y aplicaremos los resultados a S5 y sus extensiones, En un capítulo posterior presentaremos el resultado negativo del autor. Sin embargo omitiremos la prueba del teorema de Bull, a pesar de su importancia, debido a su complejidad. Referimos al lector interesado a Bull 1966.

Comenzaremos por la técnica de Mc Kinsey para establecer la propiedad de modelos finitos para varias lógicas. Sea

$$A = (A, -, \cap, *)$$

cualquier álgebra modal, y sea B cualquier subconjunto finito de A . Definiremos la <u>reducción de Mc Kinsey</u> de A a través de B como el álgebra modal

$$C = (C, -, \cap, !)$$

donde: (1) C es el menor subconjunto de A que incluye B , contiene $* 0$, y es cerrado con respecto a las operaciones de Boole de A ,

(2) $!$ es una operación unaria sobre A, definida al poner

$$!x = \bigvee \{ *y : y \in C, *y \in C, y \leq x \}$$

para todos los $x \in C$.

Como B por hipótesis es finito, el conjunto C es finito. Notemos también que C no es vacío, y que si $x \in C$ entonces tenemos

$$0 \in C \quad , \quad *0 \in C \quad , \quad 0 \leq x ,$$

de manera que el conjunto

$$\{ *y : y \in C \, , \, *y \in C \, , \, y \leq x \}$$

no es vacío. De aquí que este conjunto tenga un límite superior menor en C, y la operación $!$ sobre C esté bien definida.

<u>Teorema 2.10 (Mc Kinsey)</u>

Sea S cualquier lógica modal autocongruente cerrada con respecto a monotonía, y sea α cualquier fórmula. Entonces si $\alpha \notin S$, α no es válida en alguna reducción de Mc Kinsey del álgebra de Lindenbaum de S.

<u>Verificación</u>

Supongamos que $\alpha \notin S$. Entonces por el teorema 2.2 α no es válida en el álgebra de Lindenbaum $|S|$ de S. Es decir, hay un homomorfismo h de fórmulas en $|S|$ tal que $h(\alpha) \neq 1$. Sea B el conjunto de todos los elementos $h(\beta) \in |S|$ donde β es una subfórmula de α. Resulta que B es finito.

Sea $\mathcal{C} = (C, -, \cap, !)$ la reducción de Mc Kinsey de $|S|$ a través de $\mathcal{B}$ de variables proposicionales, Definiremos una asignación g en $\mathcal{C}$, poniendo $g(p) = h(p)$ para cada variable proposicional p que aparece en α, y dando a $g(q)$ un valor arbitrario en $\mathcal{C}$ para las otras variables proposicionales q. Sea g^{+} la única extensión de g a un homomorfismo de fórmulas en $\mathcal{C}$.

Ahora podemos verificar por inducción en la longitud de β que para cada subfórmula β DE α,

$$g^{+}(\beta) = h(\beta) \in \mathcal{C}.$$

En la parte del paso de inducción que trata del operador modal $\Box$ necesitamos usar la hipótesis de que S es cerrada con respecto a monotonía. Así pues particularizando tenemos

$$g^{+}(\alpha) = h(\alpha) \neq 1$$

de modo que α no es válida en $\mathcal{C}$.

Teorema 2.11 (Mc Kinsey)

Las lógicas R, N, T, y S4 tienen todas las propiedad de modelos finitos con respecto a, por ejemplo cualquiera de sus axiomatizaciones dadas en el capítulo 1. Por consiguiente, cada una de estas lógicas es decidible.

Esbozo de verificación

En vista del teorema 2.10 es suficiente verificar que si S es una de estas cuatro lógicas, y $\mathcal{C}$ es la reducción de Mc Kinsey del álgebra de Lindenbaum $|S|$ a través de un subconjunto finito B de $|S|$, entonces todos los axiomas y reglas de la axiomatización de S en cuestión son válidas en C . Ahora ya sabemos por la observación 21 que, como C es un álgebra modal, son válidas en C todas las tautologías y también las reglas de substitución, separación, y congruencia. Además se puede verificar, axioma por axioma y regla por regla, que son válidos en C todos los otros axiomas y reglas de las axiomatizaciones de estas cuatro lógicas dadas en el primer capítulo.

Señalamos que la técnica utilizada en el teorema 2.11 es de generalidad limitada, aunque sus límites no son bien conocidos. Algunas fórmulas siempre preservan su validez en las reducciones de Mc Kinsey, pero otras no la preservan. Mencionemos también que en los trabajos de Mc Kinsey y Tarski hay un número de otras técnicas que, aún cuando son de generalidad limitada, dan resultados interesantes para sistemas específicos. Por ejemplo, se puede mostrar, usando una técnica de Mc Kinsey y Tarski 1948, que las lógicas C, R, N, T, y S4 tienen todas una cierta propiedad a saber: si una fórmula

$$(\Box\alpha \vee \Box\beta)$$

es tesis de uno de estos sistemas, entonces $\Box\alpha$ es tesis, o bien $\Box\beta$ es tesis, del mismo sistema. Este resultado no es válido para las lógicas S ó $S5$. Si hacemos de S uno de estos sistemas, tenemos

$$(\Box\neg p \vee \Box\Diamond\Diamond p) \in S$$

pero si p es una variable proposicional,

ni $\Box\neg p$ ni $\Box\Diamond\Diamond p$

son tesis de S . Para mayor información sobre esta propiedad, y sobre otras técnicas de Mc Kinsey y Tarski, el lector puede referirse a Mc Kinsey 1941, Mc Kinsey y Tarski 1944, 1946, 1948.

Nos referiremos ahora a un examen de álgebras modales simples y subdirectamente irreducibles. Este examen nos llevará finalmente a algunos resultados interesantes sobre S5 y sus extensiones. Pero no tomaremos el camino más corto para llegar a esos resultados lógicos: desarrollaremos por su propio interés la teoría algebraica.

Los conceptos de simplicidad y de irreducibilidad subdirecta pueden ser definidos en términos de homomorfismos. Se dice que un álgebra modal es <u>simple</u> si sus únicas imágenes homomórficas son sus imágenes isomórficas y las álgebras triviales (es decir, las álgebras con solamente un elemento). Se dice que un álgebra modal es <u>subdirectamente irreducible</u> si o es un álgebra <u>trivial</u> o existen elementos x, y del álgebra con $x \neq y$ pero tales que para cada homomorfismo h del álgebra, si h no es un homomorfismo entonces

$$h(x) = h(y)$$

En caso contrario se dice que el álgebra es <u>subdirectamente reducible</u>.

Como se sabe, estos conceptos pueden expresarse de una manera más "interna", en términos de relaciones de congruencia. Si A es un álgebra modal, llamaremos la congruencia <u>trivial</u> sobre A a la relación que existe entre elementos

$$x, y \in A$$

si y solamente si $x = y$;
y llamaremos la congruencia <u>total</u> sobre A a la relación que

existe entre todos los pares $x, y \in A$.
Entonces no es difícil mostrar, como un resultado de álgebra universal, que un álgebra modal es simple si y solamente si no tiene ninguna relación decongruencia aparte de la congruencia trivial y la congruencia total. Asimismo, un álgebra modal es subdirectamente irreducible si y solamente si o es un álgebra trivial o hay un par x, y de elementos del álgebra con $x \neq y$ pero tal que para cada relación de congruencia no trivial sobre A, $x \simeq y$. Si lo expresamos de manera más abstracta: un álgebra modal es subdirectamente irreducible si y solamente si, o es un álgebra trivial, o la intersección de todas las relaciones de congruencia no triviales sobre el álgebra es distinta de la relación de congruencia trivial sobre el álgebra.

Como en la teoría de las álgebras de Boole, se puede "internalizar" más aún estos conceptos, y expresarlos en términos de subconjuntos del álgebra. Con este fin introduciremos el concepto de un filtro autocongruente. Si A es un álgebra modal, o más generalmente un álgebra de Boole, escribimos $x \longrightarrow y$ para $-x \cup y$,
y escribimos $x \longleftrightarrow y$ para $(x \longrightarrow y) \cap (y \longrightarrow x)$
Llamaremos <u>filtro</u> a un subconjunto F de A tal que para todos $x, y \in A$, $(x \cap y) \in F$
si y solamente si $x \in F$ y $y \in F$.
Se llama <u>filtro autocongruente</u> a un filtro F de un álgebra modal A si siempre que $(x \longleftrightarrow y) \in F$
entonces $(*x \longleftrightarrow *y) \in F$.

Claramente, si A es un álgebra modal, entonces los conjuntos $\{1\}$ y A son ambos filtros autocongruentes de A :
en efecto; si $(x \longleftrightarrow y) = 1$
entonces $x = y$,
y entonces $*x = *y$
de modo que $(*x \longleftrightarrow *y) = 1$
Llamaremos a éstos los filtros autocongruentes <u>trivial</u> y <u>total</u> respectivamente.

Si A es un álgebra modal y $\simeq$ es una relación de congruencia sobre A , definimos el <u>núcleo</u> de $\simeq$ como $\{x \in A : x \simeq 1\}$
Entonces es fácil verificar lo siguiente, a partir de las definiciones anteriores.

<u>Observación 2.12</u>

Si A es un álgebra modal y $\simeq$ es una relación de congruencia sobre A , entonces el núcleo de $\simeq$ es un filtro autocongruente de A . Más aún, si $\simeq$ es la congruencia trivial o la total, el núcleo de $\simeq$ es el filtro autocongruente trivial o total, respectivamente.

Si A es un álgebra modal y F es un filtro autocongruente de A , diremos que elementos $x, y \in A$ son <u>equivalentes módulo F</u> , y escribiremos

$$x \simeq y \pmod F$$

si $(x \longleftrightarrow y) \in F$.
Entonces es fácil verificar lo siguiente, como un tipo de recíproca de la observación precedente.

Observación 2.13

Si A es un álgebra modal y F es un filtro autocongruente de A, entonces la relación

$$x \simeq y \pmod{F}$$

es una congruencia sobre A; y si F es el filtro autocongruente trivial o total, entonces

$$x \simeq y \pmod{F}$$

es la congruencia trivial o total, respectivamente.

Usando estas observaciones, obtendremos una caracterización de las álgebras modales simples, y de las subdirectamente irreducibles, en términos de filtros autocongruentes.

Observación 2.14

Sea A un álgebra modal. Entonces A es simple si y solamente si no tiene filtros autocongruentes, aparte del trivial y del total. A es subdirectamente irreducible si y solamente si o es un álgebra trivial o la intersección de todos sus filtros autocongruentes no triviales es distinta del filtro trivial.

Llamaremos a un álgebra modal

$$A = (A, -, \cap, *)$$

regular si para todos $x, y \in A$,

$$*(x \cap y) = (*x \cap *y).$$

Llamaremos normal a A si es regular y también

$$*1 = 1$$

Llamaremos a A un álgebra T si es normal y también satisface la condición de que para todo $x \in A$,

$$*x \leq x$$

Llamaremos a A un <u>álgebra $S4$</u> si es un álgebra T y satisface también la condición

$$*x \leq **x$$

Llamaremos a A un <u>álgebra de Brouwer</u> si es un álgebra T y satisface la condición

$$x \leq *-*-x.$$

Finalmente llamaremos a A un <u>álgebra $S5$</u> si es tanto un álgebra $S4$ como un álgebra de Brouwer. En la literatura, y particularmente en los trabajos de Halmos y de A. Monteiro, las álgebras $S5$ son a veces llamadas "álgebras de Boole monádicas". Asimismo, las álgebras $S4$ han sido llamadas "álgebras de clausura" por Mc Kinsey y Tarski, y "álgebras de Boole topológicas" por Rasiowa y Sikorski.

Es claro que estos conceptos algebraicos corresponden a aquéllos introducidos para las lógicas modales en el capítulo anterior. Es en verdad trivial verificar la:

<u>Observación 2.15</u>

Sea A un álgebra modal. Entonces A es regular / normal / un álgebra T / un álgebra $S4$ / un álgebra de Brouwer / un álgebra $S5$, si y solamente si todas las tesis de las lógicas modales

$$R \;/\; N \;/\; T \;/\; S4 \;/\; B \;/\; S5$$

<u>respectivamente,</u> son válidas en A.

También vale la pena notar lo siguiente, que es análogo a las observaciones 1.5 y 1.6 del capítulo I.

Observación 2.16

Sea A un álgebra modal regular. Entonces A es monotónica, y además para todo $x, y \in A$:

$$*(x \to y) \leq (*x \to *y)$$

$$*(x \leftrightarrow y) \leq (*x \leftrightarrow *y)$$

Verificación

Para la primera parte de la observación, supongamos que $x \leq y$.

Entonces $x \cap y = x$

y entonces $*(x \cap y) = *x$

y asimismo por regularidad

$$(*x \cap *y) = *x$$

lo cual implica que $*x \leq *y$.

Para la segunda parte de la observación, notemos que en todo álgebra de Boole,

$$(x \to y) \cap x \leq y$$

así que por monotonía y regularidad,

$$*(x \to y) \cap *x \leq *y$$

así que por una propiedad de álgebras de Boole,

$$*(x \to y) \leq *x \to *y$$

y entonces por regularidad y la definición de $\leftrightarrow$ tenemos también

$$*(x \leftrightarrow y) \leq (*x \leftrightarrow *y)$$

Señalemos que también se puede verificar la segunda parte de la observación indirectamente, usando la observación 2.15, y la observación 1.6 del capítulo anterior.

Cuando un álgebra modal es normal, la condición de que un filtro sea autocongruente puede ser expresada de una manera muy sencilla. Llamaremos <u>normal</u> a un filtro F de un álgebra modal A, si para todo $x \in A$, si $x \in F$ entonces $* x \in F$. En la literatura, particularmente en trabajos de Halmos y A. Monteiro, filtros normales han sido llamados "filtros monádicos".

<u>Observación 2.17</u>

Si A es un álgebra modal normal, entonces los filtros autocongruentes de A son precisamente los filtros normales de A.

<u>Verificación</u>

Sea A un álgebra modal normal, y sea F un filtro de A. Supongamos primero que F es autocongruente, y sea $x \in F$.

Queremos mostrar que $* x \in F$.

Ahora $x = (x \longleftrightarrow 1)$

en todo álgebra de Boole, así que

$$(x \longleftrightarrow 1) \in F$$

Entonces como F es autocongruente

$$(* x \longleftrightarrow * 1) \in F$$

Pero como el álgebra A es normal, $* 1 = 1$, de modo que $(*x \longleftrightarrow 1) \in F$.

Entonces, como $(*x \longleftrightarrow 1) = *x$

tenemos $*x \in F$.

Para la recíproca, supongamos que F es normal y sea

$$(x \longleftrightarrow y) \in F .$$

Queremos mostrar que $(*x \longleftrightarrow *y) \in F$.

Ahora como el filtro F es normal, tenemos

$$*(x \leftrightarrow y) \in F$$

Pero como el álgebra modal A es normal, es regular, y entonces por la observación 2.16.

$$*(x \leftrightarrow y) \leq (*x \longleftrightarrow *y)$$

de modo que como F es un filtro,

$$(*x \longleftrightarrow *y) \in F$$

Con estos resultados generales en la mano, podemos obtener resultados más específicos sobre la simplicidad e irreducibilidad en álgebras modales. Comenzaremos por la simplicidad.

<u>Observación 2.18</u>

Sea A un álgebra modal monotónica, con más de dos elementos. Entonces si A es simple,

$$*1 = 1 \qquad y \qquad *0 = 0$$

<u>Demostración</u>

Se puede probar esta observación con el razonamiento de la demostración del teorema 2.4, primer caso, segundo y tercer subcasos. Otra prueba es como sigue.

Supongamos que $*1 \neq 1$. Sea a un elemento de A que satisface las siguientes condiciones: si

$$*1 \neq 0$$

entonces $a = -*1$,

mientras que si $*1 = 0$

entonces a es un elemento de A con

$$a \neq 1 \quad , \quad a \neq 0 .$$

Por hipótesis A tiene más de dos elementos, de manera que un tal a existe. Sea F el filtro engendrado por a, es decir,

$$F = \{ x : x \in A \, , \, a \leq x \}$$

Se puede verificar que F no es el filtro trivial ni el filtro total de A. En particular, $*1 \notin F$.

Ahora para todo $x \in A$, $x \leq 1$,

y así por monotonía $*x \leq *1$

Entonces, como $*1 \notin F$ y F es un filtro, $*x \notin F$ para todo $x \in A$, de modo que $(*y \longleftrightarrow *z) \in F$ para todo $y, z \in A$.

Es decir, F es un filtro autocongruente de A, de modo que A tiene un filtro autocongruente aparte del trivial y del total. De aquí que por la observación 2.14 el álgebra A no es simple. Un razonamiento similar abarca el caso en que $*0 \neq 0$.

<u>Teorema 2.19</u>

Sea A un álgebra modal normal. Entonces A es simple si y solamente si para todo $x \in A$, si $x \neq 1$ entonces hay un entero $n \geq 0$ tal que

$$\bigcap_{i \leq n} *^{i} x = 0$$

Demostración

Aquí escribimos $*^{i}$ como abreviación de una secuencia de i estrellas. Por ejemplo,

$$*^{0} x = x \quad , \quad *^{1} x = *x \quad , \quad *^{2} x = **x \quad ,$$

y así sucesivamente.

Para todo $x \in A$, escribimos $F(x)$ para el menor entre los filtros normales de A que contengan x. Por la observación 2.17, $F(x)$ es un filtro autocongruente de A. Asimismo, siempre que $x \neq 1$, $F(x)$ no es el filtro trivial de A. Más aún, no es difícil verificar que para todo $x \in A$,

$$F(x) = \{ y \in A : \text{para algún } n \geq 0 , \bigcap_{i \leq n} *^{i} x \leq y \}$$

Ahora supongamos que A sea simple, y que $x \in A$, $x \neq 1$

Como A es simple, tenemos por la observación 2.14 que el filtro autocongruente $F(x)$ es o el filtro trivial de A o el filtro total de A. Como $x \neq 1$ y $x \in F(x)$, sabemos que $F(x)$ no es el filtro trivial de A, y así $F(x)$ es el filtro total de A. De aquí que $0 \in F(x)$ y así tenemos $\bigcap_{i \leq n} *^{i} x \leq 0$ para algún $n \geq 0$.

Supongamos para la recíproca que A no es simple. Entonces por la observación 2.14, A tiene un filtro autocongruente distinto del filtro trivial y del filtro total, y por la observación 2.17 como el álgebra A es normal, tenemos que el filtro es normal. Como F no es trivial, existe un

$$x \in F \quad , \quad x \neq 1 .$$

Ahora claramente $F(x) \subseteq F$

De aquí que, como F no es total, $0 \notin F$, de modo que

$0 \notin F(x)$ de modo que no hay un $m \geq 0$

tal que $\bigcap_{i \leq m} *^{i} x = 0$

Esto completa la prueba.

Corolario 2.20

Sea A un álgebra T. Entonces A es simple si y solamente si para todo $x \in A$, si $x \neq 1$ entonces existe un entero $n \geq 0$ tal que $*^{n} x = 0$

Verificación

Recordemos que un álgebra T se define como un álgebra modal normal en la cual $* x \leq x$

Corolario 2.21

Sea A un álgebra $S4$. Entonces A es simple si y solamente si para todo $x \in A$, si $x \neq 1$ entonces $* x = 0$

Verificación

Recordemos que un álgebra $S4$ se define como un álgebra T en la cual $* x \leq * * x$

Ahora trataremos de la irreducibilidad subdirecta, donde es posible obtener resultados similares a los de simplicidad.

Teorema 2.22

Sea A un álgebra modal normal. Entonces A es subdirectamente irreducible si y solamente si o A es un álgebra trivial o existe un $a \in A$ con $a \neq 1$ y tal que para todo $x \in A$, si $x \neq 1$ entonces hay un entero $n \geq 0$ tal que $\bigcap_{i \leq n} *^{i} x \leq a$

Demostración

Como en la prueba del teorema 2.19, representaremos por $F(x)$ al menor de los filtros normales de A que contengan x. Como antes, señalamos que por la observación 2.17, $F(x)$ es siempre un filtro autocongruente de A

Siempre que $x \neq 1$, $F(x)$

no es el filtro trivial de A. Más aún, para todo $x \in A$,

$$F(x) = \{ y \in A : \text{ para algún } n \geq 0, \bigcap_{i \leq n} *^{i} x \leq y \}.$$

Ahora supongamos que A es subdirectamente irreducible. Entonces por la observación 2.14, si A no es un álgebra trivial, la intersección de todos los filtros autocongruentes no triviales de A es distinta del filtro trivial, y entonces contiene un elemento $a \neq 1$.

Sea x cualquier elemento de A con $x \neq 1$. Entonces $F(x)$ es un filtro autocongruente no trivial de A, y entonces tenemos $a \in F(x)$. Por consiguiente

$$\bigcap_{i \leq n} *^{i} x \leq a$$

para algún $n \geq 0$.

Supongamos para la recíproca que A no es subdirectamente irreducible. Entonces A no es un álgebra trivial.

Tomemos cualquier $a \in A$ con $a \neq 1$. Por la observación 2.14 hay un filtro autocongruente F de A , tal que F no es trivial, y $a \notin F$.
Como F no es trivial, hay un $x \in F$ con $x \neq 1$, y como el álgebra A es normal, tenemos por la observación 2.17 que el filtro F es normal. Por consiguiente,

$$F(x) \subseteq F$$

y así como $a \notin F$ tenemos $a \notin F(x)$. Entonces no hay un entero $n \geq 0$ tal que

$$\bigcap_{i \leq n} *^{i} x \leq a$$

Corolario 2.23

Sea A un álgebra T no trivial. Entonces A es subdirectamente irreducible si y solamente si hay un

$a \in A$ con $a \neq 1$

y tal que para todo $x \in A$ si $x \neq 1$
entonces hay un entero $n \geq 0$ tal que $*^{n} x \leq a$

Verificación

Recordemos que un álgebra T es un álgebra modal normal en la cual $* x \leq x$

Mencionaremos como una curiosidad que el corolario 2.23 también es cierto para las álgebras modales normales atómicas. Un álgebra modal, o más generalmente un álgebra de Boole, se llama <u>atómica</u> cuando para cada $x \neq 0$ hay un átomo a con

$$a \leq x .$$

Entonces no es difícil derivar el siguiente resultado del teorema 2.22

Corolario 2.24

Sea A un álgebra modal normal atómica y no trivial. Entonces A es subdirectamente irreducible si y solamente si hay un $a \in A$ con $a \neq 1$ y tal que para todos los $x \in A$, si $x \neq 1$ entonces hay un entero $n \geq 0$ tal que $*^n x \leq a$.

Corolario 2.25

Sea A un álgebra $S4$ no trivial. Entonces A es subdirectamente irreducible si y solamente si hay un $a \in A$ con $a \neq 1$ y tal que para todo $x \in A$, si $x \neq 1$ entonces $* x \leq a$.

Verificación

Recordemos que un álgebra $S4$ es un álgebra T en la cual $* x \leq * * x$.

Corolario 2.26 (Birkhoff)

Sea A un álgebra $S4$. Si A es subdirectamente irreducible entonces para todo $x, y \in A$ si $* x \cup * y = 1$ entonces $* x = 1$ ó $* y = 1$.

Verificación

Es inmediata del corolario 2.25.

Corolario 2.27 (Bull)

Sea A un álgebra $S4$ que satisface la condición

$$*(*x \longrightarrow *y) \cup *(*y \longrightarrow *x) = 1$$

Si A es subdirectamente irreducible entonces el conjunto

$$\{ *x \in A : x \neq 1 \}$$

es una cadena con respecto a la relación $\leq$ del álgebra de Boole subyacente. Más aún, si A no es un álgebra trivial, esta cadena tiene un límite superior que es un elemento de la cadena.

Verificación

Es inmediata de los corolarios 2.25 y 2.26

Corolario 2.28 (Halmos)

Sea A un álgebra $S5$ no trivial. Entonces A es subdirectamente irreducible si y solamente si para todo $x \in A$ si $x \neq 1$ entonces $*x = 0$

Verificación:

Supongamos que para todo

$$x \in A \quad , \quad \text{si} \quad x \neq 1$$

entonces $*x = 0$

Entonces por el corolario 2.25, haciendo $a = 0$, A es subdirectamente irreducible.

Supongamos recíprocamente que A es subdirectamente irreducible. Sea $x \in A$, $x \neq 1$

y supongamos por reducción al absurdo que

$$*x \neq 0$$

Entonces $-*x \neq 1$,

y por el corolario 2.25 hay un

$$a \in A \qquad \text{con} \qquad a \neq 1$$

y tal que ambos $\quad * x \leq a \quad$ y $\quad * - * x \leq a$

De aquí $\quad * x \cup * - * x \leq a$

Pero se puede mostrar que en toda álgebra $S5$,

$$* x \cup * - * x = 1$$

De aquí que $\quad a = 1 \quad$ lo que es una contradicción.

El corolario 2.28 nos da una caracterización muy útil de las álgebras $S5$ subdirectamente irreducibles. Definimos un <u>álgebra de Henle</u> como un álgebra modal

$$A = (A, -, \cap, *)$$

donde $\quad * 1 = 1$

mientras $\quad * x = 0$

para todo $\quad x \in A$

con $\quad x \neq 1$.

<u>Teorema 2.29 (Halmos)</u>

Sea A un álgebra $S5$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes: A es subdirectamente irreducible, A es un álgebra de Henle, A es simple.

<u>Verificación</u>

Es inmediata a partir de los corolarios 2.28 y 2.21. Es también posible construir una prueba más directa de este teorema.

Las álgebras de Henle tienen algunas propiedades muy útiles entre las cuales mencionaremos la siguiente.

<u>Observación 2.30</u>

Cada álgebra de Henle finitamente generada es finita: si n es el número de generadores, el álgebra tiene como máximo $2^{(2^n)}$ elementos.

Además, hay una secuencia

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots$$

de álgebras de Henle finitas, donde cada álgebra A_i tiene exactamente 2^i elementos, donde A_i es un subálgebra de A_j si y solamente si $i \leq j$ y tal que toda álgebra de Henle finita es isomorfa a algún álgebra A_i de la secuencia.

<u>Verificación</u>

Es inmediata a partir de la definición de un álgebra de Henle y de propiedades bien conocidas de las álgebras de Boole finitas.

Ahora aplicaremos estos resultados algebraicos al estudio de la lógica $S5$ y sus extensiones autocongruentes.

<u>Teorema 2.31</u>

Sea S cualquier lógica modal autocongruente con

$$S5 \subseteq S$$

Entonces para cada fórmula $\alpha \notin S$ hay un álgebra de Henle finita B tal que toda fórmula $\beta \in S$

es válida en B, mientras α no es válida en B.

Demostración

Sea α cualquier fórmula y supongamos que

$$\alpha \notin S$$

Entonces por el teorema 2.2, α no es válida en el álgebra de Lindenbaum $|S|$ de S, y por la observación 2.15, $|S|$ es un álgebra $S5$.

Ahora, por un teorema bien conocido del álgebra universal, hay un álgebra modal A subdirectamente irreducible que es una imagen homomórfica de $|S|$, y tal que α no es válida en A.

Como α no es válida en A, hay un homomorfismo de las fórmulas en A tal que $h(\alpha) \neq 1$.
Sea B la subálgebra de A engendrada por las imágenes

$$h(p)$$

de las variables proposicionales que aparecen en α. Entonces la función h, restringida a las fórmulas construídas a partir de las variables proposicionales que ocurren en α es un homomorfismo en B y $h(\alpha) \neq 1$, de modo que α no es válida en B.

Pero como $|S|$ es un álgebra $S5$ y A es una imagen homomórfica de $|S|$, A es también un álgebra y como $S5$ es subdirectamente irreducible tenemos por el teorema 2.29 que A es un álgebra de Henle. De aquí que B es un álgebra de Henle, y por la observación 2.30, B es finita. Aún más, como A es una imagen homomórfica de $|S|$ y B es una subálgebra de A, cada fórmula válida en $|S|$

es válida en B . De aquí que como $|S|$ es característica para S , tenemos que para cada $\beta \in S$, β es válida en B.

Corolario 2.32

La lógica modal $S5$ tiene la propiedad de modelos finitos con respecto a sus axiomatizaciones dadas en el capítulo I.

Del teorema 2.31 es posible obtener un teorema importante debido a S. Scroggs, que ilumina las extensiones autocongruentes de $S5$. Su contenido contrasta con el teorema 2.8 de Dugundji, y su demostración rivaliza con este último en elegancia.

Teorema 2.33 (Scroggs)

Sea S cualquier lógica modal autocongruente que incluya propiamente a $S5$. Entonces hay un álgebra de Henle finita A que es característica para S .

Demostración

Como S incluye a $S5$ existe una fórmula α tal que $\alpha \in S$, $\alpha \notin S5$.
Como $\alpha \notin S5$
tenemos por el teorema 2.31 que hay un álgebra de Henle finita B tal que α no es válida en B.

Ahora recordaremos alguna terminología del comienzo de este capítulo: se dice que un conjunto de fórmulas es válido en una cierta álgebra si y solamente si todos sus elementos son válidos en esa álgebra. Como $\alpha \in S$ y α no es válida en B, podemos decir que S no es válida en B. De aquí que por la observación 2.30 hay un entero n mínimo tal que el álgebra de Henle finita A_n no valida a S. Claramente $n \neq 0$ porque el álgebra A_0 tiene $2^0 = 1$ elementos, y valida así a todas las fórmulas. Sostenemos que A_{n-1} caracteriza a S.

Ahora por la definición del número n, el álgebra de Henle A_{n-1} valida a S. Así queda por demostrar que para cada fórmula $\beta \notin S$, β no es válida en A_{n-1}. Sea β cualquier fórmula y supongamos que

$$\beta \notin S.$$

Entonces por el teorema 2.31 hay un álgebra de Henle finita A_k tal que S es válida en A_k pero β no es válida en A_k.

O bien $n \leq k$ ó $k < n$. Si $n \leq k$ entonces por la observación 2.30, A_n es un subálgebra de A_k. De aquí que como S es válida en A_k, S es válida en A_n: lo que contradice la definición de n. Si por otra parte $k < n$ tenemos que $k \leq (n-1)$ y así por la observación 2.30, A_k es un subálgebra de A_{n-1}

De aquí que como β no es válida en A_k, β no es válida en A_{n-1}. Esto completa la prueba.

Corolario 2.34 (Scroggs)

El conjunto de todas las lógicas modales autocongruentes S tal que S incluye propiamente a $S5$, forma una cadena enumerable $\ldots \subset S_2 \subset S_1 \subset S_0$
que satisface las siguientes condiciones. Para cada
$i \geq 0$
la lógica S_i tiene el álgebra de Henle A_i como un álgebra característica. S_0 es la lógica modal inconsistente, y S_1 es la lógica modal de identidad. Además

$$S5 = \bigcap_{i<\omega} S_i$$

El teorema de Scroggs es muy útil cuando uno quiere probar que una cierta lógica, definida semánticamente, coincide con la lógica $S5$. En tales situaciones es generalmente facil probar que $S5 \subseteq S$
por medio de un argumento inductivo en una axiomatización conveniente de $S5$. Pero la inclusión recíproca,

$$S \subseteq S5$$

o "teorema de completitud", es generalmente más difícil de probar. El resultado siguiente nos ayuda a salvar este obstáculo en muchos casos.

Corolario 2.35

Sea S cualquier lógica modal autocongruente con

$$S \subseteq S5.$$

Si ninguna fórmula μ_n de la secuencia de Dugundji es un elemento de S, entonces

$$S = S5.$$

Demostración

Es inmediata a partir del teorema 2.33 de Scroggs y el lema 2.6 de Gödel y Dugundji.

Terminaremos este capítulo con un resultado negativo sobre álgebras modales finitas generadas y subdirectamente irreducibles. Una propiedad muy útil de las álgebras S5 como se ve en los teoremas 2.29 y 2.30, es que cada álgebra S5 subdirectamente irreducible y finitamente generada, es finita. Es natural preguntarse si lo mismo es cierto para, digamos, las álgebras de Brouwer o las álgebras S4. El teorema siguiente nos dice que no es cierto para las álgebras S4.

Teorema 2.36

Existe un álgebra S4 subdirectamente irreducible, en la cual es válida la fórmula

$$\Box(\Box p \supset \Box q) \vee \Box(\Box q \supset \Box p)$$

que es generada por un subconjunto con solamente dos elementos, pero que es infinita.

Demostración

Sea W el conjunto de todos los ordinales

$$n \leq \omega$$

y sea $\quad A = (A, -, \cap, *)$

el álgebra modal definida como sigue. Tomemos A como el conjunto de todos los subconjuntos de W y a $-$ y $\cap$ como las operaciones de complementación e intersección de subcon juntos de W. Finalmente, para cada $a \in A$ definimos $*a$ como $\{n \in W : \text{para todos los } m \leq n,\ m \in a\}$.

Sea $x \in A$ el conjunto de todos los ordinales $< w$ y sea $y \in A$ el conjunto de todos los ordinales pares $2n < w$. Sea $[x, y] = B = (B, -, \cap, *)$ la subálgebra de A generada por el par

$$\{x, y\}.$$

Deseamos mostrar que B satisface las condiciones del teorema.

Ahora, no es difícil verificar que A es un álgebra $S4$ en la cual es válida la fórmula

$$\Box(\Box p \supset \Box q) \vee \Box(\Box q \supset \Box p)$$

De aquí que como B es un subálgebra de A, también satisface estas condiciones.

Para demostrar que B es subdirectamente irreducible, es suficiente en vista del corolario 2.25, demostrar que hay un $b \in B$ con $b \neq 1$ y tal que para todo $c \in B$ si $c \neq 1$ entonces $*c \leq b$.
Resulta claro que el elemento $x \in B$ satisface estas condiciones.

Por consiguiente, queda por mostrar que B es infinita.
Sea $b_0, b_1, b_2, \ldots$ la secuencia de elementos de B definidos como sigue:

(1) $b_0 = y$

(2) para todo $i \geq 0$ si i es par entonces

$$b_{i+1} = -y \cap -*-b_i$$

(3) Para todo $i \geq 0$ si i es impar enton ces

$$b_{i+1} = y \cap -*-b_i$$

Está claro que cada $b_i \in B$. Más aún, se puede verificar por inducción en i que para todo $n \in W - \{\omega\}$

$$n \in b_i$$

si y solamente si tanto $n = i \pmod 2$ como $i \leq n$.

También se tiene que los elementos

$$b_0, b_1, b_2, \ldots$$

son distintos, por lo siguiente. Sean

$$b_j, b_k$$

elementos de la secuencia con $j < k$.

Como $j = j \pmod 2$ y $j \leq j$

tenemos $j \in b_j$

Pero como $j < k$ resulta $k \nleq j$

de modo que $j \notin b_k$.

Así el álgebra B es infinita y la demostración es completa.

CAPITULO III

MODELOS RELACIONALES

Las álgebras modales, según las hemos definido, son álgebras de Boole con una operación adicional. Así, si un álgebra modal es finita, tiene 2^n elementos para algún n. Esto significa que las álgebras modales más pequeñas, aparte del álgebra trivial, tienen dos, cuatro, y ocho elementos. Más allá de ese punto, se hace difícil diagramar o visualizar. En este capítulo definiremos otro tipo de estructura, llamada modelo relacional, que tiene la siguiente ventaja práctica: cada álgebra modal finita con 2^n elementos es equivalente, en un sentido que puede hacerse preciso, a un modelo relacional con solamente n elementos.

Para explicar el concepto de un modelo relacional, es conveniente referirse a una idea de Leibniz. Según Leibniz, una proposición es lógicamente necesaria si es cierta en "todos los mundos posibles", y es lógicamente posible si es cierto en "por lo menos un mundo posible". El concepto de un modelo relacional se construye a partir de esta idea. Cada modelo relacional está basado sobre un conjunto, que es pensado heurísticamente como un conjunto de "todos los mundos posibles", y el valor de verdad de una fórmula $\Box\alpha$ en un mundo posible dado está determinado por los valores de verdad de α en varios mundos posibles. Con el fin de hacer el concepto de un modelo relacional tan general como sea posible, se introducen también algunas otras ideas: una relación de "accesibilidad" entre mundos posibles, una división de los mundos posibles en aquéllos que son "normales" y aquéllos que no lo son, y la idea de un conjunto "cerrado" de evaluaciones de fórmulas en mundos posibles.

Para proceder formalmente, definimos un <u>marco relacional</u> como una estructura (K, N, R) donde K es un conjunto no vacío, N es un subconjunto de K y R es una relación binaria entre elementos de K. Heurísticamente, los elementos de K son los "mundos posibles", los elementos de N son los mundos posibles "normales" y R es la relación de "accesibilidad" entre mundos posibles.

Llamaremos <u>asignación</u> en un marco relacional

$$(K, N, R)$$

a cualquier función $g : P \times K \longrightarrow \{1, 0\}$ donde P es el conjunto de todas las variables proposicionales. Por una <u>evaluación</u> en un marco relacional, queremos decir cualquier función

$$h : F \times K \longrightarrow \{1, 0\}$$

donde F es el conjunto de todas las fórmulas, que satisface las siguientes condiciones para todas las

$$\alpha, \beta \in F$$

y todos los $k \in K$

$$h(\neg\alpha, k) = 1 \quad \text{si} \quad h(\alpha, k) = 0$$

$$h(\neg\alpha, k) = 0 \quad \text{si} \quad h(\alpha, k) = 1$$

$h(\alpha \wedge \beta) = 1$ si $h(\alpha, k) = 1$ y $h(\beta, k) = 1$

$h(\alpha \wedge \beta) = 0$ si $h(\alpha, k) = 0$ ó $h(\beta, k) = 0$

$h(\Box\alpha, k) = 1$ si $k \in N$ y $h(\alpha, k') = 1$ para todos los $k' \in K$ tales que $(k, k') \in R$.

$h(\Box\alpha, k) = 0$ si $k \notin N$ ó $h(\alpha, k') = 0$ para algún $k' \in K$ tal que $(k, k') \in R$

Resulta claro que si (K, N, R) es un marco relacional, entonces para cada asignación

$$g: P \times K \longrightarrow \{1, 0\}$$

en el marco existe exactamente una evaluación

$$h: F \times K \longrightarrow \{1, 0\}$$

en el marco que es una extensión de g en el sentido que para cada variable proposicional p y cada $k \in K$

$$h(p, k) = g(p, k)$$

Por esta razón llamaremos a una tal h <u>la</u> extensión de la asignación g, y a menudo usaremos, sin precisión, la misma letra para las dos.

A fin de definir modelos **relacionales**, necesitamos el concepto de un conjunto cerrado de evaluaciones. Este concepto es más bien complejo, y antes de formularlo, es conveniente fijar, de una vez por todas, una cierta enumeración

$$P = \langle p_i \rangle_{i < \omega}$$

del conjunto P de todas las variables proposicionales. Entonces diremos que un conjunto H de evaluaciones en un marco relacional es <u>cerrado</u> si no es vacío, y satisface la condición siguiente: si h, h' son evaluaciones en el marco y $h \in H$, entonces si hay una secuencia $\langle \beta_i \rangle_{i<\omega}$ de fórmulas tales que para todo $i < \omega$ y todo $k \in K$

$$h'(\beta_i, k) = h(\beta_i, k)$$

entonces $h' \in H$.

Es claro que si (K, N, R) es un marco relacional y H es el conjunto de <u>todas</u> las evaluaciones en el marco, entonces H es cerrado.

Finalmente, definimos un <u>modelo relacional</u> como una estructura (K, N, R, H) donde (K, N, R) es un marco relacional y donde H es un conjunto cerrado de evaluaciones en ese marco. Decimos que un modelo relacional

$$(K, N, R, H)$$

es <u>completo</u> si H es el conjunto de todas las evaluaciones en el marco (K, N, R) y definimos la <u>compleción</u> de un modelo relacional

$$(K, N, R, H)$$

como el modelo relacional completo en el marco

$$(K, N, R)$$

Resulta claro que un modelo relacional es determinado no solamente por su conjunto K, **sino** también por N, R, H. Sin embargo en situaciones en las cuales no puede aparecer ninguna ambigüedad, llamaremos al modelo relacional por el nombre de su conjunto, y escribiremos

$$K = (K, N, R, H).$$

Se dice que una fórmula α es <u>válida</u> en un modelo relacional (K, N, R, H) si para toda $h \in H$ y todo $k \in K$

$$h(\alpha, k) = 1$$

Se dice que una regla de derivación es <u>válida</u> en el modelo relacional si para cada secuencia de $(n+1)$ fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ que se encuentran en la relación indicada por la regla, si cada una de las $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ es válida en el modelo, entonces lo es también β. Se dice que la regla es <u>fuertemente válida</u> en el modelo relacional si para cada secuencia de $(n+1)$ fórmulas $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ tenemos: para toda $h \in H$ si $h(\alpha_i, k) = 1$ para todo $i \leq n$ y todo $k \in K$ entonces $h(\beta, k) = 1$ para todo $k \in K$

Estos conceptos de validez, de fuerte validez son paralelos a los introducidos en el capítulo previo para álgebras modales, y la siguiente observación puede compararse con la observación 2.1.

<u>Observación 3.1</u>

Sea $K = (K, N, R, H)$ cualquier modelo relacional. Entonces cada tautología, cons

truida a partir de variables proposicionales usando solamente los operadores $\neg, \wedge$,
es válida en K. La fórmula

$$\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$$

es válida en K. Las reglas de separación y congruencia son fuertemente válidas en K. La regla de substitución es válida en K, pero si K es completo entonces la regla de substitución no es fuertemente válida en K

Verificación

(1) Sea α cualquier fórmula construida a partir de variables proposicionales usando solamente los operadores $\neg, \wedge$. Supongamos que α no es válida en K : queremos mostrar que α no es una tautología.

Como α no es válida en K, hay una evaluación

$$h \in H$$

y un elemento $k \in K$
tal que $h(\alpha, k) = 0$
Ahora sea $f : P \longrightarrow \{1, 0\}$
la función del conjunto de todas las variables proposicionales, en el conjunto $\{1, 0\}$,
definido por $f(p) = h(p, k)$
para cada variable proposicional p. Sea f^+ la única extensión de f a un homomorfismo del conjunto de todas las fórmulas en $\neg, \wedge$, en el álgebra de Boole de dos elementos. Entonces podemos verificar por una inducción en la longitud de α que $f^+(\alpha) = h(\alpha, k)$.
Así, como $h(\alpha, k) = 0$

tenemos $f^{+}(\alpha)=0$

de modo que α no es una tautología.

(2) Supongamos por reducción al absurdo, que la fórmula $\alpha = \Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$ no es válida en K. Entonces hay una evaluación

$$h \in H$$

y un elemento $k \in K$

tales que $h(\alpha, k)=0$

De aquí tenemos $h(\Box(p\wedge q), k) \neq h(\Box p \wedge \Box q, k)$

y así uno de dos casos posibles es válido.

Para el primer caso, supongamos que

$$h(\Box(p\wedge q), k) = 1$$

mientras que $h(\Box p \wedge \Box q, k)=0$

Como $h(\Box p \wedge \Box q, k)=0$

tenemos ya sea

$$h(\Box p, k)=0 \qquad ó \qquad h(\Box q, k)=0$$

Consideramos la primera alternativa; el argumento para la segunda es similar. Como

$$h(\Box p, k)=0$$

tenemos por la definición de una evaluación que ya sea

$k \notin N$ ó bien existe un $k' \in K$

con $(k, k') \in R$

tal que $h(p, k')=0$

Ahora si $k \notin N$

tenemos $h(\Box\alpha, k)=0$

para cada fórmula α, de modo que en particular

$$h(\Box(p\wedge q), k)=0$$: contradicción

y si hay un $k' \in K$

con $(k, k') \in R$

tal que $h(p, k') = 0$

entonces tenemos

$$h(p \wedge q, k') = 0$$

de modo que $h(\Box(p \wedge q), k) = 0$:contradicción.

Para el segundo caso, supongamos que

$$h(\Box p \wedge \Box q, k) = 1$$

mientras que $h(\Box(p \wedge q), k) = 0$

Como $h(\Box(p \wedge q), k) = 0$

tenemos por la definición de una evaluación que

$$k \notin N \quad \text{ó bien} \quad h(p \wedge q, k') = 0$$

para algún $k' \in K$

con $(k, k') \in R$

Ahora si $k \notin N$

tenemos $h(\Box \alpha, k) = 0$

para toda fórmula α, de modo que

$$h(\Box p, k) = 0$$

así que $h(\Box p \wedge \Box q, k) = 0$:contradicción.

Y si $h(p \wedge q, k') = 0$

para algún $k' \in K$ con $(k, k') \in R$

tenemos ya sea $h(p, k') = 0$ ó $h(q, k') = 0$

de modo que $h(\Box p, k) = 0$

ó bien $h(\Box q, k) = 0$

y así $h(\Box p \wedge \Box q, k) = 0$:contradicción.

(3) Para la regla de separación, sean α, β fórmulas,

sean $h \in H$, $k \in K$

y supongamos que $h(\alpha, k) = 1$

y $h(\alpha \supset \beta, k) = 1$

Entonces usando la definición de una evaluación y el hecho que $\alpha \supset \beta$

es una abreviación para $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

tenemos $h(\beta, k) = 1$

Así la regla de separación es fuertemente válida en K

(4) Para la regla de congruencia, sean α, β fórmulas, sean $h \in H$, $k \in K$

y supongamos que $h(\Box\alpha \equiv \Box\beta, k) = 0$

Para mostrar que la regla de congruencia es fuertemente válida en K, es suficiente mostrar que para algún $k' \in K$

$$h(\alpha \equiv \beta, k') = 0$$

Ahora como $h(\Box\alpha \equiv \Box\beta, k) = 0$

tenemos que considerar dos casos: el caso en que

$$h(\Box\alpha, k) = 1$$

mientras que $h(\Box\beta, k) = 0$

y el caso en que $h(\Box\alpha, k) = 0$

mientras que $h(\Box\beta, k) = 1$

Examinaremos el primer caso: el segundo es similar. Como

$$h(\Box\alpha, k) = 1$$

tenemos que $k \in N$

De aquí que como $h(\Box\beta, k) = 0$

hay un $k' \in K$

con $(k, k') \in R$

y tal que $h(\beta, k') = 0$

Pero como $h(\Box\alpha, k) = 1$

tenemos que $h(\alpha, k') = 1$

de modo que $h(\alpha \equiv \beta, k') = 0$

(5) Para la regla de substitución, sea α cualquier fórmu la construída a partir de variables proposicionales, y a las cuales podemos suponer sin ninguna pérdida de generalidad, como siendo las primeras n variables $p_1, \ldots, p_n$ en la secuencia fijada $\langle p_i \rangle_{i<\omega}$ de todas las variables proposicionales. Sea

$$\Sigma(\alpha)$$

una fórmula obtenida de α por la substitución de las variables $p_1, \ldots, p_n$ simultáneamente por las fórmulas $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivamente. Supongamos que

$$\Sigma(\alpha)$$

no es válida en K :queremos mostrar que α no es válida en K.

Como $\Sigma(\alpha)$ no es válida en K, existen

$$h \in H \quad , \quad k \in K$$

tales que $h(\Sigma(\alpha), k) = 0$

Sea $\langle \beta_i \rangle_{i<\omega}$ cualquier secuencia enumerable de fórmulas cuyos primeros n elementos son $\beta_1, \ldots, \beta_n$ y sea h' la asignación definida poniendo

$$h'(p_i, k') = h(\beta_i, k')$$

para todo $i<\omega$ y todo $k' \in K$.

Usamos la letra h' para representar también la única evaluación que es una extensión de la asignación g. Ahora por una parte es claro que como $h \in H$ y H es cerrado, tenemos que $h' \in H$.

Por otra parte se puede verificar por una inducción en la longitud de α que para todos los $k' \in K$,

$$h'(\alpha, k') = h(\Sigma(\alpha), k') .$$

Así en particular, $h'(\alpha, k) = h(\Sigma(\alpha), k) = 0$

de modo que α no es válida en K .

(6) Queda por mostrar que si K es completa entonces la regla de substitución no es fuertemente válida en K . Sea p cualquier variable proposicional fija, y sea h cualquier asignación en el marco

$$(K, N, R)$$

tal que para todo $k \in K$, $h(p, k) = 1.$

Entonces tenemos $h(\neg p, k) = 0$

para todo $k \in K$

aunque la fórmula $\neg p$

es un ejemplo de substitución de p

<u>Corolario 3.2</u>

Sea $\mathcal{K} = (K, N, R, H)$ cualquier modelo relacional. Entonces el conjunto de todas las fórmulas que son válidas en $\mathcal{K}$ es una lógica modal regular.

<u>Demostración</u>

Es inmediata a partir de la observación 3.1 y la definición de una lógica modal regular.

Estos resultados deberían compararse con la observación 2.1 del capítulo previo. Si A es un álgebra modal, entonces el conjunto de todas las fórmulas que son válidas en A es una lógica modal autocongruente, pero en general no es una lógica modal regular. Mientras los modelos relacionales siempre dan validez a la fórmula $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$
las álgebras modales no lo hacen así. Así las álgebras modales son un poco más generales que los modelos relacionales, y esto sugiere la cuestión siguiente.

Cuestión 3.3

¿Podemos generalizar el concepto de un modelo relacional, de tal modo que el conjunto de todas las fórmulas que son válidas en un modelo relacional dado, sea siempre una lógica modal autocongruente, aunque no siempre sea regular?

Nuestro propósito principal es ahora mostrar que cada lógica modal regular consistente S tiene un modelo relacional característico: es decir, un modelo relacional X tal, que para cada fórmula α , $\alpha \in S$, si y solamente si α es válida en X. Para establecer este resultado necesitamos algunas construcciones y lemas.

Sea S cualquier lógica modal autocongruente. Como en el capítulo 2, decimos que S es consistente si no hay una fórmula α tal que tanto $\alpha \in S$ como $\neg\alpha \in S$.
Generalizando más, si S es una lógica modal autocongruente y X es un conjunto arbitrario de fórmulas, diremos que X es consistente módulo S si no hay fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in X$ tales que $\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in S$.
Decimos que un conjunto X de fórmulas es un ultraconjunto módulo S

si: X es consistente módulo S y también, para cada conjunto Y de fórmulas, si $X \subseteq Y$ y Y es consistente módulo S entonces $X = Y$

En otras palabras, un ultraconjunto módulo S es un elemento máximo de la clase de todos los conjuntos que son consistentes módulo S. Los ultraconjuntos son análogos sintácticos de los ultrafiltros; específicamente, se puede verificar que si S es una lógica modal autocongruente y X es un ultraconjunto de S, entonces el conjunto de las clases de equivalencia de elementos de X, con respecto a la relación de equivalencia módulo S definida en la prueba del teorema 2.2, es un ultrafiltro del álgebra de Lindenbaum $|S|$ de S.

Lema 3.4

Sea S una lógica modal autocongruente cualquiera y sea X cualquier conjunto de fórmulas. Si X es consistente módulo S, entonces hay un ultraconjunto Y módulo S tal que

$$X \subseteq Y$$

Demostración

Resulta claro que la clase de todos los conjuntos Y de fórmulas tales que tanto $X \subseteq Y$ como Y es consistente módulo S, es parcialmente ordenada por inclusión de conjuntos. Si X es consistente módulo S, entonces la clase no es vacía. Más aún, la unión de cualquier subcadena de la clase es en sí misma un elemento de la clase. Así, por el lema de Zorn si X es consistente módulo S, la clase tiene un elemento máximo Y . Claramente Y satisface las condiciones del lema. Notemos de paso que como el conjunto de todas las fórmulas es recursivamente enumerable, es posible reemplazar el presente argumento por otro, algo más largo, que no utiliza ninguna de las formas del axioma de elección.

Corolario 3.5

Sea S cualquier lógica modal autocongruente consistente. Entonces existe por lo menos un ultraconjunto módulo S.

Demostración

Se sigue de las definiciones que si S es una lógica modal autocongruente, entonces S es consistente si y solamente si es consistente módulo S. Esto nos permite aplicar el lema 3.4 •

Los ultraconjuntos de lógicas modales autocongruentes se comportan bien con respecto a todos los operadores clásicos. El lema siguiente puede ser verificado usando argumentos familiares de la teoría de ultraconjuntos de la lógica clásica.

Lema 3.6

Sea S cualquier lógica modal autocongruente y sea X cualquier ultraconjunto módulo S. Entonces para todas las fórmulas α, β tenemos:

(1) $\neg\alpha \in X$ si y solamente si $\alpha \notin X$

(2) $(\alpha \wedge \beta) \in X$ si y solamente si $\alpha \in X$ y $\beta \in X$

(3) Si $\alpha \in X$ y $(\alpha \supset \beta) \in X$ entonces $\beta \in X$

(4) $S \subseteq X$

El próximo lema se aplica solamente a las lógicas modales regulares, y no a todas las lógicas modales autocongruentes en general. Describe el comportamiento de los ultraconjuntos con respecto al operador modal.

Lema 3.7 (Makinson, Scott)

Sea S cualquier lógica modal regular. Sea X cualquier ultraconjunto módulo S que satisface la condición de que $\Box\alpha \in X$ para alguna fórmula α. Sea β cualquier fórmula tal que $\neg\Box\beta \in X$. Sea Y el conjunto formado por $\neg\beta$ y todas **las fórmulas** α tales que $\Box\alpha \in X$. Entonces Y es consistente módulo S.

Verificación

Supongamos por reducción al absurdo que Y no es consistente módulo S. Entonces hay fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n \geq 0)$ tales que $\Box\alpha_i \in X$ para cada $i \leq n$, y tales que

$$\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta) \in S$$

Como X contiene por lo menos una fórmula de la forma $\Box\alpha$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n \geq 1$

Ahora como $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta) \in S$ y como S es una lógica modal regular, tenemos

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \supset \beta \in S .$$

Pero también, como S es una lógica modal regular sabemos, por la observación 1.5 del capítulo 1, que S es cerrada con respecto a monotonía . Así tenemos $\Box(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \supset \Box\beta \in S$ de modo que por regularidad $(\Box\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Box\alpha_n) \supset \Box\beta \in S$.

Pero por el lema 3.6, $S \subseteq X$ y así tenemos que

$$(\Box\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Box\alpha_n) \supset \Box\beta \in X$$

De aquí que como cada una de las $\Box\alpha_1, \ldots, \Box\alpha_n$ es un elemento de X, tenemos por el lema 3.6 que $\Box\beta \in X$

Como también por hipótesis $\neg\Box\beta \in X$, el conjunto X no es consistente módulo S, lo cual contradice la hipótesis de que X es un ultraconjunto módulo S.

Teorema 3.8

Sea S cualquier lógica modal regular consistente. Entonces hay un modelo relacional, cuyo conjunto tiene como máximo la cardinalidad del continuo y que caracteriza a S.

Demostración

Construimos un modelo relacional $\|S\| = (K, N, R, H)$ llamado el modelo relacional canónico para S, y verificamos que tiene las propiedades deseadas.

Definimos K como la clase de todos los ultraconjuntos módulo S, y definimos N como la clase de todos los ultraconjuntos X módulo S tales que para alguna fórmula α, $\Box\alpha \in X$. Definimos la relación R poniendo $(X,Y) \in R$ donde $X, Y \in K$ y si solamente si para cada fórmula β, si $\Box\beta \in X$ entonces $\beta \in Y$. Como por hipótesis la lógica S es consistente, tenemos por el corolario 3.5 que K no es vacía, de modo que la estructura (K ,N ,R) es un marco relacional: lo llamaremos el marco relacional canónico para S. Como hay solamente un número numerable de fórmulas, el conjunto K tiene la cardinalidad del continuo, como máximo. Debemos ahora definir un conjunto H adecuado de evaluaciones en el marco.

Sea $h_0 : F \times K \longrightarrow \{1, 0\}$

la función definida poniendo $h_0(\alpha, X) = 1$

si $\alpha \in X$ y $h_0(\alpha, X) = 0$ si $\alpha \notin X$

para cada fórmula α y cada $X \in K$. Usando los lemas 3.4, 3,6, 3.7 podemos verificar que la función h_0 es una evaluación en el marco relacional (K, N, R): la llamaremos la <u>evaluación canónica</u>. Ahora definiremos H como el conjunto de todas las evaluaciones $h: F \times K \longrightarrow \{1,0\}$ tal que existe una secuencia $\langle \beta_i \rangle_{i<\omega}$ de fórmulas tales que para todo $i<\omega$ y todo $X \in K$

$$h(p_i, X) = h_0(\beta_i, X)$$

Para demostrar que la estructura (K, N, R, H) es un modelo relacional, es suficiente demostrar que el conjunto H de evaluaciones es cerrado. Es claro que $h_0 \in H$ y así H no es vacío. Sean h, h' evaluaciones en el marco (K,N,R) y supongamos que existe una secuencia $\langle \gamma_j \rangle_{j<\omega}$ de fórmulas tales que para todo $j<\omega$ y todo $X \in K$

$$h'(p_j, X) = h(\gamma_j, X) \qquad (1)$$

Supongamos que $h \in H$: debemos mostrar que $h' \in H$. Ahora como $h \in H$, tenemos por la definición de H, que existe una secuencia $\langle \beta_i \rangle_{i<\omega}$ de fórmulas tales que para todo $i<\omega$ y todo $X \in K$

$$h(p_i, X) = h_0(\beta_i, X) \qquad (2)$$

Ahora para cada $j<\omega$ sea $\Sigma(\gamma_j)$ la fórmula obtenida a partir de γ_j por la substitución de las variables proposicionales p_i por las fórmulas β_i para todo $i<\omega$ En símbolos, definimos $\Sigma(\gamma_j)$ como sigue:

$$\Sigma(\gamma_j) = \underset{i<\omega}{\mathrm{Sub}} : p_i \longrightarrow \beta_i \, (\gamma_j) \qquad (3)$$

Sigue de (2) y (3), por una inducción en la longitud de la fórmula γ_j que para cada $j<\omega$ y cada $X \in K$

$$h(\gamma_j, X) = h_0(\Sigma(\gamma_j), X)$$

y de esto juntamente con (1) tenemos, para todo $j<\omega$

y todo $x \in K$,

$$h'(p_j, x) = h_o(\Sigma(\gamma_j), x)$$

y así por la definición de H, tenemos $h' \in H$. Esto completa la verificación de que el conjunto H de evaluaciones es cerrado, y así completa también la verificación de que la estructura $\|S\| = (K, N, R, H)$ es un modelo relacional. Queda por demostrar que $\|S\|$ es característico para S.

Sea α una fórmula cualquiera y supongamos que $\alpha \notin S$: queremos demostrar que α no es válida en $\|S\|$. Como $\alpha \notin S$ el singleton $\{\neg\alpha\}$ es consistente módulo S, de modo que por el lema 3.4 hay un ultraconjunto X módulo S con $\neg\alpha \in X$. Como $\neg\alpha \in X$ tenemos por el lema 3.6 que $\alpha \notin X$ de modo que por la definición de la función h_o tenemos que $h_o(\alpha, X) = 0$ Así existen $h_o \in H$, $X \in K$ tales que $h_o(\alpha, X) = 0$ de modo que α no es válida en $\|S\|$.

Para la recíproca, supongamos que α no es válida en $\|S\|$: queremos demostrar que $\alpha \notin S$. Como α no es válida en $\|S\|$ existen $h \in H$, $Y \in X$ tales que

$$h(\alpha, Y) = 0 \tag{4}$$

Por la definición del conjunto H, hay una secuencia $\langle\beta_i\rangle_{i<\omega}$ de fórmulas tales que para todo $i<\omega$ y todo $Z \in K$

$$h(p_i, Z) = h_o(\beta_i, Z) \tag{5}$$

Definimos $\Sigma(\alpha)$ como la fórmula obtenida de α substituyendo las variables proposicionales p_i por las fórmulas β_i para todo $i<\omega$. En símbolos, definimos $\Sigma(\alpha)$ como sigue:

$$\Sigma(\alpha) = \underset{i<\omega}{\mathrm{Sub}} : p_i \longrightarrow \beta_i\ (\alpha) \tag{6}$$

Sigue de (5) y (6), por una inducción en la longitud de la fórmula α , que para todo $Z \in K$

$$h(\alpha, Z) = h_0(\Sigma(\alpha), Z)$$

de modo que en particular, $h(\alpha, Y) = h_0(\Sigma(\alpha), Y)$
y así, usando (4), tenemos $h_0(\Sigma(\alpha), Y) = 0$
Entonces por la definición de la función h_0 tenemos que
$\Sigma(\alpha) \notin Y$. De aquí, como Y es un ultraconjunto módulo S, sigue por el lema 3.6 que $\Sigma(\alpha) \notin S$. Pero como S es una lógica modal regular, es cerrada con respecto a substitución. Entonces como $\Sigma(\alpha) \notin S$, tenemos que $\alpha \notin S$. Esto completa la prueba del teorema

Los modelos característicos dados por el teorema 3.8 tienen como máximo la cardinalidad del contínuo. También es pasible obtener modelos característicos que son como máximo enumerables. Para realizar esto, notemos primero que resulta del lema 3.4 y del axioma de elección que para cada lógica modal autocongruente S existe una función $X \longrightarrow X^+$ que torna cada conjunto X de fórmulas que sea consistente módulo S, en un ultraconjunto X^+ módulo S, con $X \subseteq X^+$. En realidad, como el conjunto de todas las fórmulas es recursivamente enumerable, aún esta forma reforzada del lema 3.4 puede ser establecida sin apelar al axioma de elección o a cualquier principio infinitístico equivalente. Ahora, en lugar de tomar a K como la clase de <u>todos</u> los ultraconjuntos módulo S, lo podemos definir como la menor clase de ultraconjuntos módulo S tal que:

(1) Para cada fórmula α , si $\alpha \notin S$ entonces $\{\neg\alpha\}^+ \in K$,

(2) Si $X \in K$, y existe una fórmula α con $\Box\alpha \in X$, entonces para cada fórmula β , si $\neg\Box\beta \in X$ entonces $Y^+ \in K$ donde $Y = \{ \gamma : \gamma = \neg\beta \text{ o } \Box\gamma \in X \}$

De esta definición se sigue que K es finita o enumerable. Es posible continuar hasta el fin el resto de la prueba del teorema 3.8, con sólo cambios menores, para obtener un modelo relacional basado en este conjunto K, que caracteriza a S .

Hemos usado la construcción descripta en la prueba del teorema 3.8, aún cuando no nos da la más baja cardinalidad que sea posible tener, porque parece tener interés por derecho propio. En particular, el modelo relacional canónico $\|S\|$ de S definido en la prueba del teorema 3.8, depende solamente de la lógica S, mientras que el modelo característico más pequeño para S depende también de la función $X \longrightarrow X^{+}$.

El teorema 3.8 también sugiere una cuestión que, por lo menos en el conocimiento del autor, aún no ha sido resuelta.

Cuestión 3.9

Para cada lógica modal regular S hay un modelo relacional completo que caracteriza a S ?

Saul Kripke, 1967 ha obtenido una respuesta parcial a esta cuestión. Ha construido una lógica modal regular S que tiene entre sus tesis la fórmula

$$\alpha = \Box \{\Box (p \supset \Box p) \supset \Box p\} \supset \{\Diamond \Box p \supset \Box p\}$$

y ha demostrado, en una prueba no publicada, que α no es válida en la compleción del modelo relacional canónico de S. Este resultado sugiere que la respuesta a la cuestión 3.9 es probablemente negativa.

Dada una fórmula particular cualquiera, podemos preguntar qué condiciones debe satisfacer un modelo relacional para que la fórmula sea válida en el modelo. Las observaciones 3.10 y 3.11 nos dan algunos ejemplos. Observemos que la 3.10 es más fuerte que la 3.11.

Observación 3.10

Sea (K, N, R, H) cualquier modelo relacional. Entonces el modelo satisface una condición de la siguiente lista si y solamente si la fórmula correspondiente es válida en el modelo.

Condición I: $N = K$

Fórmula I: $\Box(p \vee \neg p)$

Condición 2 : Para todo $k \in K$, si $k \in N$ entonces existe un $k' \in K$ tal que $(k, k') \in R$

Fórmula 2 : $\neg \Box (p \wedge \neg p)$

Verificación Parcial

Consideramos, como ejemplo, la condición (1) y la fórmu la (1).

Supongamos primero que $\Box(p \vee \neg p)$ no es válida en K. Entonces hay un $h \in H$, $k \in K$ tal que

$$h(\Box(p \vee \neg p), k) = 0$$

De aquí que o bien $k \notin N$ o existe un $k' \in K$ con $(k, k') \in R$ tal que $h(p \vee \neg p, k') = 0$

Pero por la observación 3.1 esto último es imposible. Por consiguiente $k \notin N$ y entonces $N \neq K$.

Para la recíproca, supongamos que $N \neq K$. Entonces existe un $k \in K$ tal que $k \notin N$.

Como H no es vacío, hay un $h \in H$ y claramente

$$h(\Box\alpha, k) = 0$$

para toda fórmula α , de modo que en particular

$$h(\Box(p \vee \neg p), k) = 0$$

y así la fórmula $\Box(p \vee \neg p)$ no es válida en K.

Observación 3.11

Sea (K, N, R, H) cualquier modelo relacional. Entonces si el modelo satisface una condición n de la lista siguiente, la fórmula n correspondiente es válida en el modelo. También, si el modelo es completo y si una fórmula n de la siguiente lista es válida en el modelo entonces el modelo satisface la condición n correspondiente.

Condición 3: Para todo $k \in K$, si $k \in N$ entonces $(k, k) \in R$

Fórmula 3: $\Box p \supset p$

Condición 4: Para todo $k, k', k'' \in K$, si $k, k' \in N$ y $(k, k') \in R$ y $(k', k'') \in R$ entonces

$$(k, k'') \in R$$

Fórmula 4: $\Box p \supset \Box (\Box (q \vee \neg q) \supset \Box p)$

Condición 5: Para todo $k, k' \in K$ si $k, k' \in N$ y $(k, k') \in R$ entonces $(k', k) \in R$

Fórmula 5 : $p \supset (\Box (q \vee \neg q) \supset \Box \Diamond p)$

Verificación Parcial

Consideramos, como ejemplo, la condición (3) y la fórmula (3). Las verificaciones para las otras condiciones y fórmulas son análogas.

Supongamos primero que $\Box p \supset p$ no es válida en K. Entonces hay un $h \in H$ y un $k \in K$ tales que

$$h(\Box p \supset p , k) = 0$$

Entonces $h(\Box p, k) = 1$ y $h(p, k) = 0$

Como $h(\Box p, k) = 1$ tenemos que $k \in N$ y también que para cada $k' \in K$ con $(k, k') \in R$, $h(p, k') = 1$

Entonces como $h(p, k) = 0$, $(k, k) \notin R$ de modo que el modelo no satisface la condición (3).

Supongamos para la"recíproca" que el modelo no satisface la condición (3) y que el modelo es completo: queremos mostrar que la fórmula $\Box p \supset p$ no es válida en el modelo. Como el modelo no satisface la condición (3) existe un $k \in N$ con $(k, k) \notin R$.
Sea h cualquier asignación tal que h(p,k) = 0 mientras que

$$h(p, k') = 1$$

para todo $k' \in K$ tal que $(k, k') \in R$.

Como $(k, k) \notin R$

una tal asignación existe. Usamos la misma letra h para designar la única evaluación en el marco (K, N, R) que es una extensión de esta asignación. Ahora es claro que

$$h(\Box p, k) = 1$$

mientras que $h(p, k) = 0$

de modo que $h(\Box p \supset p, k) = 0$

Pero como el modelo es completo , $h \in H$. Entonces la fórmula $\Box p \supset p$ no es válida en el modelo.

Los resultados contenidos en la observación 3.11 pueden ser extendidos indefinidamente. Para cada fórmula α podemos encontrar una condición tal que la fórmula y la condición estén vinculadas por la relación indicada en la observación 3.11. Sin embargo, aquí se deben hacer dos advertencias. En primer lugar, no es el caso de que para cada condición referente a modelos relacionales existe una fórmula tal que la fórmula y la condición se encuetran en la relación indicada en la observación 3.11. Tomemos por ejemplo la condición de que la relación del modelo no sea reflexiva. Si α es una fórmula y K = (K, N, R, H) es un modelo relacional en el cual α no es válida, podemos siempre encontrar otro modelo relacional K' = (K', N', R', H') con solamente un elemento más que K cuya relación Ṙ' no es reflexiva, y en el cual α no es válida. La segunda advertencia es que la siguiente cuestión permanece todavía abierta, y en la opinión del autor, su respuesta es probablemente negativa.

Cuestión 3.12

¿Existe para cada fórmula α una condición tal que la fórmula y la condición se encuentren en la relación indicada en la observación 3.10?

Decimos que un modelo relacional K = (K, N, R, H) es normal si N=K. Se deduce inmediatamente de la observación 3.10 y el corolario 3.2 que:

Observación 3.13

Un modelo relacional es normal si y solamente si el conjunto de todas las fórmulas válidas en él es una lógica modal normal.

Cuando restringimos nuestra atención a los modelos relacionales normales, podemos simplificar correspondencias como las expresadas en la observación 3.11. En particular, tenemos lo siguiente.

Observación 3.14

Sea (K, N, R, H) cualquier modelo relacional normal. Entonces si el modelo satisface una condición m^* de la siguiente lista, la fórmula correspondiente m^* es válida en el modelo. Más aún, si el modelo es completo y si una fórmula m^* de la lista es válida en el modelo, entonces el modelo satisface la condición m^* correspondiente.

Condición 3^* : La relación R es reflexiva en K

Fórmula 3^* : $\Box p \supset p$

Condición 4^*: La relación R es transitiva en K

Fórmula 4^* : $\Box p \supset \Box\Box p$

Condición 5^* : La relación R es simétrica en K

Fórmula 5^* : $p \supset \Box\Diamond p$

Verificación.

Es inmediata a partir de la observación 3.11 y la primera parte de la observación 3.10.

Corolario 3.15

Las lógicas modales R, N, T, S4, B, S5 son distintas unas de otras.

Verificación Parcial

Es fácil construir pequeños modelos relacionales finitos que, en virtud de 3.1, 3.10 y 3.14, dan validez a todas las tesis de una lógica, pero no a todas las tesis de otra. Consideremos por ejemplo las lógicas modales S4 y S5. A partir de sus definiciones en el capítulo 1 sabemos que

$$S4 \subseteq S5$$

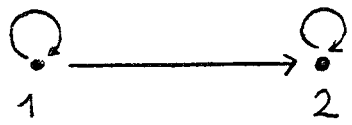
y por eso deseamos construir un modelo relacional en el cual todas las tesis de S4 son válidas, pero en el cual la fórmula

$$p \supset \Box\Diamond p$$

que es una tesis de S5, no es válida. Pongamos

$K = \{1, 2\}$, $N = K$, $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

Al marco (K, N, R) así definido se le puede dar un diagrama conveniente.



Ahora tomemos el modelo relacional completo en este marco. De las observaciones 3.1, 3.10, 3.14 y de la axiomatización de S4 dada en el primer capítulo se deduce que todas las tesis de S4 son válidas en este modelo. Pero también se deduce de la observación 3.14 que la fórmula

$$p \supset \Box \Diamond p$$

no es válida en el modelo.

Por supuesto, los resultados de independencia dados en el corolario 3.15 pueden también establecerse usando modelos algebraicos en lugar de modelos relacionales. Sin embargo los modelos relacionales que podemos usar son más pequeños y más fáciles de visualizar que sus contrapartidas algebraicas.

Ahora daremos un ejemplo del uso simultáneo de modelos algebraicos y relacionales, para establecer un resultado del autor: hay una lógica modal normal, que llamaremos T (ω) intermedia entre las lógicas T y S4, tal que ningún sistema axiomático para T (ω) que tenga substitución, separación y congruencia entre sus reglas de derivación, tiene la propiedad de modelos finitos.

Definimos a $T(\omega)$ como la lógica determinada por los axiomas:

todas las tautologías

$$\square(p \wedge q) \equiv (\square p \wedge \square q)$$

$$\square(p \vee \neg p)$$

$$\square p \supset p$$

$$(\square p \wedge \neg \square^2 p) \supset \Diamond(\square^2 p \wedge \neg \square^3 p)$$

y las reglas de derivación: substitución, separación, y congruencia. Aquí escribimos $\square^n$ como abreviatura para una secuencia de n cuadrados. Es claro que $T(\omega)$ es una lógica modal normal, con $T \subseteq T(\omega) \subseteq S4$

Sea μ la fórmula $\square p \supset \square^2 p$

Probemos nuestro teorema por medio de dos lemas.

<u>Lema 3.16 (Makinson)</u>

La fórmula μ no es una tesis de $T(\omega)$

<u>Demostración</u>

Construímos un modelo relacional infinito

$$K = (K, N, R, H)$$

en el cual todas las tesis de $T(\omega)$ son válidas, pero en el cual μ no es válida.

Sea K el conjunto de todos los números naturales 0,1,2,... y sea N=K. Si x, y son números naturales ponemos $(x, y) \in R$ si y solamente si $x \leq y + 1$.

Notemos que la relación R es reflexiva en K pero no es ni transitiva ni simétrica en K. Finalmente sea

$$K = (K, N, R, H)$$

el modelo relacional completo en el marco (K, N, R)

Sabemos de la observación 3.1 que cada tautología es válida en K, que la fórmula

$$\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$$

es válida en K, y que las reglas de substitución, separación, y congruencia son válidas en K. Sabemos de la observación 3.10 que como N = K, la fórmula $\Box(p \vee \neg p)$ es válida en K. Para mostrar que cada tesis de T (ω) es válida en K, queda por verificar que la fórmula

$$\alpha = (\Box p \wedge \neg \Box^2 p) \supset \Diamond (\Box^2 p \wedge \neg \Box^3 p)$$

es válida en K.

Supongamos por reducción al absurdo que α no sea válida en K. Entonces hay un $h \in H$ y un $x \in K$ tales que $h(\alpha, x) = 0$

Así:

$$h(\Box p, x) = 1 \quad \text{-------------} \quad (1)$$

$$h(\Box^2 p, x) = 0 \quad \text{-------------} \quad (2)$$

$$h(\Diamond(\Box^2 p \wedge \neg \Box^3 p), x) = 0 \quad \text{-------} \quad (3)$$

Como $(x, x+1) \in R$ tenemos de (3) que:

$$h(\Box^2 p \wedge \neg \Box^3 p, x+1) = 0 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (4)$$

y así ó

$$h(\Box^2 p, x+1) = 0 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (4.1)$$

ó bien

$$h(\Box^3 p, x+1) = 1 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (4.2)$$

Consideremos cada uno por separado y obtenemos una contradicción. Supongamos primero que (4.2) sea cierto. Ahora

$(x+1, x) \in R$

y entonces $h(\Box p, x) = 1$

lo que contradice (2). Supongamos por otra parte que (4.1) sea cierto. Entonces hay un y con

$$(x+1, y) \in R$$

es decir con $x \leq y$ tal que

$$h(\Box p, y) = 0$$

De aquí que existe un z con $(y, z) \in R$, es decir, con $y \leq z+1$, tal que

$$h(p, z) = 0$$

Pero como $x \leq y$ $\wedge$ $y \leq z+1$, tenemos que $x \leq z+1$
y así $(x, z) \in R$
De aquí que de (1) tenemos

$$h(p, z) = 1$$

lo cual nos da una contradicción. Así todas las tesis de $T(\omega)$ son válidas en el modelo K.

Para mostrar que la fórmula

$$\mu = \Box p \supset \Box^2 p$$

no es válida en el modelo K, sea h la asignación definida poniendo $h(p, 0) = 0$

mientras que $h(p, x) = 1$

para cada número natural $x > 0$.

Entonces es claro que $h(\Box p, 2) = 1$

mientras que $h(\Box^2 p, 2) = 0$

de modo que $h(\mu, 2) = 0$

y entonces , como $h \in H$

la fórmula μ no es válida en el modelo $\underline{K}$.

Lema 3.17 (Makinson)

Cada modelo algebraico finito que da validez a todas las tesis de T (ω) y a las reglas de substitución, separación y congruencia, da validez a la fórmula μ .

Demostración

Sea A cualquier modelo algebraico que da validez a todas las tesis de T (ω) y a las reglas de substitución, separación y congruencia, pero no da validez a la fórmula μ Deseamos demostrar que A es infinita.

Ahora en la enunciación de este lema, estamos usando el término "modelo algebraico" en el amplio sentido indicado en los comentarios que siguen a la observación 2.1 del capítulo 2. Pero también por estos comentarios, no hay pérdida de generalidad si suponemos que A es un álgebra modal

$$(A, -, \cap, *)$$

Como $T \subseteq T(\omega)$

y todas las tesis de T (ω) son válidas en A, tenemos por la observación 2.15 del capítulo 2 que A es un álgebra T. En otras palabras, tenemos que

$$*(a \cap b) = *a \cap *b \quad , \quad *1 = 1 \quad ,$$

y $\qquad * a \leq a$

donde a,b son elementos arbitrarios de A y donde 1 es el elemento unidad de A.

Como por hipótesis la fórmula μ no es válida en A, hay un homomorfismo h de las fórmulas, en A, tal que

$$h(\mu) \neq 1.$$

De aquí es claro que

$$h(\Box p) \neq h(\Box^2 p)$$

y entonces como $\quad * a \leq a$

para todo $\quad a \in A$

$$h(\Box^2 p) < h(\Box p)$$

Ahora supongamos como una hipótesis de inducción, que

$$h(\Box^{n+1} p) < h(\Box^n p)$$

donde $\quad n \geq 1 \quad$: deseamos mostrar que

$$h(\Box^{n+2} p) < h(\Box^{n+1} p)$$

Por la hipótesis de la inducción tenemos que

$$h(\Box^n p) \nleq h(\Box^{n+1} p)$$

de modo que

$$h(\Box^n p \wedge \neg \Box^{n+1} p) \neq 0$$

y entonces, como todas las fórmulas de la forma

$$(\Box \alpha \wedge \neg \Box^2 \alpha) \supset \Diamond(\Box^2 \alpha \wedge \neg \Box^3 \alpha)$$

son, por hipótesis, válidas en A,

$$h(\Diamond(\Box^{n+1}p \wedge \neg\Box^{n+2}p)) \neq 0$$

Pero como $*1 = 1$ tenemos que $-*-0 = 0$ y entonces $h(\Box^{n+1}p \wedge \neg\Box^{n+2}p) \neq 0$
de modo que

$$h(\Box^{n+1}p) \neq h(\Box^{n+2}p)$$

y entonces como $*a \leq a$ para todo $a \in A$

$$h(\Box^{n+2}p) < h(\Box^{n+1}p)$$

Así, por inducción tenemos

$$h(\Box p) > h(\Box^2 p) > h(\Box^3 p) > \ldots$$

y entonces cada uno de estos elementos de A es distinto. De aquí resulta que A tiene un número infinito de elementos y la prueba es completa.

<u>Teorema 3.18 (Makinson)</u>

Ninguna axiomatización de la lógica modal T (ω) que tiene entre sus reglas de derivación las de substitución, separación y congruencia, tiene la propiedad de modelos finitos.

<u>Demostración</u>

Por el lema 3.16 la fórmula $\mu = \Box p \supset \Box^2 p$

no es una tesis de T (ω). Pero por el lema 3.17 cualquier modelo algebraico finito que da validez a todos los axiomas y todas las reglas de derivación de una tal axiomatización de T (ω) también da validez a la fórmula μ.

Es posible dar a la lógica T (ω) una axiomatización Gödeliana, en la cual la regla de necesidad aparece en el lugar de la regla de congruencia (para terminología, ver los comentarios que siguen a la observación 1.11 del primer capítulo). En particular, podemos elegir como axiomas todas las tautologías, $\Box(p \wedge q) \supset (\Box p \supset \Box q)$, $\Box p \supset p$,
y $(\Box p \wedge \neg\Box^2 p) \supset \Diamond (\Box^2 p \wedge \neg \Box^3 p)$
y como reglas de derivación, las de substitución, separación y necesidad.

Teorema 3.19 (Makinson)

Ninguna axiomatización de la lógica modal T (ω) que tiene entre sus reglas de derivación las de substitución, separación y necesidad, tiene la propiedad de modelos finitos.

Esbozo de Verificación

Se puede verificar que si A es un modelo algebraico tal que todas las tesis de N, la menor entre las lógicas modales normales, son válidas en A, y también las reglas de substitución, separación y necesidad son válidas en A, entonces la regla de congruencia es válida en A. Esto nos permite aplicar los lemas 3.16 y 3.17.

Los teoremas 3.18 y 2.19 deberían ser comprobados con el resultado de Massey, mencionado después del corolario 2.9 del segundo capítulo, de que cualquier <u>lógica</u> proposicional que es cerrada con respecto a substitución, tiene la propiedad de modelos finitos. También deberían ser comparados con el resultado de Bull, mencionado en el mismo lugar, de que si S es cualquier lógica modal autocongruente con $S4.3 \subseteq S$, entonces cada axiomatización Gödeliana de S tiene la propiedad de modelos finitos. Es claro que hay una laguna entre el resultado positivo de Bull y nuestro resultado negativo, y las cuestiones siguientes permanecen abiertas.

<u>Cuestión 3.20</u>

Existe una lógica modal autocongruente S, con $S4 \subseteq S$ o con $B \subseteq S$ tal que alguna axiomatización Gödeliana de S no tenga la propiedad de modelos finitos?

<u>Cuestión 3.21</u>

Es decidible la lógica modal $T(\omega)$?

Si $T(\omega)$ es decidible, como parece sugerirlo la simplicidad de su axiomatización, entonces daría un ejemplo notable de lo incompleto de la técnica que usa la propiedad de modelos finitos para establecer la decidibilidad en la lógica modal. Algunas lógicas proposicionales decidibles con axiomatizaciones que no tienen la propiedad de modelos finitos han sido construidas por Harrop, pero sus ejemplos escapan al campo de la lógica modal, y además son algo "artificiales".

ADDENDA

RELACIONES ENTRE ALGEBRAS MODALES Y MODELOS RELACIONALES

Es posible establecer ciertas relaciones entre álgebras modales por una parte y modelos relacionales por la otra. Sin embargo, para lograr una teoría realmente elegante en este sentido, es conveniente modificar la definición de un modelo relacional, adoptando en particular una definición más fina de un conjunto cerrado de evaluaciones en un marco relacional.

Como antes, definimos un modelo relacional como una estructura (K, N, R, H) donde (K, N, R) es un marco relacional y donde H es un conjunto cerrado de evaluaciones en ese marco. Pero redefinimos el concepto de clausura. Diremos que un conjunto H de evaluaciones en el marco (K, N, R) es cerrado si satisface las dos condiciones siguientes:

(1) Para cada subconjunto finito J de K existe una evaluación $h \in H$, tal que para todos los

$$k, k' \in J \qquad \text{si} \quad k \neq k'$$

entonces hay una fórmula α con

$$h(\alpha, k) \neq h(\alpha, k')$$

(2) Para cada evaluación h en el marco (K, N, R) tenemos $h \in H$ si hay una secuencia

$$\langle h_i \rangle_{i<\omega}$$

de evaluaciones que son elementos de H, y una secuencia

$$\langle \alpha_i \rangle_{i<\omega}$$

de fórmulas, tal que para todo $i < \omega$ y todo $k \in K$

$$h(p_i, k) = h_i(\alpha_i, k)$$

Resulta claro que estas condiciones son más restrictivas que las dadas en el capítulo 3. Sin embargo, no es difícil verificar que todos los teoremas enunciados en el capítulo 3 son también ciertos para el concepto más restringido de un modelo relacional. Más aún, ahora podemos probar ciertos teoremas que vinculan modelos relacionales con álgebras modales.

Si $A = (A, -, \cap, *)$ es un álgebra modal regular y no trivial, definiremos la estructura

$$\Phi(A) = (K, N, R, H)$$

como sigue: K es el conjunto de todos los ultrafiltros de A, y N es el conjunto de todos aquellos ultrafiltros ∇ de A tales que existe por lo menos un

$$a \in A \qquad \text{con} \qquad *a \in \nabla .$$

R es la relación sobre K tal que para todos los ultrafiltros ∇, ∇' de A, $\quad (\nabla, \nabla') \in R$

si y solamente si para cada $a \in A$, si $*a \in \nabla$ entonces $a \in \nabla'$.

Definimos a H como el conjunto de todas las evaluaciones h en el marco relacional (K, N, R) tal que existe una secuencia

$$\langle a_i \rangle_{i < \omega}$$

de elementos de A tal que para todo $i < \omega$ y todo $\nabla \in K$

$$h(p_i, \nabla) = 1$$

si y solamente si

$$a_i \in \nabla$$

Recíprocamente, sea $\mathcal{K} = (K, N, R, H)$ cualquier modelo relacional, y definiremos

$$\Psi(\mathcal{K}) = (\mathcal{B}, -, \cap, *)$$

como sigue. $\mathcal{B}$ es el conjunto de todos los subconjuntos J de K tales que existe una $h \in H$ y una fórmula α con $J = \{ k \in K : h(\alpha, k) = 1 \}$

Definimos a $-$ y $\cap$ como las operaciones usuales en los subconjuntos de K. Definimos a $*$ como la operación unaria $* : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que para todo $J \in \mathcal{B}$, $*J = N \cap \{ k \in K :$ para todo $k' \in K$, si $(k, k') \in R$ entonces $k' \in J \}$

Entonces es posible probar los siguientes teoremas, que amplían resultados de Lemmon 1966 y de Jonsson y Tarski 1951.

<u>Teorema 4.1</u>

Sea $\mathcal{A}$ cualquier álgebra modal regular y no trivial. Entonces la estructura $\Phi(\mathcal{A})$ es un modelo relacional, más aún, para cada fórmula α, α es válida en $\mathcal{A}$ si y solamente si α es válida en $\Phi(\mathcal{A})$

<u>Observación 4.2</u>

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra modal regular y no trivial, y si $\mathcal{A}$ es finita con 2^n elementos, entonces el modelo relacional $\Phi(\mathcal{A})$ es completo y su conjunto subyacente tiene n elementos.

<u>Teorema 4.3</u>

Sea $\mathcal{K} = (K, N, R, H)$ cualquier modelo relacional. Entonces $\Psi(\mathcal{K})$ es un álgebra modal regular y no trivial, y además para cada fórmula α, α es válida en K si y solamente si α es válida en $\Psi(K)$.

Observación 4.4.

Si K es un modelo relacional finito con n elementos, entonces K es completo y además el álgebra modal $\Psi(K)$ tiene 2^n elementos.

Teorema 4.5

Sea A cualquier álgebra modal regular y no trivial. Entonces A es isomórfica a $\Psi(\Phi(A))$.

En vista de estos resultados de tan amplio alcance, la definición modificada de modelo relacional parece ser más interesante que la utilizada en el capítulo 3.

GUIA PARA LA BIBLIOGRAFIA

Pueden encontrarse introducciones generales a la lógica modal, desde el punto de vista del lógico más que el del matemático, en Prior 1955 y en las primeras secciones de Hughes y Cresswell 1968. Este último trabajo se ocupa ampliamente del tema y contiene una extensa bibliografía.

Quine 1947, 1953, 1960, 1966 discute cuestiones filosóficas asociadas a la lógica modal, Barcan 1962, 1967 presenta un punto de vista bastante diferente del de Quine. Entre muchos otros trabajos que discuten el tema, mencionaremos a Kneale 1962, Kneale y Kneale 1962, Makinson 1966b.

Los estudios más amplios sobre lógicas modales realizados desde un punto de vista axiomático son los de Hughes y Cresswell 1968 y Feys 1965. Para la aplicación de los métodos de Gentzen en lógica modal, ver Schutte 1969, Ohnishi 1961, Ohnishi y Matsumoto 1957, 1959.

Los libros de Rieger 1967 y Rasiowa y Sikorski 1963 tratan del uso de técnicas algebraicas en lógica. Este último trabajo contiene además un estudio de álgebras S4. En los artículos de McKinsey y Tarski se puede encontrar más material sobre álgebras modales. En Halmos 1962 hay un estudio de las álgebras S5.

Las referencias fundamentales sobre la propiedad de modelos finitos para lógicas proposicionales se encuentran en

Harrop 1958, 1965. Nuestra terminología es diferente de la de Harrop, pero hemos seguido sus ideas. También son importantes para la propiedad de modelos finitos Anderson 1968 y el artículo próximo a aparecer de Massey.

Los modelos relacionales fueron introducidos por Kripke 1959, 1963, 1963 a, 1965, 1965a y han sido también estudiados por Makinson 1966, Lemmon 1966, Lemmon y Scott 1966, Cresswel 1967, 1967a, 1968, Segerberg 1969, y otros.

BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA

JSL = Journal of Symbolic Logic

NDJ = Notre Dame Journal of Formal Logic

ZHL = Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik

ANDERSON, J

1968 - Concerning the finite model property for propositional calculi. Proc. Amer. Math. Soc. 19, 1207-1210

BARCAN, R

1962 - Interpreting quantification. Inquiry 5, 252-259.

1967 - Essentialism in modal logic. Nous 1, 91-96.

BIRKHOFF, G.

1967 - Lattice Theory, third edition (American Mathematical Society Publications).

BULL, R

1965 - An algebraic study of Diodorean modal systems JSL 30, 58-64.

1965a - A class of extensions of the modal system S4 with the finite model property ZML 11, 127-132.

1966 - That all normal extensions of S4.3 have the finite model property. ZML 12, 341-344.

CRESSWELL, M

1967 - A Henkin completeness theorem for T. NDJ 8, 186-190.

1967a – Alternative completeness theorems for modal systems. NDJ 8, 339-345.

1968 – Some proofs of relative completeness. NDJ 9, 62-66.

DUGUNDJI, J.

1940 – Note on a property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions. JSL 5, 150-151.

FEYS, R.

1965 – Modal Logics (Nauwelaerts, Louvain)

HALMOS, P.

1962 – Algebraic Logic (Chelsea Publishing Co. New York).

HARROP, R.

1958 – On the existence of finite models and decision procedures for propositional calculi. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 54, 1-13.

1965 – Some structure results for propositional calculi, JSL 30, 271-292.

JONSSON, B. and TARSI, A.

1951 – Boolean algebras with operators. American J. of Mathematics 73, 891-939.

KNEALE, W.C.

1962 – Modality de dicto and de re. Logic, Methodology, and Philosophy of Science (Stanford) 622-633.

KNEALE, W.C. and KNEALE, M.

1962 - The Development of Logic (Oxford University Press)

KRIPKE, S.

1959 - A completeness theorem in modal logic. JSL 24, 1-14.

1963 - Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi, ZML 9, 67-96.

1963a - Semantical considerations an modal logic. Acta Philosophica Fennica 16, 83-94.

1965 - Semantical analysis of modal logic II. Non-normal modal propositional calculi. The Theory of Models, ed. J.W. Addison, L. Henkin, A. Tarski-(North Holland Publishing Co., Amsterdam).

1965a - Semantical analysis of intuitionistic logic I. Formal Systems and Recursive Functions, ed. J.N. Crossley and M. Dummett (North Holland Publishing Co., Amsterdam).

1967 - review of Lemmon 1966. Mathematical Reviews 34, reviews 5660-5661.

LEMMON, E.

1966 - Algebraic semantics for modal logics I, II, JSL 31, 46-65 and 191-218.

LEMMON, E. and SCOTT, D.

1966 - Intensional Logics: preliminary draft of a forthcoming book, mimeographed by the Mathematics Department, Stanford University, U.S.A. in July 1966.

LEWIS, C.I. and LANGFORD, C.H.

1931 - Symbolic Logic (New York. Second edition, Dover Publications 1959).

McKINSEY, J.

1941 - A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4 with an application to topology. JSL 6, 117-134.

McKINSEY, J. and TARSKI, A.

1944 - The algebra of topology. Annals of Mathematics 45, 141-191.

1946 - On closed elements in closure algebras. Annals of Mathematics 47, 122-162.

1948 - Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. JSL 13, 1-15.

MAKINSON, D.

1966 - On some completeness theorems in modal logic. ZML 12, 379-384.

1966a - There are infinitely many Diodorean modal functions. JSL 31, 406-408.

1966b - How meaningful are modal operators? Australasian J. of Philosophy 44, 331-337.

1969 - A normal modal calculus between T and S4 without the finite model property. JSL 34, 35-38.

MASSEY, G.

A aparecer - On the finite model property. NDJ.

OHNISHI, M.

1961 - Gentzen decision procedures for Lewis' systems S2 and S3. Osaka Mathematical Journal 13, 125-137

OHNISHI, M. and MATSUMOTO, K.

1957 - Gentzen method in modal calculi I. Osaka Mathematical Journal 9, 113- 130

1959 - Gentzen method in modal calculi II, Osaka Mathematical Journal 11, 115-120.

PIERCE, R.S.

1968 - Introduction to the theory of abstract algebras. (Holt, Rinehart, Winston; New York).

PRIOR, A.N.

1955 - Formal Logic (Oxford University Press. Second edition 1961)

QUINE, W.

1947 - The problem of interpreting modal logic. JSL 12, 43-48.

1953 - Reference and modality, in From a Logical Point of View (Harvard University Press. Second edition 1961)

1960 - Word and Object (MIT Press, Cambridge Mass.)

1966 - The Ways of Paradox and other Essays (Random House, New York.)

RASIOWA, H. and SIKORSKI, R.

1963 - The mathematics of metamathematics (Warsaw).

RIEGER, L.

1967 - Algebraic Methods of Mathematical Logic (Academic Press, New York).

SCHUTTE, K.

1969 - Vollstandige Systeme modaler und intuitionische Logik (Springer: Lecture Notes in Mathematics).

SCROGGS, S.J.

1951 - Extensions of the Lewis system S5. JSL 16, 112-120

SEGERBERG, K.

1969 - Lectures on modal logic: notes mimeographed by the Department of Philosophy, University of California at Los Angeles, in June 1969.

SIKORSKI, R.

1964 - Boolean Algebras, Second edition (Springer)