

NOTAS DE LÓGICA MATEMÁTICA

31

LUISA ITURRIOZ

ALGEBRES DE HEYTING TRIVALENTES INVOLUTIVES

1974

INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA (\*)

N° 31

ALGEBRES DE HEYTING TRIVALENTES INVOLUTIVES

par

Luisa Iturrioz

1974

INSTITUTO DE MATEMATICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

---

(\*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada en parte por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

Je remercie notre cher Maître  
Antonio Monteiro -dévouement et  
enthousiasme- qui est toujours  
présent à la base de ce travail  
et de ma formation universitaire.

ALGÈBRES DE HEYTING TRIVALENTES INVOLUTIVES

Luisa Iturrioz

Thèse présentée à l'Université Nationale du Sud,  
Bahía Blanca, Argentina, décembre 1971.-

- P R E F A C E -

Les logiques Classique et Trivalente de Lukasiewicz admettent une symétrie, qui est donnée par sa propre négation. Moisil (1942) a étudié d'autres logiques qui possèdent une symétrie tout à fait analogue, laquelle est caractérisée par le fait d'être une transformation involutive qui renverse l'ordre donné par l'implication.

Une de ces logiques, précisément la logique Symétrique Générale, peut être caractérisée en ajoutant aux connectifs, axiomes et règles de la logique positive de Hilbert et Bernays un nouveau connectif -la négation-, deux axiomes schémas et une règle de déduction. Ces dernières traduisent justement les caractéristiques de la symétrie: le principe de la double négation et la règle de contraposition.

Il est bien connu que si aux axiomes du calcul

propositionnel intuitionist on ajoute l'axiome  
 T3-  $CCCprqCCCqpqq$  , on obtient le calcul propositionnel  
 trivalente de Heyting (1930) . Le présent travail porte  
sur l'étude d'un cas particulier du calcul propositionnel  
symétrique générale, celui qui s'obtient en ajoutant  
l'axiome T3- aux axiomes de Moisil.

Pour étudier ce système formel en faisant usage  
 de techniques algébriques nous commençons par définir la  
 notion d'algèbre de Heyting trivalente involutive.

Au premier paragraphe nous remarquons que les  
 algèbres de Heyting trivalentes involutives -étant une  
 classe particulière d'algèbres de Heyting trivalentes-  
 sont une généralisation des notions d'algèbres de Boole  
 involutives ou symétriques et celle d'algèbres de Luka-  
 siewicz trivalentes.

Nous introduisons la notion d'algèbre de Luka-  
 siewicz trivalente symétrique, qui sont des algèbres de  
 Lukasiewicz trivalentes munies d'un automorphisme invo-  
 lutif, en se donnant une caractérisation des algèbres de  
 Heyting trivalentes involutives à l'aide de ces structu-  
 res.

Une autre caractérisation des algèbres de Heyting trivalentes involutives est donnée au moyen de deux opérations unaires définies sur un treillis distributif ayant un plus petit et un plus grand élément. Ce résultat est utilisé dans la définition d'algèbres de Heyting trivalentes involutives d'ensembles, qui est l'exemple plus général, comme il en résulte en vertu d'un théorème de représentation du "type Stone" .

A continuation nous étudions les noyaux des homomorphismes et sa caractérisation au moyen de la notion de filtre. On introduit la notion d'implication faible, ce qui permet de donner une autre caractérisation des noyaux des homomorphismes et en conclure la semi-simplicité des structures considérées. Par rapport à cette implication le théorème de la déduction est satisfait.

En faisant usage des filtres premiers et de l'involution de Bialynicki-Birula et Rasiowa on indique une caractérisation des noyaux maximaux. Il existe quatre algèbres de Heyting trivalentes involutives simples, ayant deux, trois, quatre et neuf éléments; les trois premières sont des sous-algèbres de la quatrième et de plus nous

démontrons que toute algèbre de Heyting trivalente involutive ayant plus d'un élément est isomorphe à un sous-produit direct d'algèbres simples.

Quant à l'algèbre de Lindenbaum du calcul propositionnel étudié elle est l'algèbre de Heyting trivalente involutive libre ayant autant de générateurs comme variables d'énoncé. Par ailleurs l'algèbre de Heyting trivalente involutive simple ayant neuf éléments est précisément la matrice caractéristique finie du calcul considéré.

Nous indiquons les algèbres de Heyting trivalentes involutives engendrées par un système finie de générateurs libres et grâce au système déterminant de l'algèbre de Heyting trivalente involutive libre ayant un générateur nous donnons une construction, moyennant des ensembles, de l'algèbre de Heyting trivalente involutive libre.

Finalement, une classe particulière d'algèbres de Heyting trivalentes involutives -dites centrées- se caractérisent comme des anneaux qui sont isomorphes à un sous-produit direct de corps de Galois ayant neuf et



trois éléments. Une démonstration directe de ce résultat, -sans faire usage de l'axiome du choix- a été aussi réalisé, à l'aide d'une machine. Dans ce travail nous avons eu la gentille collaboration de M. Guy Tassart de l'Institut de Calcul de Grenoble.

Cette thèse a été effectuée sous la direction de M. Antonio Monteiro qui, avec M. Antonio Diego, a guidé et introduit précieuses suggestions dans la rédaction de cet exposé.

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

#### I- ALGEBRES DE MORGAN

Une application  $\sim$  d'un ensemble ordonné  $\Pi$  sur lui-même est dite une symétrie ou une involution sur

$\Pi$  si quels que soient les éléments  $x, y \in \Pi$  on a:

$$1- \sim \sim x = x$$

$$2- x \leq y \text{ si et seulement si } \sim y \leq \sim x$$

(G. Birkhoff, 1948, p.4).

Un système  $(A, \sim)$  est dit un treillis de Morgan si  $A$  est un treillis distributif et  $\sim$  une symétrie définie sur  $A$ . Dans ce cas  $\sim$  peut être caractérisée comme une opération unaire définie sur  $A$  telle que:

$$N1) \quad \sim \sim x = x$$

$$N2) \quad \sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$$

(Gr. Moisil, 1935, p.91 et J. Kalman, 1958).

Si le treillis de Morgan  $(A, \sim)$  possède un plus petit élément  $0$  il possède aussi un plus grand élément  $1 = \sim 0$ . Dans ce cas on dit que le système  $(A, \sim)$  est une algèbre Quasi-booléenne ou une algèbre de Morgan (A. Bialynicki-Birula et H. Rasiowa, 1957, et A. Monteiro, 1960).

L'opération  $\sim$  est dite un quasi-complément ou une négation de Morgan. De N1) et N2) nous tirons l'autre loi de Morgan

$$N'2) \quad \sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y .$$

Bialynicki-Birula et Rasiowa ont considéré la

transformation  $\varphi$  définie sur l'ensemble  $\Pi$  de tous les filtres premiers de l'algèbre de Morgan  $(A, \sim)$  de la façon suivante:

- si  $P$  est un filtre premier de  $A$ , alors  $\varphi(P) = C(\sim P)$  où  $C$  est le complémentaire par rapport à  $A$  et  $\sim P = \{ \sim p : \text{ou } p \in P \}$ .

Si  $P$  est un filtre premier de l'algèbre de Morgan  $(A, \sim)$  alors  $P$  est un idéal premier et  $C(\sim P)$  est un filtre premier. La transformation  $\varphi$  de  $\Pi$  sur  $\Pi$  est biunivoque et de plus:

$$1- \varphi(\varphi(P)) = P$$

$$2- P \subseteq Q \text{ si et seulement si } \varphi(Q) \subseteq \varphi(P),$$

c'est-à-dire  $\varphi$  est une symétrie sur l'ensemble  $\Pi$ .

Tout treillis distributif fini  $A$  est déterminé, à une isomorphie près, par l'ensemble ordonné  $\Pi$  de tous les filtres premiers de  $A$  (G. Birkhoff, 1937) et toute algèbre de Morgan finie  $(A, \sim)$  est déterminée, à une isomorphie près, par le couple  $(\Pi, \varphi)$ , où  $\varphi$  est l'involution de Bialynicki-Birula et Rasiowa (A. Monteiro, 1960, p.5 et 1962). Dans le cas fini tous les filtres premiers  $P$  sont principaux  $P = F(p)$ ; on peut donc iden-

tifier  $\Pi$  avec la famille de tous les éléments premiers de  $A$  et supposer que  $\varphi$  est définie sur l'ensemble des éléments premiers de  $A$ . Le couple  $(\Pi, \varphi)$  est dite le système déterminant de l'algèbre de Morgan. Pour tout  $x \in A$  la négation  $\sim$  est définie au moyen de  $(\Pi, \varphi)$  de la façon suivante:

$$\sim x = \bigvee_{\substack{p \in \Pi \\ \varphi(p) \not\leq x}} p$$

Une algèbre de Morgan  $(A, \sim)$  est dite normale ou de Kleene si pour tout  $x, y \in A$  on a:

$$N3) \quad (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y) = x \wedge \sim x$$

(J. Kalman, 1958, p.485 et Kleene, 1938, p.153 et 1952, p.334).

Dans une algèbre de Morgan normale la propriété N3) équivaut à celle suivante: pour tout filtre premier  $P$ , les filtres  $P$  et  $\varphi(P)$  sont comparables (Bialynicki-Birula et Rasiowa, 1958 et A. Monteiro, 1962).

La négation de Morgan  $\sim$  sur le treillis dis-

tributif  $A$  est dite une négation de Kalman-Kleene si elle satisfait à N3) et dans ce cas se note " - " .

## II- ALGÈBRES DE BOOLE INVOLUTIVES OU SYMÉTRIQUES

Les algèbres de Boole involutives constituent une classe particulière d'algèbres de Morgan. Elles sont des systèmes de la forme  $(A, \sim)$ , où  $A$  est une algèbre de Boole et  $\sim$  une négation de Morgan sur  $A$  (A. Monteiro, 1966, p.39 et 1969). Dans ce cas la transformation  $\alpha x = - \sim x$ , où  $-$  est le complément booléen sur  $A$ , est un automorphisme involutif de  $(A, \sim)$ , c'est-à-dire un automorphisme  $\alpha$  de  $(A, \sim)$  tel que  $\alpha(\alpha(x)) = x$  pour tout  $x \in A$ . Les algèbres de Boole involutives peuvent être aussi définies comme des systèmes  $(A, \alpha)$ , où  $A$  est une algèbre de Boole et  $\alpha$  un automorphisme involutif de  $A$ . De ce point de vue elles ont été considérées par Gr. Moisil, 1954, sous le nom d'algèbres de Boole symétriques.

### III- ALGÈBRES DE HEYTING INVOLUTIVES

En regardant le rôle que les symétries jouent dans les calculs propositionnels, Gr. Moisil, 1942, p.77 a considéré le calcul propositionnel symétrique général. Pour étudier ce calcul du point de vue de l'algèbre on introduit la définition suivante.

Une algèbre de Heyting involutive est un système  $(A, \sim)$ , où  $A$  est une algèbre de Heyting et  $\sim$  une négation de Morgan sur  $A$ .

Une algèbre de Heyting  $A$  est un treillis relativement pseudo-complémenté ayant un plus petit élément, autrement dit un treillis ayant un plus petit élément tel que pour chaque couple d'éléments  $a, b \in A$ , l'ensemble des  $x \in A$  qui vérifient  $a \wedge x \leq b$  admet un élément maximal, qu'on notera  $a \Rightarrow b$ .  $A$  est un treillis distributif ayant un plus petit élément  $0$  et un plus grand élément  $x \Rightarrow x = 1$ .

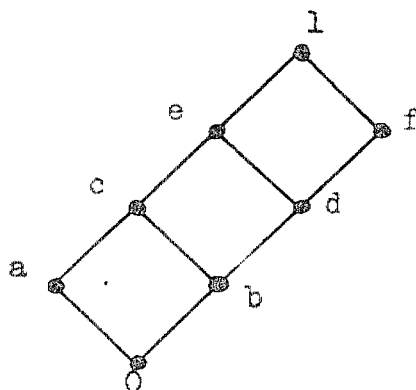
Comme un exemple d'algèbre de Heyting involutive nous pouvons considérer l'algèbre de Heyting  $A$  du diagramme donné, sur laquelle on définit l'opération  $\sim$

de la façon suivante:

$$\sim 0 = 1 ; \sim a = f ; \sim b = e ;$$

$$\sim c = d ; \sim d = c ; \sim e = b ;$$

$$\sim f = a ; \sim 1 = 0 .$$



Etant données deux algèbres de Heyting involutives  $(A, \sim)$  et  $(B, \sim)$  on dit qu'une application  $h$  de  $A$  dans  $B$  est un homomorphisme de  $(A, \sim)$  dans  $(B, \sim)$  si  $h$  est un homomorphisme en tant qu'algèbre de Heyting et si en outre  $h(\sim x) = \sim h(x)$ , pour tout  $x \in A$ .

L'homomorphisme  $h$  est un isomorphisme de  $(A, \sim)$  dans  $(B, \sim)$  si l'application  $h$  est biunivoque.

Un automorphisme de  $(A, \sim)$  est un homomorphisme de  $(A, \sim)$  sur elle-même. L'application identique  $e$  de  $(A, \sim)$  est l'automorphisme trivial. Un automorphisme de  $(A, \sim)$  est propre s'il n'est pas trivial.

Un automorphisme  $h$  de  $(A, \sim)$  est involutif si  $h(h(x)) = x$  pour tout  $x \in A$ ; autrement dit si  $h = h^{-1}$ .

Les notions de sous-algèbre d'une algèbre de Heyting involutive et de produit direct d'une famille



d'algèbres de Heyting involutives se définissent à la manière habituelle. Les images homomorphes des sous-algèbres sont aussi de sous-algèbres. Si  $(A, \sim)$  est le produit direct des algèbres involutives  $\{(A_i, \sim)\}_{i \in I}$ , les fonctions projections  $\Pi_i : (A, \sim) \longrightarrow (A_i, \sim)$  sont des homomorphismes de  $(A, \sim)$  sur les axes  $(A_i, \sim)$ .

Etant donnée une partie  $G$  d'une algèbre  $(A, \sim)$ , l'intersection  $(\bar{G}, \sim)$  de toutes les sous-algèbres de  $(A, \sim)$  contenant  $G$  est une sous-algèbre de  $(A, \sim)$ . On dit que  $G$  est un système de générateurs de  $(\bar{G}, \sim)$  et que  $(\bar{G}, \sim)$  est la sous-algèbre engendrée par  $G$ .

Si  $G$  est un ensemble fini et la sous-algèbre engendrée par  $G$  coïncide avec l'algèbre  $(A, \sim)$  on dit qu'elle est de type fini. Si  $h$  et  $h'$  sont deux homomorphismes de  $(A, \sim) \longrightarrow (B, \sim)$  qui coïncident sur  $G$  alors  $h = h'$  sur  $(\bar{G}, \sim)$ .

#### IV- ALGÈBRES DE HEYTING TRIVALENTES INVOLUTIVES

Revenant au problème des symétries dans les

calculs propositionnels nous allons considérer dans le présent travail un cas particulier du calcul propositionnel symétrique général de Gr. Moisil.

A cet égard nous allons introduire la notion d'algèbre de Heyting trivalente involutive, qui est une algèbre de Heyting involutive particulière.

Définition 1. Une algèbre de Heyting trivalente involutive (A.H.T.I.) est un système  $(A, \sim)$  où  $A$  est une algèbre de Heyting trivalente et  $\sim$  une négation de Morgan définie sur  $A$ .

Une algèbre de Heyting trivalente  $A$  est une algèbre de Heyting satisfaisant à la condition

$$T3- ((a \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow (((b \Rightarrow a) \Rightarrow b) \Rightarrow b) = 1$$

quels que soient  $a, b, c \in A$  (I. Thomas, 1962 et L. Monteiro, 1964, p.3)

Pour qu'une algèbre de Heyting  $A$  soit trivalente il faut et il suffit que tout filtre premier de  $A$  soit ou bien un filtre premier minimal ou bien un ultra-

filtre et que chaque filtre premier soit contenu dans un seul ultrafiltre; autrement dit, pour tout filtre premier  $P$  qui n'est pas un ultrafiltre, il existe un et un seul filtre propre  $U$  contenant  $P$  comme partie propre (L. Monteiro, 1964, p.7).

Dans une algèbre de Heyting trivalente involutive chaque ultrafiltre contient comme partie propre au plus un filtre premier. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors il existerait deux filtres premiers  $P, Q, P \neq Q$ , contenus comme partie propre dans un ultrafiltre  $U$ , c'est-à-dire (1)  $P \subset U$  et (2)  $Q \subset U$  alors (3)  $\varphi(U) \subset \varphi(P)$  et (4)  $\varphi(U) \subset \varphi(Q)$ , ce qui contredit le résultat précédent.

Dans une algèbre de Heyting trivalente involutive on a de plus:  $P$  est un filtre premier minimal si et seulement si  $\varphi(P)$  est un ultrafiltre. En effet, soit  $P$  un filtre premier minimal. Si  $\varphi(P)$  n'était pas un ultrafiltre il existerait un filtre premier  $U$  tel que  $\varphi(P) \subset U$ , alors  $\varphi(U) \subset \varphi\varphi(P) = P$  et  $P$  ne serait pas minimal. Inversement, soit  $\varphi(P)$  un ultrafiltre. Si  $P$  n'était pas minimal il existerait un filtre premier

$Q$  tel que  $Q \subset P$ , alors  $\varphi(P) \subset \varphi(Q)$  et  $\varphi(P)$  ne serait pas un ultrafiltre.

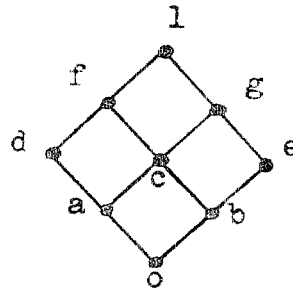
Une A.H.T.I. dont l'importance va se détacher plus tard est fournie par l'exemple suivant. Considérons l'algèbre de Heyting du diagramme donné. On définit l'opération  $\sim$  de la façon suivante:

(Gr. Moisil, 1942, p.95)

$$\sim 0 = 1 ; \sim a = f ; \sim b = g ;$$

$$\sim c = c ; \sim d = d ; \sim e = e ;$$

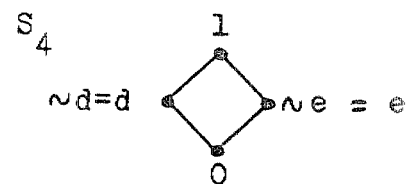
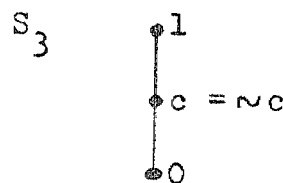
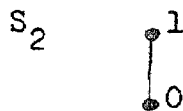
$$\sim f = a ; \sim g = b ; \sim 1 = 0 .$$



Soit  $S_9 = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$ . Le système

$(S_9, \sim)$  est une algèbre de Heyting trivalente involutive, dite l'algèbre  $S_9$ .

L'algèbre  $S_9$  possède trois sous-algèbres propres, dites les algèbres  $S_2, S_3, S_4$  dont les diagrammes sont donnés ci-dessous.



Si à la place de l'égalité T3- on considère

la suivante:

$$B- \quad (((b \implies a) \implies b) \implies b) = 1$$

on obtient, en particulier, les algèbres de Boole involutives ou symétriques.

Une autre classe particulière d'algèbres de Heyting trivalentes involutives est donnée par les algèbres de Lukasiewicz trivalentes. Elles peuvent être définies comme des systèmes  $(A, -)$  où  $A$  est une algèbre de Heyting trivalente et  $-$  une négation de Kalman-Kleene définie sur  $A$  (L. Monteiro, 1970, p.453). Dans ce cas la négation est déterminée d'une manière unique (R. Cignoli et A. Monteiro, 1965, p. 679) et pour cela le système  $(A, -)$  sera noté de façon abrégée par la lettre "A" .

En tenant compte de l'équivalence entre la théorie des algèbres de Boole involutives et celle des algèbres de Boole symétriques on va caractériser plus loin les algèbres de Heyting trivalentes involutives comme des algèbres de Lukasiewicz trivalentes munies d'un automorphisme involutif  $\alpha$  .

A cet égard on introduit la définition suivan-

te:

Définition 2. Une algèbre de Lukasiewicz trivalente symétrique est un système  $(A, \alpha)$  où  $A$  est une algèbre de Lukasiewicz trivalente et  $\alpha$  un automorphisme involutif de  $A$ .

Etant données deux algèbres de Lukasiewicz trivalentes symétriques  $(A, \alpha)$  et  $(B, \alpha)$  on dit qu'une application  $h$  de  $A$  dans  $B$  est un homomorphisme de  $(A, \alpha)$  dans  $(B, \alpha)$  si  $h$  est un homomorphisme en tant qu'algèbre de Lukasiewicz trivalente et si en outre  $h(\alpha x) = \alpha h(x)$ , pour tout  $x \in A$ .

---

#### V- REGLES DE CALCUL VARIABLES DANS UNE A.H.T.I.

Nous supposons connue la théorie concernant les algèbres de Heyting trivalentes. L'opération de négation intuitioniste  $\neg$  s'exprime au moyen de la formule:

$$\neg x = x \Rightarrow 0 .$$

Grâce à la négation intuitionniste  $\neg$  et à celle de Morgan  $\sim$  on définit l'opération  $\Gamma$  dite la négation faible:  $\Gamma x = \sim \neg \sim x$ .

Nous posons, pour abrégé:  $\nabla x = \neg \neg x$  et  $\Delta x = \sim \nabla \sim x = \Gamma \Gamma x$ .

Un élément  $x$  d'une A.H.T.I. est dit un invariant si  $\nabla x = x$ ; ceci équivaut à dire que  $\Delta x = x$ . Si  $k$  est un invariant alors  $\sim \neg k = \neg \sim k$ . Les éléments  $\neg x$  et  $\Gamma x$  sont invariants.

L'ensemble  $K$  de tous les invariants ordonnés d'une façon naturelle est une algèbre de Boole. D'après  $\nabla \sim \nabla x = \sim \nabla x$  on déduit que si  $x$  est un invariant il en est de même de  $\sim x$ . Le système  $(K, \sim)$  est donc une algèbre de Boole involutive.

Dans une A.H.T.I. sont valables les règles de calcul indiquées ci-dessous:

$$A1- \quad x \wedge \neg x = 0$$

$$A2- \quad x \vee \Gamma x = 1$$

A3-  $\neg x \leq \Gamma x$  (En général,  $x \vee \neg x \neq 1$ ,  $x \wedge \Gamma x \neq 0$ ,  $x \wedge \sim x \neq 0$ ,  $x \vee \sim x \neq 1$ ,  $\neg x \not\leq \sim x$ ,  $\sim x \not\leq \neg x$ ,  $\sim x \not\leq \Gamma x$ ,  $\Gamma x \not\leq \sim x$ ; il suffit de les vérifier sur l'algèbre  $S_9$ ).

- A4-  $\neg 0 = 1$  ;  $\neg 1 = 0$
- A5- Si  $x \leq y$  alors  $\neg y \leq \neg x$  ,  $\Gamma y \leq \Gamma x$  ,  $\sim y \leq \sim x$  .
- A6-  $\Delta x = \Gamma \Gamma x \leq x \leq \neg \neg x = \nabla x$
- A7-  $\nabla \neg x = \neg \neg \neg x = \neg x$
- A8-  $\Delta \Gamma x = \Gamma \Gamma \Gamma x = \Gamma x$
- A9-  $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$     A10-  $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$
- A11-  $\Gamma(x \wedge y) = \Gamma x \vee \Gamma y$     A12-  $\Gamma(x \vee y) = \Gamma x \wedge \Gamma y$
- A13-  $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$     A14-  $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$
- A15-  $\Delta(x \wedge y) = \Delta x \wedge \Delta y$     A16-  $\Delta(x \vee y) = \Delta x \vee \Delta y$
- A17-  $\neg x \vee \neg \neg x = 1$     A18-  $\neg x \wedge \neg \neg x = 0$
- A19-  $\Gamma x \wedge \Gamma \Gamma x = 0$     A20-  $\Gamma x \vee \Gamma \Gamma x = 1$
- A21-  $\neg \sim x \leq \sim \neg x$     A22-  $\Gamma \neg \neg x = \neg x$
- A23-  $\Gamma \neg x = \nabla x$     A24-  $\neg \Gamma x = \Delta x$
- A25-  $\sim \nabla x \leq \nabla \sim x$
- A26- Si  $\nabla x = \nabla y$  et  $\Delta x = \Delta y$  alors  $x = y$

(Principe de détermination de Moisil)

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux éléments distincts  $x$  et  $y$  tels que  $\nabla x = \nabla y$  et  $\Delta x = \Delta y$  . Si  $x \neq y$  il existe un filtre premier  $P$  tel que (1)  $x \in P$  et (2)  $y \notin P$  . Puisque  $x \leq \nabla x$   $\Delta y \leq y$  et  $P$  est un filtre, il en résulte que



(3)  $\nabla x = \nabla y \in P$  et (4)  $\Delta x = \Delta y \notin P$ .

Si  $P$  est minimal, de (1) on déduit (voir par exemple A. Monteiro, 1948) qu'il existe un (5)  $z \notin P$  tel que  $x \vee z = 1$ , alors  $\Delta(x \vee z) = \Delta x \vee \Delta z = \Delta 1 = 1$ , c'est-à-dire (6)  $\Delta x \vee \Delta z = 1 \in P$ . Puisque  $P$  est premier, de (6) et (4) on tire (7)  $\Delta z \in P$  et d'après  $\Delta z \leq z$  on a  $z \in P$  ce qui contredit (5).

Si  $P$  est maximal, de (2) on déduit qu'il existe un (8)  $p \in P$  tel que  $p \wedge y = 0$ , alors  $\nabla(p \wedge y) = \nabla p \wedge \nabla y = \nabla 0 = 0$ , c'est-à-dire (9)  $\nabla p \wedge \nabla y = 0$ . Puisque  $p \leq \nabla p$ , de (8) on a (10)  $\nabla p \in P$ . De (9) et (10) on tire (11)  $\nabla y \notin P$ , ce qui contredit (3).

Si  $y \not\leq x$  la démonstration est analogue.

Sauf quelques différences dans les notations cette démonstration est due à J.C. Varlet, 1968, p.405.

---

## VI- A.H.T.I. CENTREES

Parmi les A.H.T.I. on va remarquer les suivantes:

Définition 3. Une A.H.T.I. est dite centrée si elle possède un élément  $c$ , le centre, tel que

$$\nabla c = 1 \quad \text{et} \quad \Delta c = 0 .$$

Les images homomorphes d'une A.H.T.I. centrée sont aussi des A.H.T.I. centrées et une A.H.T.I. centrée ne peut pas admettre plus d'un centre.

Nous verrons plus tard le rapport qu'il existe entre les A.H.T.I. centrées et une classe particulière d'anneaux ayant élément unité.

-----oOo-----

## CHAPITRE II

### DEUX CARACTERISATIONS DES A.H.T.I.

#### A.H.T.I. D'ENSEMBLES

##### I- LES A.H.T.I. ET DE LUKASIEWICZ SYMETRIQUES

Etant donnée une algèbre de Heyting trivalente involutive  $(A, \sim)$  on peut définir au moyen des opérations données une nouvelle opération, qu'on note  $-$ , d'après l'égalité:

$$-x = \neg x \vee (x \wedge \neg x) .$$

## CHAPITRE II

### DEUX CARACTERISATIONS DES A.H.T.I.

#### A.H.T.I. D'ENSEMBLES

##### I- LES A.H.T.I. ET DE LUKASIEWICZ SYMETRIQUES

Etant donnée une algèbre de Heyting trivalente involutive  $(A, \sim)$  on peut définir au moyen des opérations données une nouvelle opération, qu'on note  $-$ , d'après l'égalité:

$$-x = \neg x \vee (x \wedge \neg x) .$$

Les propriétés suivantes sont valables:

1-  $--x = x$

$$\begin{aligned} --x &= -(\neg x \vee (x \wedge \Gamma x)) = \neg(\neg x \vee (x \wedge \Gamma x)) \vee ((\neg x \vee (x \wedge \Gamma x)) \wedge \\ &\wedge \Gamma(\neg x \vee (x \wedge \Gamma x))) = (\nabla x \wedge (\neg x \vee \Delta x)) \vee ((\neg x \vee x) \wedge \\ &\wedge \Gamma x \wedge \nabla x \wedge 1) = 0 \vee \Delta x \vee 0 \vee (x \wedge \Gamma x) = x \wedge 1 = x \end{aligned}$$

2-  $-(x \wedge y) = -x \vee -y$

D'après le principe de détermination de Moisil, nous allons démontrer que:

$$\nabla -(x \wedge y) = \nabla (-x \vee -y)$$

$$\Delta -(x \wedge y) = \Delta (-x \vee -y) \quad .$$

$$\begin{aligned} \nabla -(x \wedge y) &= \nabla(\neg(x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge \Gamma(x \wedge y))) = \\ &= \neg(x \wedge y) \vee (\nabla x \wedge \nabla y \wedge \Gamma(x \wedge y)) = \\ &= \neg x \vee \neg y \vee (\nabla x \wedge \nabla y \wedge (\Gamma x \vee \Gamma y)) = \\ &= 1 \wedge 1 \wedge (\Gamma x \vee \Gamma y) = \Gamma x \vee \Gamma y \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla (-x \vee -y) &= \nabla(\neg x \vee (x \wedge \Gamma x) \vee \neg y \vee (y \wedge \Gamma y)) = \\ &= \neg x \vee (\nabla x \wedge \Gamma x) \vee \neg y \vee (\nabla y \wedge \Gamma y) = \\ &= (1 \wedge \Gamma x) \vee (1 \wedge \Gamma y) = \\ &= \Gamma x \vee \Gamma y \end{aligned}$$

$$\Delta -(x \wedge y) = \Delta(\neg(x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge \Gamma(x \wedge y))) =$$

$$= \neg(x \wedge y) \vee (\Delta x \wedge \Delta y \wedge (\Gamma x \vee \Gamma y)) =$$

$$= \neg(x \wedge y) \vee 0 \vee 0 = \neg(x \wedge y)$$

$$\Delta(\neg x \vee \neg y) = \Delta(\neg x \vee (x \wedge \Gamma x) \vee \neg y \vee (y \wedge \Gamma y)) =$$

$$= \neg x \vee 0 \vee \neg y \vee 0 = \neg(x \wedge y)$$

$$3- \underline{\neg x \vee \nabla x = 1}$$

$$\neg x \vee \nabla x = \neg x \vee (x \wedge \Gamma x) \vee \nabla x = 1$$

$$4- \underline{x \wedge \neg x = \neg x \wedge \nabla x}$$

$$x \wedge \neg x = x \wedge (\neg x \vee (x \wedge \Gamma x)) = 0 \vee (x \wedge \Gamma x) =$$

$$= x \wedge \Gamma x$$

$$\neg x \wedge \nabla x = (\neg x \vee (x \wedge \Gamma x)) \wedge \nabla x = 0 \vee (x \wedge \Gamma x \wedge \nabla x) =$$

$$= x \wedge \Gamma x$$

$$5- \underline{\neg \sim x = \sim \neg x}$$

$$\neg \sim x = \neg \neg x \vee (\sim x \wedge \Gamma \sim x) = (\neg \neg x \vee \sim x) \wedge (\neg \neg x \vee \Gamma \sim x) =$$

$$= (\neg \neg x \vee \sim x) \wedge \sim \neg x$$

$$\sim \neg x = \sim(\neg x \vee (x \wedge \Gamma x)) = \sim \neg x \wedge (\sim x \vee \sim \Gamma x) =$$

$$= \sim \neg x \wedge (\sim x \vee \neg \neg x)$$

$$6- \underline{\sim \neg \neg x = \neg \sim \neg x}$$

$$\sim \neg \neg x = \sim \sim \neg x = \neg \sim \neg x \vee (\sim \neg x \wedge \Gamma \sim \neg x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \neg \neg x \vee (\neg x \wedge \neg \neg x) = \neg \neg x \\
\neg \neg x &= \neg (\neg x \vee (x \wedge \neg x)) = \neg \neg x \vee (\neg \neg x \wedge \neg \neg \neg x) = \\
&= \neg \neg x .
\end{aligned}$$

Nous allons montrer dans ce qui suit que la théorie des algèbres de Heyting trivalentes involutives coïncide avec celle des algèbres de Lukasiewicz trivalentes symétriques. Les deux théorèmes suivants ont pour but la démonstration de ce résultat.

Théorème 1. Etant donnée une algèbre de Heyting trivalente involutive  $(A, \sim)$  nous pouvons définir un système  $(A, \alpha)$  qui est une algèbre de Lukasiewicz trivalente symétrique.

Démonstration.

D'après l'hypothèse  $A$  est un treillis distributif ayant un plus grand élément  $1$ . Considérons l'opération de négation  $-$  définie plus haut et l'opérateur  $\nabla = \neg \neg$ . Les propriétés 1-, 2-, 3-, 4- et A3- entraînent que le système  $(A, -)$  est une algèbre de Lukasiewicz trivalente (A. Monteiro, 1963) et d'accord à la convention

faite on la note  $A$  .

Nous posons sur  $A$ :  $\alpha x = \sim -x$  . On a donc:

$$\begin{aligned}\alpha(x \wedge y) &= \sim \sim (x \wedge y) = \sim (-x \vee -y) = \sim -x \wedge \sim -y = \\ &= \alpha x \wedge \alpha y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(x \vee y) &= \sim \sim (x \vee y) = \sim (-x \wedge -y) = \sim -x \vee \sim -y = \\ &= \alpha x \vee \alpha y\end{aligned}$$

$$\alpha(\sim x) = \sim \sim \sim x = \sim \sim -x = -x = \sim \alpha x$$

$$\alpha(\nabla x) = \alpha(\neg \neg x) = \sim \sim \neg \neg x = \neg \neg \sim \sim x = \nabla \alpha x$$

$$\begin{aligned}\alpha(-x) &= \alpha(\neg x \vee (x \wedge \neg x)) = \alpha \neg x \vee (\alpha x \wedge \alpha \neg x) = \\ &= \neg \alpha x \vee (\alpha x \wedge \alpha \sim \neg x) = \neg \alpha x \vee (\alpha x \wedge \sim \neg \alpha x) = \\ &= \sim \alpha x .\end{aligned}$$

Puisque  $\alpha$  est une application injective de  $A$  sur  $A$  on a d'après les égalités précédentes que  $\alpha$  est un automorphisme de  $A$  . En outre  $\alpha$  est un automorphisme involutif de  $A$  parce que  $\alpha \alpha x = \sim \sim \sim -x = \sim \sim --x = x$ . Le système  $(A, \alpha)$  est donc une algèbre de Lukasiewicz trivalente symétrique.

Inversement:

Théorème 2. Etant donnée une algèbre de Lukasiewicz trivalente symétrique  $(A, \alpha)$  nous pouvons dé-



finir un système  $(A, \sim)$  qui est une algèbre de Heyting trivalente involutive.

Démonstration.

D'après l'hypothèse  $A$  est une algèbre de Lukasiewicz trivalente, et en particulier, une algèbre de Heyting trivalente.

Nous posons sur  $A$  :  $\sim x = \alpha -x$  . On a donc:

$$\begin{aligned} \sim \sim x &= \alpha -(\sim x) = \alpha -(\alpha -x) = \alpha \alpha --x = x , \\ \sim(x \wedge y) &= \alpha -(x \wedge y) = \alpha (-x \vee -y) = \alpha -x \vee \alpha -y = \\ &= \sim x \vee \sim y . \end{aligned}$$

Le système  $(A, \sim)$  est donc une algèbre de Heyting trivalente involutive.

$$\text{De plus } \sim -x = \alpha -(-x) = \alpha x .$$

Remarquons que si  $h$  est un homomorphisme de l'algèbre de Heyting trivalente involutive  $(A, \sim)$  dans  $(B, \sim)$  alors  $h$  est aussi un homomorphisme de l'algèbre de Lukasiewicz trivalente symétrique  $(A, \alpha)$  dans  $(B, \alpha)$  .

## II- UNE AUTRE CARACTERISATION DES A.H.T.I.

Les algèbres de Lukasiewicz trivalentes peuvent se définir (J.C.Varlet, 1968, p.404) comme des systèmes  $(A, \neg, \ulcorner)$  où  $A$  est un treillis distributif ayant un plus petit et un plus grand élément tandis que  $\neg$  et  $\ulcorner$  sont deux opérations unaires définies sur  $A$  satisfaisant aux axiomes suivants:

$$x \wedge \neg x = 0 \quad ; \quad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y \quad ; \quad \neg 0 = 1 \quad ;$$

$$x \vee \ulcorner x = 1 \quad ; \quad \ulcorner(x \vee y) = \ulcorner x \wedge \ulcorner y \quad ; \quad \ulcorner 1 = 0 \quad ;$$

si  $\neg x = \neg y$  et  $\ulcorner x = \ulcorner y$ , alors  $x = y$ .

Les trois premiers de ces axiomes caractérisent un treillis de Stone (Matsumoto, 1950), c'est-à-dire un treillis distributif pseudo-complémenté satisfaisant à l'égalité  $\neg x \vee \neg \neg x = 1$

Remarquons que dans ce cas la négation de Kalman-Kleene peut s'exprimer (Moisil, 1942, p.49) au moyen de la formule

$$\neg x = \neg x \vee (x \wedge \ulcorner x)$$

Les algèbres de Lukasiewicz trivalentes sont des A.H.T.I. particulières; il est donc naturel tâcher

de caractériser ces algèbres parmi les treillis distributifs ayant un plus petit et un plus grand élément, sur lesquels sont définis deux opérations unaires satisfaisant aux certaines conditions.

Théorème 3. Pour q'un treillis distributif  $A$  ayant un plus petit et un plus grand élément  $0$  et  $1$  soit une A.H.T.I. il faut et il suffit que sur  $A$  on puisse définir deux opérations unaires  $\neg$  et  $\sim$  satisfaisant aux égalités:

$\neg 1)$   $x \wedge \neg x = 0$   
 $\neg 2)$   $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$   
 $\neg 3)$   $\neg 0 = 1$   
 $N1)$   $\sim \sim x = x$   
 $N2)$   $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$   
 $\neg N)$  si  $\neg x = \neg y$  et  $\neg \sim x = \neg \sim y$  alors  $x = y$ .

Démonstration.

$\Rightarrow$  Soit  $(A, \sim)$  une A.H.T.I.. D'après la définition l'opération  $\sim$  satisfait aux conditions  $N1)$  et  $N2)$ . L'opération  $\neg x = x \Rightarrow 0$  vérifie les égalités  $\neg 1)$ ,  $\neg 2)$  et  $\neg 3)$ . Pour montrer  $\neg N)$  supposons que  $\neg x = \neg y$  et

$\neg \sim x = \neg \sim y$  , alors (1)  $\nabla x = \neg \neg x = \neg \neg y = \nabla y$  et  
 (2)  $\Delta x = \sim \neg \neg \sim x = \sim \neg \neg \sim y = \Delta y$  . De (1) et (2) , en  
 vertu du principe de détermination de Moisil on tire que  
 $x = y$  .

⇐ D'après les axiomes 71), 72) et 73) Matsumoto,  
 1950, a montré les égalités 1- à 6- indiquées ci-des-  
 sous avec les démonstrations données par cet auteur.

1-  $\neg x \vee \neg \neg x = 1$

$$\neg(x \wedge \neg x) = \neg 0 = 1$$

$$\neg(x \wedge \neg x) = \neg x \vee \neg \neg x \text{ , alors } \neg x \vee \neg \neg x = 1$$

2- Si  $x \leq y$  , alors  $\neg y \leq \neg x$  .

$$\text{Si } x \leq y \text{ alors } x = x \wedge y \text{ ; donc } \neg x = \neg(x \wedge y) = \\ = \neg x \vee \neg y \text{ , c'est-à-dire } \neg y \leq \neg x \text{ .}$$

3- Si  $x \wedge y \leq z$  , alors  $x \wedge \neg z \leq \neg y$  .

$$\text{D'après } x \wedge y \leq z \text{ on tire } \neg z \leq \neg(x \wedge y) = \\ = \neg x \vee \neg y \text{ ; alors } x \wedge \neg z \leq x \wedge (\neg x \vee \neg y) = (x \wedge \neg x) \vee \\ \vee (x \wedge \neg y) = 0 \vee (x \wedge \neg y) = x \wedge \neg y \leq \neg y \text{ .}$$

4-  $x \leq \neg \neg x$

$$\text{Puisque } (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \text{ alors} \\ (\neg x \vee \neg \neg x) \wedge x = (\neg x \wedge x) \vee (\neg \neg x \wedge x) \text{ ; donc}$$

$$1 \wedge x = 0 \vee (\neg \neg x \wedge x) \text{ , c'est-à-dire } x = x \wedge \neg \neg x$$

et  $x \leq \neg\neg x$ .

$$5- \underline{\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y}$$

A partir de  $\neg x \wedge (x \vee y) = (\neg x \wedge x) \vee (\neg x \wedge y) =$   
 $= \neg x \wedge y \leq y$  on a d'après 3- i)  $\neg x \wedge \neg y \leq \neg(x \vee y)$ .

Mais  $x \leq x \vee y$  et  $y \leq x \vee y$ , d'après 2- on dé-  
 duit  $\neg(x \vee y) \leq \neg x$  et  $\neg(x \vee y) \leq \neg y$ ; alors  
 ii)  $\neg(x \vee y) \leq \neg x \wedge \neg y$ . De i) et ii) on a 5-.

$$6- \underline{\neg\neg\neg x = \neg x}$$

De  $x \leq \neg\neg x$  on a d'après 2- i)  $\neg\neg\neg x \leq \neg x$ .

De 4-, ii)  $\neg x \leq \neg\neg\neg x$ . De i) et ii) on obtient 6-

En tenant compte des axiomes N1) et N2) on déduit  
 les égalités suivantes:

$$7- \underline{\sim 1 = 0} \quad ; \quad 8- \underline{\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y}$$

Posons pour abrégé  $\Gamma x = \sim\neg\neg x$ . Par dualité on  
 a de même:

$$9- \quad x \vee \Gamma x = 1 \quad ; \quad 10- \quad \Gamma(x \vee y) = \Gamma x \wedge \Gamma y$$

$$11- \quad \Gamma 1 = 0 \quad ; \quad 12- \quad \Gamma x \wedge \Gamma \Gamma x = 0$$

$$13- \quad \text{Si } x \leq y \quad \text{alors } \Gamma y \leq \Gamma x$$

$$14- \quad \text{Si } z \leq x \vee y \quad \text{alors } \Gamma y \leq x \vee \Gamma z$$

$$15- \quad \Gamma \Gamma x \leq x \quad ; \quad 16- \quad \Gamma(x \wedge y) = \Gamma x \vee \Gamma y$$

$$17- \quad \Gamma \Gamma \Gamma x = \Gamma x$$

De plus:

$$18- \underline{\neg x \leq \Gamma x}$$

Puisque  $x \wedge \neg x = 0$  on tire  $(x \wedge \neg x) \vee \Gamma x = \Gamma x$ ,  
c'est-à-dire  $(x \vee \Gamma x) \wedge (\neg x \vee \Gamma x) = 1 \wedge (\neg x \vee \Gamma x) =$   
 $= \neg x \vee \Gamma x = \Gamma x$ , donc  $\neg x \leq \Gamma x$ .

$$19- \underline{\Gamma \Gamma x \leq \neg \neg x}$$

Il en résulte en raison de 4- et 15- .

D'après les égalités 71), 72), 73) et ses duales  
9-, 10-, 11- et en tenant compte que l'axiome 7N) peut  
s'écrire: si  $\nabla x = \nabla y$  et  $\Delta x = \Delta y$  alors  $x = y$ ,  
nous pouvons établir, grâce au résultat de Varlet, que

A est une algèbre de Lukasiewicz trivalente et par consé-  
quent une algèbre de Heyting trivalente. D'une façon plus  
directe, si l'on définit l'implication  $\Rightarrow$  sur A au  
moyen de l'égalité:

$$x \Rightarrow y = \neg x \vee y \vee (\Gamma x \wedge \neg \neg y)$$

on peut en déduire que A est une algèbre de Heyting  
trivalente.

A ce propos on établit l'un après l'autre les éga-  
lités suivantes:

$$H1- \underline{x \Rightarrow x = 1}$$

$$x \Rightarrow x = \neg x \vee x \vee (\neg x \wedge \neg \neg x) =$$

$$= (\neg x \vee x \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee x \vee \neg \neg x)$$

D'après 9- et 1-,  $x \Rightarrow x = (\neg x \vee 1) \wedge (x \vee 1) = 1$

$$\text{H2- } \underline{(x \Rightarrow y) \wedge y = y}$$

$$(x \Rightarrow y) \wedge y = (\neg x \vee y \vee (\neg x \wedge \neg \neg y)) \wedge y = y$$

$$\text{H3- } \underline{x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y}$$

$$x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge (\neg x \vee y \vee (\neg x \wedge \neg \neg y)) =$$

$$= 0 \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg x \wedge \neg \neg y) .$$

$$\text{Voyons que } (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg x \wedge \neg \neg y) = x \wedge y .$$

$$\text{De 5-, 72) et 6- on tire: } \neg((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg x \wedge \neg \neg y)) =$$

$$= (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg \neg x \vee \neg y) = \neg x \vee \neg y = \neg(x \wedge y)$$

Les égalités 8-, N2), 72), 5-, N1) et 71) entraînent:

$$\neg \neg((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg x \wedge \neg \neg y)) = \neg \neg(x \wedge y) \vee$$

$$\vee (\neg \neg x \wedge \neg \neg \neg x \wedge \neg \neg \neg \neg y) = \neg \neg(x \wedge y)$$

$$\text{D'après 7N) on a: } (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg x \wedge \neg \neg y) =$$

$$= x \wedge y \quad , \text{ donc H3-}$$

$$\text{H4- } \underline{x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)}$$

$$x \Rightarrow (y \wedge z) = \neg x \vee (y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg \neg (y \wedge z)) =$$

$$\begin{aligned}
&= ((\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee z)) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) = \\
&= (y \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (z \vee \neg x) \wedge \\
&\quad \wedge (\neg x \vee z \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg z) = (y \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge \\
&\quad \wedge (z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg z) \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z) &= (\neg x \vee y \vee (\neg x \wedge \neg y)) \wedge \\
&\wedge (\neg x \vee z \vee (\neg x \wedge \neg z)) = (y \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge \\
&\wedge (z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg z) \quad (2)
\end{aligned}$$

De (1) et (2) on obtient H4-.

$$H5- \underline{(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)}$$

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \Rightarrow z &= \neg(x \vee y) \vee z \vee (\neg(x \vee y) \wedge \neg z) = \\
&= (\neg x \wedge \neg y) \vee z \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) = \\
&= ((\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z)) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) = \\
&= (z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge \\
&\quad \wedge (\neg y \vee z \vee \neg x) \wedge (z \vee \neg y) \wedge (\neg y \vee \neg z) = (z \vee \neg x) \wedge \\
&\quad \wedge (\neg x \vee \neg z) \wedge (z \vee \neg y) \wedge (\neg y \vee \neg z) \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) &= (\neg x \vee z \vee (\neg x \wedge \neg z)) \wedge \\
&\wedge (\neg y \vee z \vee (\neg y \wedge \neg z)) = (z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg z) \wedge \\
&\quad \wedge (z \vee \neg y) \wedge (\neg y \vee \neg z) \quad (2)
\end{aligned}$$

De (1) et (2) on a H5-

Les égalités H1- à H5- expriment que A



est une algèbre de Heyting (A. Monteiro, 1955, p.151).

On établit de même l'égalité

$$T3- ((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \Rightarrow (((y \Rightarrow x) \Rightarrow y) \Rightarrow y) = 1$$

Dans une algèbre de Heyting la condition T3- est équivalente à

$$\begin{aligned} & (((x \Rightarrow z) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow y)) \Rightarrow y = 1, \text{ c'est-} \\ & \text{à-dire à } ((x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow x)) \Rightarrow y \leq y. \text{ En utilisant} \\ & \text{la définition de } \Rightarrow \text{ et quelques propriétés déjà montrées} \\ & \text{on obtient: } ((x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow x)) \Rightarrow y = \\ & = (\neg x \vee z \vee (\neg x \wedge \neg z) \vee \neg y \vee x \vee (\neg y \wedge \neg x)) \Rightarrow y = \\ & = (((z \vee \neg x \vee \neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg z \vee \neg y \vee x)) \vee \\ & \vee (\neg y \wedge \neg x)) \Rightarrow y = \\ & = (1 \wedge (\neg x \vee \neg z \vee x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg z \vee \neg y \vee x)) \Rightarrow y = \\ & = (\neg x \vee \neg z \vee x \vee \neg y) \Rightarrow y = \\ & = \neg(\neg x \vee \neg z \vee x \vee \neg y) \vee y \vee (\neg(\neg x \vee \neg z \vee x \vee \neg y) \wedge \neg y) = \\ & = (\neg x \wedge \neg z \wedge x \wedge \neg y) \vee y \vee (\neg x \wedge \neg z \wedge x \wedge \neg y) = \\ & = 0 \vee ((y \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (y \vee x) \wedge y). \text{ La dernière} \\ & \text{expression est évidemment plus petit que } y, \text{ ce qui} \\ & \text{prouve bien T3-. } A \text{ est donc une algèbre de Heyting} \\ & \text{trivalente et le système } (A, \sim) \text{ est une A.H.T.I..} \end{aligned}$$

Dans le cas des algèbres de Lukasiewicz tri-

valentes, on a que  $\sim \exists x = \forall \sim x = \nabla x$  alors  $\exists x = \Delta \sim x$   
 d'où  $\exists \sim x = \Delta x$  et  $\exists x = \sim \Delta x = \nabla \sim x$ . Donc l'égalité  
 $x \Rightarrow y = \exists x \vee y \vee (\exists x \wedge \exists y)$  peut se écrire aussi sous  
 la forme  $x \Rightarrow y = \Delta \sim x \vee y \vee (\nabla \sim x \wedge \nabla y)$ . Cette expression  
 est celle utilisé par L. Monteiro, 1970, p.458.

### III- A.H.T.I. D'ENSEMBLES

Soit  $T$  un ensemble non vide et  $\varphi$  une invo-  
 lution de  $T$  sur  $T$ . En posant  $\sim X = C\varphi(X)$  pour tout  
 $X \subseteq T$  il en résulte que toute famille de sous-ensembles  
 de  $T$  fermée par rapport aux opérations  $\cap$ ,  $\cup$  et  $\sim$   
 est une algèbre de Morgan. Toute algèbre de Morgan de ce  
 type est dite une algèbre de Morgan d'ensembles. La mé-  
 thode de Stone entraîne que toute algèbre de Morgan est  
 isomorphe à une algèbre de Morgan d'ensembles (A. Bia-  
 lynicki-Birula et H. Rasiowa, 1957, p.259-261).

Si l'on pose de plus  $\nabla X = X \cup \varphi(X)$  pour  
 tout  $X \subseteq T$  on voit que  $\sim X \cup \nabla X = T$ ,  $\sim X \cap \nabla X =$   
 $= \sim X \cap X$ ,  $\nabla(X \cap Y) \subseteq \nabla X \cap \nabla Y$ , et le système

$(2^T, \cap, \cup, \sim, \nabla)$  est une algèbre de Lukasiewicz trivalente si et seulement si l'involution  $\varphi$  est la transformation identique (A. Monteiro, 1966 b). Mais il peut avoir des sous-algèbres de Morgan de  $(2^T, \sim)$  qui soient fermées par rapport à l'opération  $\nabla$  et qui de plus satisfassent à l'inclusion:

$$\nabla X \cap \nabla Y \subseteq \nabla (X \cap Y) \quad ,$$

c'est-à-dire qui soient des algèbres de Lukasiewicz trivalentes. Les algèbres de ce type sont dites des algèbres de Lukasiewicz trivalentes d'ensembles, et toute algèbre de Lukasiewicz trivalente est isomorphe à une algèbre de Lukasiewicz trivalente d'ensembles (A. Monteiro, 1966 b).

En vertu de ces résultats nous allons considérer la construction suivante.

Soit  $T$  un ensemble non vide sur lequel on définit deux involutions  $\varphi$  et  $\alpha$  de  $T$  sur  $T$  telles que pour tout  $x \in T$  on a  $\varphi\alpha(x) = \alpha\varphi(x)$ .

Pour chaque partie  $X$  de  $T$  on définit les opérations  $\sim$  et  $\neg$  au moyen des égalités:

$$\sim X = C\varphi(X)$$

$$\neg X = C(X \cup \varphi\alpha X)$$

Ces opérations ont les propriétés suivantes:

$$N1) \sim \sim X = X \quad ; \quad N2) \sim (X \wedge Y) = \sim X \vee \sim Y$$

$$1) \quad \neg \emptyset = T \quad ; \quad 2) \quad X \wedge \neg X = \emptyset$$

$$3) \quad \neg X \vee \neg Y \subseteq \neg (X \wedge Y)$$

Remarquons de plus:

$$\begin{aligned} \neg (X \wedge Y) &= C((X \wedge Y) \cup \neg \alpha(X \wedge Y)) = \\ &= C((X \wedge Y) \cup (\neg \alpha X \wedge \neg \alpha Y)) = \\ &= C((X \cup \neg \alpha X) \wedge (X \cup \neg \alpha Y) \wedge (Y \cup \neg \alpha X) \wedge (Y \cup \neg \alpha Y)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg X \vee \neg Y &= C(X \cup \neg \alpha X) \cup C(Y \cup \neg \alpha Y) = \\ &= C((X \cup \neg \alpha X) \wedge (Y \cup \neg \alpha Y)) \quad , \end{aligned}$$

alors pour que  $\neg (X \wedge Y) \subseteq \neg X \vee \neg Y$  , il faut que:

$$A) \quad (X \cup \neg \alpha X) \wedge (Y \cup \neg \alpha Y) \subseteq (X \cup \neg \alpha Y) \wedge (Y \cup \neg \alpha X) \quad .$$

Les conditions  $\neg X = \neg Y$  et  $\neg \sim X = \neg \sim Y$

peuvent s'écrire:  $C(X \cup \neg \alpha X) = C(Y \cup \neg \alpha Y)$  et

$C(C \neg X \cup \neg \alpha C \neg X) = C(C \neg Y \cup \neg \alpha C \neg Y)$  ; ce qui revient

au même de dire:

$$X \cup \neg \alpha X = Y \cup \neg \alpha Y$$

B)

$$X \wedge \neg \alpha X = Y \wedge \neg \alpha Y$$

Pour que le système  $(2^T, T, \cup, \wedge, \sim, \neg)$  soit une A.H.T.I. il doit vérifier la condition A) , et B) doit entraîner  $X = Y$  .

Si  $X = \emptyset$  la condition A) s'écrit :

$Y \cup \varphi \alpha Y = \varphi \alpha Y \cap Y$  , c'est-à-dire  $\varphi \alpha Y = Y$  , alors

$\varphi = \alpha^{-1}$  . Dans ce cas la condition B) entraîne  $X = Y$ .

Inversement, si  $\varphi = \alpha^{-1}$  la condition A) s'écrit

$X \cap Y \subseteq X \cup Y$  ce qui est toujours vrai et B) entraîne

$X = Y$  .

La condition  $\varphi = \alpha^{-1}$  n'est pas vraie en général et le système  $(2^T, T, \cup, \cap, \sim, \uparrow)$  ne sera pas une A.H.T.I.. Mais il peut exister des sous-algèbres de Morgan de  $(2^T, T, \cup, \cap, \sim, \uparrow)$  qui soient des A.H.T.I..

Définition 4. Soit  $T$  un ensemble non vide sur lequel sont définies deux involutions  $\varphi$  et  $\alpha$  de  $T$  sur  $T$  telles que  $\varphi \alpha(x) = \alpha \varphi(x)$  pour tout  $x \in T$  . Toute A.H.T.I. de la forme  $(S, \cup, \cap, \uparrow, \sim)$  où  $S$  est une famille de sous-ensembles de  $T$  , fermée par rapport aux opérations  $\cup, \cap, \sim$  et  $\uparrow$  où

$$\sim X = C \varphi(X)$$

$$\uparrow X = C(X \cup \varphi \alpha X)$$

est dite une A.H.T.I. d'ensembles déter-

minée par  $T$ ,  $\varphi$  et  $\alpha$ .

Nous allons montrer par la suite que toute A.H.T.I. est isomorphe à une A.H.T.I. d'ensembles, en utilisant les méthodes de Stone, 1937, et de Bialynicki-Birula et Rasiowa, 1957.

Etant donnée une algèbre  $(A, \sim)$  soit  $E$  l'ensemble de tous ses filtres premiers. Pour tout  $P \in E$  nous posons:

$$\varphi(P) = C \sim P$$

$$\alpha(P) = \sim - P .$$

Nous avons bien deux involutions  $\varphi$  et  $\alpha$  de  $E$  sur  $E$  telles que  $\varphi\alpha(P) = \alpha\varphi(P)$ , pour tout  $P \in E$ .

Pour tout  $a \in A$  soit  $h(a)$  la classe de tous les filtres premiers  $P$  tels que  $a \in P$ .

D'après Stone on sait que le système  $(A' = h(A), \cup, \cap)$  est un anneau de sous-ensembles de  $E$  isomorphe au treillis distributif  $(A, \vee, \wedge)$ . Bialynicki-Birula et Rasiowa ont en outre montré que  $h(\sim a) = \sim h(a)$ .

Pour chaque  $X \subseteq E$  nous posons:

$$\gamma X = C(X \cup \varphi\alpha X) .$$

Il est clair que  $\neg \emptyset = E$ ,  $X \cap \neg X = \emptyset$  et  
 $\neg X \cup \neg Y \subseteq \neg(X \cap Y)$ . De plus si  $a \in A$  alors  
 $\neg a \in A$  et  $h(\neg a) \in A'$ . Il nous faut montrer que:

1-  $\neg h(a) = h(\neg a)$

2- le système  $(A', \sim)$  est une A.H.T.I. .

Démonstration de 1-. En tenant compte des équivalen-  
ces:  $P \notin \neg h(a) \iff P \in h(a) \cup \varphi \Delta h(a) \iff$  il existe  
un filtre premier  $P_1$  tel que  $a \in P_1$  et  $P = P_1$  ou  
 $P = \varphi \Delta (P_1)$ . Si  $P = P_1$  puisque  $a \in P_1$  on a  $\neg a \notin P_1 =$   
 $= P$  et alors  $P \notin h(\neg a)$ . Si  $P = \varphi \Delta P_1$  alors  $\varphi \Delta P =$   
 $= P_1$  et  $a \in \varphi \Delta P$ . Puisque  $\varphi \Delta P = \varphi \Delta (\varphi \Delta \neg P) = \neg P$  et  
- satisfait à la loi de Kalman-Kleene il résulte que  
 $P$  et  $\varphi \Delta P$  sont comparables.

Si  $P$  est maximal alors  $\varphi \Delta P \subseteq P$  et puisque  $a \in \varphi \Delta P$   
on a  $a \in P$ , donc  $\neg a \notin P$  et  $P \notin h(\neg a)$ .

Si  $P$  est minimal on a  $P \subseteq \varphi \Delta P$  et de  $a \in \varphi \Delta P$  on  
déduit  $\neg a \notin \varphi \Delta P$  et  $\neg a \notin P$ , c'est-à-dire  $P \notin h(\neg a)$ .

Nous avons ainsi démontré que:  $P \notin \neg h(a)$  équivaut  
à  $P \notin h(\neg a)$ , c'est-à-dire  $h(\neg a) = \neg h(a)$ .

Démonstration de 2-.  $\neg(X \cap Y) = \neg(h(a) \cap h(b)) =$   
 $= \neg(h(a \wedge b)) = h(\neg(a \wedge b)) = h(\neg a \vee \neg b) =$

$= h(\gamma a) \cup h(\gamma b) = \gamma h(a) \cup \gamma h(b) = \gamma X \cup \gamma Y$  . Supposons  
 que  $\gamma h(a) = \gamma h(b)$  et  $\gamma \sim h(a) = \gamma \sim h(b)$  , alors  
 $h(\gamma a) = h(\gamma b)$  et  $h(\gamma \sim a) = h(\gamma \sim b)$  et puisque  $h$   
 est un isomorphisme  $\gamma a = \gamma b$  et  $\gamma \sim a = \gamma \sim b$  et en  
 vertu de  $\gamma N$  ,  $a = b$  et  $h(a) = h(b)$  .

Le système  $(A' = h(A), \sim)$  est alors une A.H.T.I.  
 d'ensembles isomorphe à l'algèbre  $(A, \sim)$  .

-----oOo-----



## C H A P I T R E III

### SYSTEMES DEDUCTIFS. THEOREME DE REPRESENTATION

#### I- DEFINITION

De façon abrégée on dira en général "l'algèbre A " au lieu de dire "l'algèbre de Heyting trivalente involutive  $(A, \sim)$  " .

Soit  $h$  l'homomorphisme de l'algèbre A dans l'algèbre B . L'ensemble  $N(h)$  de tous les  $x \in A$  tels que  $h(x) = 1$  est dit le noyau de l'homomorphisme  $h$  .

Pour que l'homomorphisme  $h$  soit un isomorphisme il faut et il suffit que  $N(h) = \{1\}$ .

Le noyau  $N(h)$  d'un homomorphisme satisfait aux propriétés suivantes:

D1-  $1 \in N(h)$

D2- Modus Ponens. Si  $x, x \Rightarrow y \in N(h)$  alors  $y \in N(h)$

D3- Contraposition. Si  $x \Rightarrow y \in N(h)$  alors

$\sim y \Rightarrow \sim x \in N(h)$  .

Définition 5. Une partie  $D$  d'une algèbre  $A$  est dite un système déductif (s.d.) si elle satisfait aux conditions D1-, D2- et D3-.

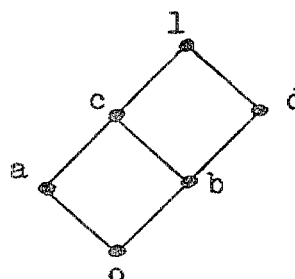
Un s.d.  $D$  est propre si  $D \neq A$  .

Dans une algèbre de Heyting les parties qui vérifient D1- et D2- coïncident avec les filtres (A. Monteiro, 1954, p.157). Dans une A.H.T.I. tout s.d. est un filtre tandis que la réciproque est inexacte. Considérons par exemple l'algèbre de Heyting du diagramme donné sur laquelle on définit l'opération  $\sim$  de la façon suivante:

$$\sim 0 = 1 ; \sim a = d ; \sim b = c ;$$

$$\sim c = b ; \sim d = a ; \sim 1 = 0 .$$

L'ensemble  $D = \{c, 1\}$  est un filtre de  $A$  mais il n'est



pas un s.d. parce que  $d \Rightarrow b = c \in D$  et  $\sim b \Rightarrow \sim d = c \Rightarrow a = a \notin D$ .

Une caractérisation des s.d. au moyen de la notion de filtre est donnée par le résultat suivant.

Théorème 4. Pour qu'un filtre  $D$  soit un s.d. il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition (D) pour tout  $d \in D$  il existe un  $d' \in D$  tel que  $\sim d \wedge d' = 0$ .

Démonstration.

La condition est nécessaire. Supposons que  $D$  soit un s.d. alors en particulier il est un filtre. Si  $d \in D$  on a donc  $d = 1 \Rightarrow d \in D$  et d'après D3-,  $\sim d \Rightarrow \sim 1 = 0 = \sim d \Rightarrow 0 = \neg \sim d \vee 0 \vee (\neg \sim d \wedge \nabla 0) = \neg \sim d = d' \in D$  et  $\sim d \wedge d' = \sim d \wedge \neg \sim d = 0$ .

La condition est suffisante. Soit  $D$  un filtre qui satisfait à (D), alors D1- et D2- en sont vérifiées.

Il reste donc à montrer  $D \neq \emptyset$ . Soit  $d = x \Rightarrow y \in D$  alors il existe un (1)  $d' \in D$  tel que  $\sim(x \Rightarrow y) \wedge d' = 0$ . Donc (2)  $d' \leq \neg \sim(x \Rightarrow y)$ . Mais (3)  $\neg \sim(x \Rightarrow y) \leq (\sim y \Rightarrow \sim x)$  parce que:  $\neg \sim(x \Rightarrow y) = \neg \sim(\neg x \vee y \vee (\neg x \wedge \nabla y)) = \sim \nabla x \vee \neg \sim y \vee (\nabla \sim x \wedge \sim \neg y)$ ;  $\sim y \Rightarrow \sim x = \neg \sim y \vee \sim x \vee (\neg \sim y \wedge \nabla \sim x) = \neg \sim y \vee \sim x \vee (\sim \neg y \wedge \nabla \sim x)$  et  $\sim \nabla x \leq \sim x$ . De (1), (2) et (3) comme  $D$  est un filtre on tire que  $\sim y \Rightarrow \sim x \in D$ .

En vertu de ce que nous venons de voir pour qu'un s.d.  $D$  soit propre il faut que si  $d \in D$  alors  $\sim d \notin D$ . La condition est aussi suffisante, puisque du fait que  $1 \in D$  nous avons  $\sim 1 = 0 \notin D$  et  $D$  est propre.

Si  $D$  est un filtre d'une algèbre de Heyting  $A$ , la relation  $a \equiv b \pmod{D}$  définie par:  $a \equiv b \pmod{D}$  si et seulement si  $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \in D$  est une relation d'équivalence compatible avec les opérations  $\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$ , définies sur  $A$  (Rieger, 1949).

Si  $D$  est un s.d. la relation " $\equiv$ " est aussi compatible avec l'opération  $\sim$ ; autrement dit

si  $a \equiv b \pmod{D}$  alors  $\sim b \equiv \sim a \pmod{D}$ . En effet,  $a \equiv b \pmod{D}$  exprime bien que  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in D$  et d'après D3-,  $\sim b \Rightarrow \sim a, \sim a \Rightarrow \sim b \in D$ , c'est-à-dire  $\sim a \equiv \sim b \pmod{D}$ .

Soit  $|x|$  la classe d'équivalence contenant l'élément  $x$ , et  $A' = A/D$  l'ensemble des classes d'équivalence  $\pmod{D}$ . En raison de la compatibilité existant entre les opérations  $\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, \sim$  de  $A$  et la relation  $\equiv$ , on peut définir une structure algébrique sur  $A'$  à l'aide des égalités:

$$\begin{aligned} |x| \vee |y| &= |x \vee y| & ; & & |x| \Rightarrow |y| &= |x \Rightarrow y| & ; \\ |x| \wedge |y| &= |x \wedge y| & ; & & \neg |x| &= |\neg x| & ; \\ & & & & \sim |x| &= |\sim x| & \end{aligned}$$

Signalons que  $D$  coïncide avec une des classes d'équivalence  $\pmod{D}$ , précisément  $D = |1|$  et si l'on pose  $D = 1'$  on peut établir l'énoncé suivant:

Théorème 5. L'algèbre quotient  $(A' = A/D, \sim)$  est une A.H.T.I. où  $1'$  est le plus grand élément de  $A'$ . L'application canonique  $h(x) = |x|$  est un homomorphisme de  $A$  sur  $A'$  de

noyau  $D$ .

Le résultat précédent peut être considéré comme une conséquence des résultats obtenus par Gr. Moisil, 1942, p.77-82.

Toutes les images homomorphes d'une A.H.T.I. peuvent se déterminer de cette façon. Autrement dit, si  $A''$  est une image homomorphe de  $A$  par rapport à l'homomorphisme  $f$  de noyau  $D$  et si l'on définit la relation  $a \equiv b \pmod{D}$  si et seulement si  $f(a) = f(b)$  alors l'algèbre  $A/D = A'$  est isomorphe à  $A''$ .

Si  $D$  est un s.d. d'une A.H.T.I., la condition  $a \equiv b \pmod{D}$  est équivalente à:

(E) il existe un  $d \in D$  tel que  $a \wedge d = b \wedge d$ .

Soit  $h$  un homomorphisme appliquant  $A$  sur  $B$ . D'après les définitions de s.d., image complète inverse et  $\Psi$ , on démontre:

- 1- si  $D'$  est un s.d. propre de  $B$  l'ensemble  $D = h^{-1}(D')$  est un s.d. propre de  $A$ .
- 2- si  $D'$  est un s.d. maximal de  $B$  alors  $D = h^{-1}(D')$  est un s.d. maximal de  $A$ .

3- pour tout filtre premier  $P$  de  $B$ ,  $h^{-1}(\varphi(P)) = \varphi(h^{-1}(P))$ .

Cette dernière propriété peut se déduire des implications à savoir:

$$\begin{aligned} x \in h^{-1}(\varphi(P)) &\iff h(x) \in \varphi(P) \iff h(x) \notin \sim P \iff \\ &\iff \sim h(x) \notin P \iff h(\sim x) \notin P \iff \sim x \notin h^{-1}(P) \iff \\ &\iff x \in \sim h^{-1}(P) \iff x \in \varphi(h^{-1}(P)). \end{aligned}$$

Nous aurons besoin plus loin de certains résultats valables pour les algèbres de Heyting que nous rappelons ici:

- étant donné un filtre  $F$  et un élément  $a \notin F$  il existe un filtre premier  $M$  maximal parmi tous les s.d. contenant  $F$  et ne contenant pas l'élément  $\underline{a}$ .  $M$  sera dite un filtre premier maximal par rapport à  $\underline{a}$ .

Les filtres premiers maximaux par rapport à un élément fixe  $\underline{a}$  peuvent se caractériser (A. Monteiro, 1960 a) au moyen de l'opération  $\Rightarrow$ , de la façon suivante:

- un filtre  $M$  est maximal par rapport à  $\underline{a}$  si et seulement si:

1-  $a \notin M$

2- pour tout  $x \notin M$ ,  $x \Rightarrow a \in M$ .

- tout filtre propre d'une algèbre de Heyting est l'intersection de filtres premiers.

## II- L'IMPLICATION FAIBLE ET LES S.D.

Dans une algèbre de Lukasiewicz trivalente  $(A, 1, \wedge, \vee, -, \nabla)$  à l'aide de l'implication de Lukasiewicz  $\rightrightarrows$ , où  $a \rightrightarrows b = -a \vee b \vee (\nabla -a \wedge \nabla b)$  on peut définir une nouvelle opération, dite implication faible  $\rightarrow$ , de la façon suivante:

$$a \rightarrow b = a \rightrightarrows (a \rightrightarrows b) = \nabla -a \vee b .$$

Les noyaux  $N(h)$  des homomorphismes peuvent se caractériser comme les sous-ensembles de  $A$  satisfaisant aux conditions:

1-  $1 \in N(h)$

2- Modus Ponens. Si  $a, a \rightarrow b \in N(h)$  alors  $b \in N(h)$ .

(A. Monteiro, 1963 a) .



En ce qui concerne les algèbres de Boole involutives  $(A, \sim)$ , A. Monteiro, 1969, a aussi démontré que les noyaux  $N(h)$  peuvent se déterminer comme les sous-ensembles de  $A$  vérifiant aux conditions 1- et 2- données plus haut en prenant l'opération d'implication faible  $\rightarrow$  au moyen de l'égalité:

$$a \rightarrow b = \sim a \vee \sim a \vee b .$$

Ces résultats admettent une généralisation aux A.H.T.I. .

Moyennant les opérations définies sur une A.H.T.I.  $A$  on considère une nouvelle opération, dite l'implication faible d'après l'égalité:

$$a \rightarrow b = \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee b , \text{ pour tout } a, b \in A .$$

Cela posé on peut démontrer les propriétés suivantes.

1- Si  $a \leq b$  alors  $a \rightarrow b = 1$

De  $a \leq b$  on a  $\Gamma b \leq \Gamma a$  et en conséquence  $b \vee \Gamma b \leq b \vee \Gamma a$ . Mais  $b \vee \Gamma b = 1$  alors  $1 \leq b \vee \Gamma a \leq b \vee \Gamma a \vee \nabla \sim a = a \rightarrow b$ , c'est-à-dire  $a \rightarrow b = 1$ .

2-  $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$  (loi de simplification)

En effet,  $a \rightarrow (b \rightarrow a) = \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee \Gamma b \vee \nabla \sim b \vee a = 1$

3-  $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$  (loi de Frege)

$a \rightarrow (b \rightarrow c) = \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee \Gamma b \vee \nabla \sim b \vee c$  et

$$\begin{aligned} (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) &= \Gamma(a \rightarrow b) \vee \nabla \sim(a \rightarrow b) \vee \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee c = \\ &= \Gamma(\Gamma a \vee \nabla \sim a \vee b) \vee \nabla \sim(\Gamma a \vee \nabla \sim a \vee b) \vee \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee c = \\ &= (\Gamma \Gamma a \wedge \nabla \sim a \wedge \Gamma b) \vee (\nabla \sim a \wedge \Gamma \Gamma a \wedge \nabla \sim b) \vee \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee c = \\ &= (\Gamma \Gamma a \wedge \nabla \sim a \wedge (\Gamma b \vee \nabla \sim b)) \vee \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee c = \\ &= (\Gamma \Gamma a \vee \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee c) \wedge (\nabla \sim a \vee \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee c) \wedge \\ &\quad \wedge (\Gamma b \vee \nabla \sim b \vee \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee c) = \Gamma b \vee \nabla \sim b \vee \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee c . \end{aligned}$$

4-  $\Gamma((a \rightarrow b) \rightarrow a) \vee a = 1$

$$\begin{aligned} \Gamma((a \rightarrow b) \rightarrow a) \vee a &= \Gamma(\Gamma(a \rightarrow b) \vee \nabla \sim(a \rightarrow b) \vee a) \vee a = \\ &= (\Gamma \Gamma(a \rightarrow b) \wedge \nabla \sim(a \rightarrow b) \wedge \Gamma a) \vee a = \\ &= (\Gamma \Gamma(\Gamma a \vee \nabla \sim a \vee b) \wedge \nabla \sim(\Gamma a \vee \nabla \sim a \vee b) \wedge \Gamma a) \vee a = \\ &= ((\Gamma a \vee \nabla \sim a \vee \Gamma \Gamma b) \wedge (\nabla \sim a \vee \Gamma a \vee \nabla \sim b) \wedge \Gamma a) \vee a = \\ &= \Gamma a \vee a = 1 \end{aligned}$$

5-  $((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a = 1$  (loi de Peirce)

$$((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a = \Gamma((a \rightarrow b) \rightarrow a) \vee \nabla \sim((a \rightarrow b) \rightarrow a) \vee a = 1$$

6-  $a \Rightarrow b \leq a \rightarrow b$  , c'est-à-dire  $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \rightarrow b) = 1$

Rappelons nous qu'on peut écrire:  $x \Rightarrow y = \neg x \vee y \vee (\Gamma x \wedge \nabla y)$ .

Donc:

$$\begin{aligned}
(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \rightarrow b) &= \neg(a \Rightarrow b) \vee (a \rightarrow b) \vee (\neg(a \Rightarrow b) \wedge \nabla(a \rightarrow b)) = \\
&= \neg(\neg a \vee b \vee (\neg a \wedge \nabla b)) \vee \neg a \vee \nabla a \vee b \vee \\
&\vee (\neg(\neg a \vee b \vee (\neg a \wedge \nabla b)) \wedge \nabla(\neg a \vee \nabla a \vee b)) = \\
&= (\nabla a \wedge \neg b \wedge (\Delta a \vee \neg b)) \vee \neg a \vee \nabla a \vee b \vee \\
&\vee (\nabla a \wedge \neg b \wedge (\Delta a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \nabla a \vee \nabla b)) = \\
&= (\neg b \wedge \Delta a) \vee (\nabla a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee \nabla a \vee b \vee \\
&\vee (((\neg b \wedge \Delta a) \vee (\nabla a \wedge \neg b)) \wedge (\neg a \vee \nabla a \vee \nabla b)) = \\
&= (\nabla a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee \nabla a \vee b \vee 0 \vee (\neg b \wedge \Delta a \wedge \nabla a) \vee (\neg b \wedge \Delta a \wedge \nabla b) \vee \\
&\vee (\nabla a \wedge \neg b \wedge \neg a) \vee (\nabla a \wedge \neg b \wedge \nabla a) \vee 0 = \\
&= (\nabla a \wedge \neg b) \vee ((1 \wedge 1 \wedge (\neg a \vee \nabla a \vee \nabla b))) = \\
&= (\nabla a \vee \neg a \vee \nabla a \vee \nabla b) \wedge (\neg b \vee \neg a \vee \nabla a \vee \nabla b) = 1
\end{aligned}$$

7-  $(a \Rightarrow b) \rightarrow (\sim b \Rightarrow \sim a) = 1$

En effet,  $(a \Rightarrow b) \rightarrow (\sim b \Rightarrow \sim a) = \neg(a \Rightarrow b) \vee \nabla \sim(a \Rightarrow b) \vee$   
 $\vee (\sim b \Rightarrow \sim a)$ . Montrons que  $\nabla \sim(a \Rightarrow b) \vee (\sim b \Rightarrow \sim a) = 1$   
 $\nabla \sim(a \Rightarrow b) \vee (\sim b \Rightarrow \sim a) = \nabla \sim(\neg a \vee b \vee (\neg a \wedge \nabla b)) \vee \neg b \vee \sim a \vee$   
 $\vee (\neg \sim b \wedge \nabla \sim a) = \sim \neg a \wedge \nabla \sim b \wedge (\neg \sim a \vee \sim \nabla b) \vee \neg b \vee \sim a \vee$   
 $\vee (\sim \neg b \wedge \nabla \sim a) = (\nabla \sim b \wedge \neg \sim a) \vee (\sim \neg a \wedge \sim \nabla b) \vee \neg b \vee \sim a \vee$   
 $\vee (\sim \neg b \wedge \nabla \sim a) = (\nabla \sim b \wedge \neg \sim a) \vee ((1 \wedge (\sim \nabla b \vee \neg \sim b \vee \sim a))) \vee$   
 $\vee (\sim \neg b \wedge \nabla \sim a) = ((1 \wedge (\neg \sim a \vee \sim \nabla b \vee \neg \sim b \vee \sim a)) \vee (\sim \neg b \wedge \nabla \sim a)) =$

$$= (\neg a \vee \neg b \vee \neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg b \vee \neg a) = 1$$

8- Si  $x = 1$  et  $x \rightarrow y = 1$  alors  $y = 1$  (Modus Ponens)

D'après  $x = 1$  et  $x \rightarrow y = 1$  on a  $1 \rightarrow y =$

$$= \neg 1 \vee \neg 1 \vee y = 1. \text{ Mais } \neg 1 = 0, \neg 1 = 0, \text{ alors } y = 1.$$

C'est un fait bien connu que les conditions 2-, 3- et 8- entraînent que l'implication faible satisfait au théorème de la déduction.

Nous aborderons le problème de caractériser les s.d. d'une A.H.T.I. au moyen de l'implication faible.

A cet égard on démontre le résultat suivant.

Théorème 6. Pour qu'une partie  $D$  d'une A.H.T.I.  $A$  soit un s.d. il faut et il suffit que  $D$  satisfasse aux conditions

$$D'1- \quad 1 \in D$$

$$D'2- \quad \text{Modus Ponens} . \text{ Si } a, a \rightarrow b \in D \text{ alors } b \in D .$$

Démonstration.

La condition est nécessaire. Soit  $D$  un s.d.. Dès que  $D$  satisfait aux conditions  $D1-$ ,  $D2-$  et  $D3-$  on voit que  $D'1$  est aussi vérifiée. Montrons  $D'2$ . Supposons

que (1)  $a \in D$  et (2)  $a \rightarrow b = \Gamma a \vee \nabla \sim a \vee b \in D$ . Si  
 (3)  $b \notin D$  alors  $D$  est un filtre propre, donc il existe un filtre premier  $P$  tel que  $D \subseteq P$  et (4)  $b \notin P$ .  
 Par ailleurs, d'après (1) et en vertu du théorème 4 on voit que (5)  $\nabla \sim a \in D \subseteq P$  et (6)  $\nabla \sim \nabla \sim a = \sim \nabla \sim a =$   
 $= \Delta a \in D \subseteq P$ . Mais  $\nabla \sim a \wedge \nabla \sim \sim a = 0$  et  $\Delta a \wedge \Gamma a = 0$ ,  
 alors de (5) et (6) on tire respectivement (7)  $\nabla \sim a \notin P$   
 et (8)  $\Gamma a \notin P$ . Comme  $P$  est premier, les conditions  
 (2), (7) et (8) entraînent  $b \in P$ , ce qui contredit (4).

La condition est suffisante. Soit  $D$  une partie que satisfait aux conditions  $D'1$  et  $D'2$ , alors  $D1-$  est évidemment vérifiée. Pour montrer  $D2-$ , supposons (1)  $a, a \Rightarrow b \in D$ . D'après  $6-$  et  $1-$  on voit que (2)  $(a \Rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) = 1 \in D$ , et de (1) et (2) on tire, en vertu de  $D'2-$  que (3)  $a \rightarrow b \in D$ . D'après (1) et (3) et en raison aussi de  $D'2-$  on a de même  $b \in D$ .

Reste à montrer  $D3-$ . Supposons que (1)  $a \Rightarrow b \in D$ . D'après (7) on a (2)  $(a \Rightarrow b) \rightarrow (\sim b \Rightarrow \sim a) = 1 \in D$  et de (1) et (2) on tire, en vertu de  $D'2$  que  $\sim b \Rightarrow \sim a \in D$ .

Remarque 1. Dans les cas particuliers des algèbres de Lukasiewicz trivalentes et des algèbres de Boole involutives la définition de  $a \rightarrow b = \neg a \vee \neg a \vee b$  coïncide avec les expressions données auparavant.

Remarque 2. Nous avons indiqué plus haut la construction de l'algèbre quotient  $A/D$  au moyen de la définition  $x \equiv y \pmod{D}$  si et seulement si (1)  $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \in D$ . Mais en général il ne faut pas croire qu'on puisse remplacer (1) par (2)  $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \in D$ . Considérons par exemple les éléments  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  de l'algèbre  $S_9$ . L'ensemble  $D = \{1\}$  est un s.d.,  $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = 1 \in D$  tandis que  $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) = 0 \notin D$ .

### III- S.D. MAXIMAUX ET SIMPLES

Un s.d. est dit maximal s'il est propre et s'il n'est pas contenu, comme partie propre, dans un autre s.d. propre.

La famille de tous les s.d. propres ordonnée par inclusion est inductive supérieurement. D'après le

lemme de Zorn, chaque s.d. propre est contenu dans un s.d. maximal.

En tenant compte des propriétés 2-, 3-, 5- et 8- auxquelles l'implication faible satisfait et la caractérisation des s.d. donnée au paragraphe II on conclut que l'intersection de tous les s.d. maximaux d'une A.H.T.I. est réduite à l'ensemble  $\{1\}$  (A. Monteiro, 1960 a, 1969a et 1970) . Ceci revient à dire que les A.H.T.I. sont semi-simples.

Nous allons maintenant caractériser les s.d. maximaux d'une algèbre A au moyen des ultrafiltres de A .

Remarquons que:

Lemme 1. Si  $D$  est un s.d. et  $P$  un filtre premier tel que  $D \subseteq P$  alors  $D \subseteq \varphi(P)$  .

Démonstration.

Si  $D \not\subseteq \varphi(P)$  il existerait un élément  $d$  tel que (1)  $d \in P$  et (2)  $d \notin \varphi(P)$  . La condition (2) équivaut à dire que (3)  $d \in \sim P$  , c'est-à-dire (4)  $\sim d \in P$  . En raison de (1) comme  $D$  est un s.d. il existerait un (5)  $d' \in D \subseteq P$  tel que (6)  $\sim d \wedge d' = 0$  . De (4), (5)

et (6) on tire  $0 \in P$ , ce qui contredit le fait d'être  $P$  un filtre premier.

En général l'intersection  $P \wedge \varphi(P)$  n'est pas un s.d.. Il suffit de considérer dans l'algèbre  $S_9$  le filtre  $P = F(d)$ ,  $\varphi(P) = F(b)$ ;  $P \wedge \varphi(P) = F(f)$  n'est pas un s.d. car  $1 \Rightarrow f = f \in F(f)$ , mais  $\sim f \Rightarrow \sim 1 = a \Rightarrow 0 = e \notin F(f)$ .

Il y a lieu, d'après les caractéristiques de cet exemple d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 7. Si  $U_1$  et  $U_2$  sont deux ultrafiltres tels

que  $\varphi(U_2) \subseteq U_1$ ,  $\varphi(U_1) \subseteq U_2$ , alors

$S = \varphi(U_1) \wedge \varphi(U_2)$  est un s.d. propre.

Démonstration.

$S$  est un filtre propre puisque  $\varphi(U_1)$  et  $\varphi(U_2)$  sont filtres propres. Il reste alors à montrer que  $S$  vérifie la condition (D). Supposons que (1)  $d \in S$  alors  $d \in \varphi(U_1)$  et  $d \in \varphi(U_2)$ , c'est-à-dire (2)  $\sim d \notin U_1$  et (3)  $\sim d \notin U_2$ . De (2), (3) et du fait que  $U_1$  et  $U_2$  sont ultrafiltres on déduit (4)  $\sim \sim d \in U_1 \wedge U_2$ .



De plus (5)  $\nabla \sim d \wedge \neg \sim d = 0$  et de (4) et (5) on tire  
 (6)  $\nabla \sim d \notin U_1$  et (7)  $\nabla \sim d \notin U_2$ , c'est-à-dire (8)  
 $\nabla \sim d \notin \varphi(U_2)$  et (9)  $\nabla \sim d \notin \varphi(U_1)$ . Mais  
 $\nabla \sim d \vee \neg \sim d = 1$  et les filtres  $\varphi(U_1)$  et  $\varphi(U_2)$  sont  
 premiers alors de (8) et (9) on a  $d' = \neg \sim d \in$   
 $\in \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) = S$ . Comme  $\sim d \wedge \neg \sim d = 0$  la condition  
 (D) est satisfaite.

Théorème 8. Si  $P$  est un filtre premier tel que  $P \subseteq \varphi(P)$   
 alors  $P$  est un s.d. maximal.

Démonstration.

Le fait d'être  $P$  un s.d. est une conséquence im-  
 médiate du théorème précédent.

Reste à montrer que  $P$  est maximal. Supposons qu'il  
 n'en soit pas ainsi. Alors il existerait un s.d.  $M$  pro-  
 pre tel que (1)  $P \subset M$ . Soit  $x$  un élément tel que (2)  
 $x \in M$  et (3)  $x \notin P$ . De (2) on déduit (4)  $\sim x \notin M$ ,  
 et de (1) et (4) on a (5)  $\sim x \notin P$  et (6)  $x \notin \sim P$ ,  
 c'est-à-dire (7)  $x \in \varphi(P)$ . De (2) et (7) on tire  
 (8)  $M \subseteq \varphi(P)$ .

D'après (1) et (8) on conclut (9)  $P \subset M \subseteq \varphi(P)$

et comme l'algèbre est trivalente on en déduit (10)  
 $M = \varphi(P)$ . D'ailleurs, (3) entraîne (11)  $\sim x \notin \sim P$ ,  
 c'est-à-dire (12)  $\sim x \in \varphi(P) = M$ , ce qui contredit (4).  
 On a bien la maximalité de  $P$ .

Définition 6. Un s.d.  $S$  est dit simple s'il existe  
 deux ultrafiltres  $U_1$  et  $U_2$ , avec  
 $\varphi(U_2) \subseteq U_1$ ,  $\varphi(U_1) \subseteq U_2$ , tels que  
 $S = \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2)$ .

Théorème 9. Tout s.d. propre  $D$  d'une A.H.T.I. est  
 contenu dans un s.d. simple.

Démonstration.

Soit  $D$  un s.d. propre et  $d \in D$ . Alors  $\sim d \notin D$ .  
 Comme  $D$  est un filtre propre il existe un filtre premier  
 $P$  tel que  $D \subseteq P$  et  $\sim d \notin P$ . D'après le lemme 1,  
 $D \subseteq \varphi(P)$ , c'est-à-dire  $D \subseteq P \cap \varphi(P)$ .

L'un des deux filtres  $P$  et  $\varphi(P)$  est minimal.

Supposons par exemple que  $P$  est minimal.

a- Si  $P \subseteq \varphi(P)$ , en prenant  $U_1 = U_2 = \varphi(P)$  on dé-  
 duit  $\varphi(U_1) = \varphi(U_2) = P$  et alors  $D \subseteq S = \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2)$ .

où  $S$  est un s.d. simple.

b- Si  $P \notin \mathcal{F}(P)$ , il existe un ultrafiltre  $U$  tel que  $P \subseteq U$  et  $\mathcal{F}(U) \subseteq \mathcal{F}(P)$ . En posant  $U_1 = U$  et  $U_2 = \mathcal{F}(P)$  on conclut  $D \subseteq S = \mathcal{F}(U_1) \wedge \mathcal{F}(U_2)$ , où  $S$  est un s.d. simple.

On établit de même si  $\mathcal{F}(P)$  est minimal.

Nous allons donner dans ce qui suit une caractérisation des s.d. maximaux d'une A.H.T.I. moyennant les ultrafiltres de l'algèbre.

Théorème 10. Pour qu'un s.d.  $M$  soit maximal dans une A.H.T.I. il faut et il suffit qu'il soit simple.

Démonstration.

La condition est nécessaire. Soit  $M$  un s.d. maximal. Comme  $M$  est propre, d'après le théorème 9, il est contenu dans un s.d. simple  $S$ . En tenant compte de la maximalité de  $M$  on a  $M = S$  et  $M$  est simple.

La condition est suffisante. Soit  $S$  un s.d. simple. Il existe donc deux ultrafiltres  $U_1$  et  $U_2$  tels que

$$S = \varphi(U_1) \wedge \varphi(U_2) , \varphi(U_1) \subseteq U_2 , \varphi(U_2) \subseteq U_1 .$$

Si  $S$  n'est pas maximal il existerait un s.d.  $M$  propre tel que  $S \subset M$ . D'après le théorème 9 il existe deux ultrafiltres  $U_1'$  et  $U_2'$  tels que  $M \subseteq \varphi(U_1') \wedge \varphi(U_2')$ ,  $\varphi(U_1') \subseteq U_2'$ ,  $\varphi(U_2') \subseteq U_1'$ , alors  $S = \varphi(U_1) \wedge \varphi(U_2) \subset \varphi(U_1') \wedge \varphi(U_2')$ . Il en résulte:

$$(1) \quad \varphi(U_1) \wedge \varphi(U_2) \subset \varphi(U_1') \quad \text{et}$$

$$(2) \quad \varphi(U_1) \wedge \varphi(U_2) \subset \varphi(U_2') .$$

Comme  $\varphi(U_1')$  et  $\varphi(U_2')$  sont filtres premiers minimaux, de (1) et (2) on tire respectivement:

$$(3) \quad \varphi(U_1) = \varphi(U_1') \quad \text{ou} \quad (4) \quad \varphi(U_2) = \varphi(U_1') \quad \text{et}$$

$$(5) \quad \varphi(U_1) = \varphi(U_2') \quad \text{ou} \quad (6) \quad \varphi(U_2) = \varphi(U_2') .$$

Si (3) et (5) sont valables on a (7)  $M \subseteq \varphi(U_1') = \varphi(U_2') = \varphi(U_1) \subseteq U_2$ , et alors (8)  $M \subseteq \varphi(U_2)$ . De

(7) et (8) on conclut (9)  $M \subseteq \varphi(U_1) \wedge \varphi(U_2) = S$ , ce qui est inexacte.

Une démonstration analogue montre le théorème lorsque (4) et (6) sont valables.

Si l'on aurait (4) et (5) ou (3) et (6) alors  $S = M$ , ce qui est aussi inexacte. Ceci achève la dé-

monstration.

#### IV- S.D. COMPLETEMENT IRREDUCTIBLES.

##### THEOREME DE REPRESENTATION.

Parmi tous les s.d. d'une A.H.T.I. nous allons considérer avec Birkhoff et Frink, 1948, les s.d. complètement irréductibles.

Définition 7. Un s.d. propre  $D$  est dit complètement irréductible si et seulement si  $D = \bigcap_{i \in I} D_i$  entraîne qu'il existe un indice  $i_0 \in I$  tel que  $D = D_{i_0}$ . Autrement dit, si  $D$  ne peut pas s'exprimer comme une intersection des s.d. autres que lui-même.

L'existence de s.d. complètement irréductibles dans une A.H.T.I. est assurée par les lemmes suivants.

Lemme 2. Etant donné un s.d. (propre)  $D$  et un élément

$a \notin D$  il existe un s.d.  $M$  maximal parmi tous les s.d. contenant  $D$  et ne contenant pas l'élément  $\underline{a}$ .

Lemme 3. Un s.d.  $D$  est complètement irréductible si et seulement s'il existe un élément  $a \notin D$  tel que  $D$  est un s.d. maximal parmi tous les s.d. ne contenant pas l'élément  $\underline{a}$ .

D'après les lemmes 2 et 3 on tire aisément:

Théorème 11. Tout s.d. propre  $D$  est l'intersection des s.d. complètement irréductibles.

Théorème 12. Tout s.d. complètement irréductible et un s.d. simple.

Démonstration.

Soit  $D$  un s.d. complètement irréductible, il existe donc un élément  $a \notin D$  tel que  $D$  est un s.d. maximal parmi tous les s.d. ne contenant pas l'élément  $\underline{a}$ . Comme  $D$  est en particulier un filtre, il existe un filtre premier  $P$  maximal par rapport à  $\underline{a}$  tel que

(1)  $D \subseteq P$  . Alors (2)  $D \subseteq \varphi(P)$  . Etant donnés les filtres  $P$  et  $\varphi(P)$  , l'un des deux est minimal. Supposons par exemple que  $P$  est minimal. Dans ce cas il existe un ultrafiltre  $U$  tel que (3)  $P \subseteq U$  , c'est-à-dire (4)  $\varphi(U) \subseteq \varphi(P)$  . Mais (5)  $D \subseteq U$  , d'où (6)  $D \subseteq \varphi(U)$  . D'après (1) à (6) on conclut que  $D$  est contenu dans un s.d. simple  $S = P \cap \varphi(U)$  . De même si  $\varphi(P)$  est minimal.

De plus  $a \notin S$  car  $a \notin P$  . En raison de la maximalité de  $D$  parmi les s.d. ne contenant pas l'élément  $a$  , on déduit  $D = S$  et  $D$  est un s.d. simple.

En tenant compte des théorèmes donnés plus haut on a:

Corollaire. Tout s.d. propre  $D$  est l'intersection de s.d. simples.

En rapprochant les théorèmes 10 et 12 et le lemme 3 on conclut: dans une A.H.T.I. les notions de s.d. simple, s.d. maximal et s.d. complètement irréductible sont équivalentes.

Dans ce qui suit nous allons montrer un théorème de représentation.

Théorème 13. Toute algèbre  $A$  ayant plus d'un élément est isomorphe à un sous-produit direct des algèbres quotients  $A/M_i$ , où  $\{M_i\}_{i \in I}$  est la famille de tous les s.d. simples de  $A$ .

Démonstration.

Soit  $\{M_i\}_{i \in I}$  la famille de tous les s.d. simples de  $A$ . Cette famille n'est pas vide, puisque comme  $A$  possède plus d'un élément le s.d.  $D = \{1\}$  est propre et en conséquence il est l'intersection des s.d. simples. Pour chaque  $i \in I$  considérons l'algèbre quotient  $E_i = A/M_i$ . Soit  $h_i$  l'homomorphisme canonique de  $A$  sur  $E_i$  et  $E = \prod_{i \in I} E_i$  le produit direct de ces algèbres. On notera  $x = (x_i)_{i \in I}$  les éléments de  $E$ .

Pour chaque  $a \in A$  posons  $h(a) = (h_i(a))_{i \in I}$ .  $h$  est une application de  $A$  dans  $E$ . De plus:

1-  $h$  est un isomorphisme de  $A$  dans  $E$ . En effet  $h$  est évidemment un homomorphisme de  $A$  dans  $E$  et soient  $a$  et  $b$  deux éléments distincts de  $A$ . Si  $a \not\in b$  il existe un filtre premier  $P$  tel que  $a \in P$



et  $b \notin P$ . Or, l'un des deux filtres  $P$  et  $\mathcal{Y}(P)$  est minimal. Si par exemple  $P$  est minimal il existe un ultrafiltre  $U$  tel que  $P \subseteq U$ . L'intersection  $M = P \cap \mathcal{Y}(U)$  est un s.d. simple et par rapport à la relation d'équivalence modulo  $M$  les éléments  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas à la même classe car s'il était  $a \equiv b \pmod{M}$  il serait  $a \Rightarrow b \in S \subseteq P$  et comme  $a \in P$  d'après le modus ponens on aurait  $b \in P$ , ce qui n'est pas vrai. De même si  $\mathcal{Y}(P)$  est minimal. Donc  $h_i(a) \neq h_i(b)$  et  $h(a) \neq h(b)$ .

2- Soit  $A' = h(A)$ . Alors  $A'$  est une sous-algèbre de  $E$  isomorphe à  $A$ .

3- Pour chaque  $i \in I$ ,  $\prod_i(A') = E_i$ , où  $\prod_i$  est la projection de  $A'$  sur l'axe  $E_i$ .

D'après 1-, 2- et 3- on établit l'assertion.

Lorsque  $A$  est finie, le résultat précédent

s'énonce:

Théorème 14. Si les s.d. maximaux d'une algèbre finie  $A$

sont  $M_1, M_2, \dots, M_n$  alors

$$A \cong A/M_1 \times A/M_2 \times \dots \times A/M_n.$$

Démonstration.

D'après le théorème précédent  $A$  est isomorphe à une sous-algèbre  $A'$  du produit direct  $A/M_1 \times A/M_2 \times \dots \times A/M_n$  et l'isomorphisme  $h$  est donné par (1)  $h(a) = (h_1(a), h_2(a), \dots, h_n(a))$ , où  $h_i$  est l'homomorphisme canonique de  $A$  sur  $A/M_i$ .

Dans ce cadre pour montrer le théorème il suffit de prouver que l'application définie par (1) est surjective, c'est-à-dire, étant donnée la  $n$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , où  $a_i \in A/M_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  il existe un élément  $a \in A$  tel que  $h_i(a) = a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Etant donné l'élément  $a_i \in A/M_i$ , l'ensemble  $A_i = \{x \in A \text{ tels que } h_i(x) = a_i\}$  n'est pas vide car l'homomorphisme canonique  $h_i$  est une application de  $A$  sur  $A/M_i$ .

Soit  $x_i = \bigwedge_{x \in A_i} x$ . Puisque l'algèbre  $A$  est finie  $x_i \in A_i$ , c'est-à-dire  $h_i(x_i) = a_i$ .

Considérons l'élément  $a = \bigvee_{i=1}^n x_i$ .

Montrons précisément que  $h(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , c'est-à-dire  $h_i(a) = a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Si pour un indice  $i$ ,  $h_i(a) \neq a_i$  on a  $a \notin A_i$ ,  
c'est-à-dire  $a \not\equiv x_i \pmod{M_i}$ .

Etant donné  $M_i$  il existe deux ultrafiltres  $U_1$  et  
 $U_2$  tels que  $M_i = \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2)$ ,  $\varphi(U_1) \subseteq U_2$ ,

$\varphi(U_2) \subseteq U_1$ . Notons  $P_k$ ,  $1 \leq k \leq 4$  ces quatre filtres  
premiers. Puisque  $a \not\equiv x_i$  et  $x_i \in a$  l'un des filtres  
premiers  $P_k$  vérifie les conditions  $a \in P_k$  et  $x_i \notin P_k$ .

Du fait d'être  $a = \bigvee_{i=1}^n x_i \in P_k$  et  $P_k$  premier il  
existe un  $x_j$  tel que  $x_j \in P_k$ . Mais  $x_i \notin P_k$  alors on  
a  $x_j \in P_k$  où  $i \neq j$ .

Considérons le filtre principal  $F(a_j) \subseteq A/M_j$ . Le  
filtre principal  $F(x_j)$  coïncide avec  $h_j^{-1}(F(a_j))$

d'après les équivalences:

$$\begin{aligned} x \in F(x_j) &\iff x_j \leq x \iff h_j(x_j) \leq h_j(x) \iff a_j \leq h_j(x) \iff \\ &\iff h_j(x) \in F(a_j) \iff x \in h_j^{-1}(F(a_j)). \end{aligned}$$

De plus,

$M_j \subseteq F(x_j) \subseteq P_k$  et en conséquence  $M_j \subseteq \varphi(P_k)$ . L'un des

filtres  $P_k$ ,  $\varphi(P_k)$  est minimal. Supposons par exemple

que  $P_k$  est minimal. Donc il existe un ultrafiltre  $U$

tel que  $P_k \subseteq U$ , et en conséquence  $M_j \subseteq \varphi(U)$  et

## CHAPITRE IV

### ALGÈBRES SIMPLES

Il y a lieu de préciser, d'après le résultats précédents, la structure des algèbres  $A/M$ , où  $M$  est un s.d. simple de  $A$ .

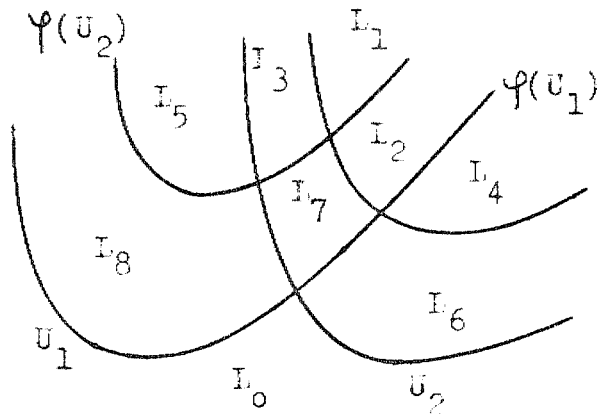
Nous appellerons A.H.T.I. ayant neuf, quatre, trois et deux éléments à toute algèbre isomorphe respectivement à l'algèbre  $S_9$ ,  $S_4$ ,  $S_3$  ou  $S_2$ .

Théorème 15. Si  $A$  est une A.H.T.I. et  $M$  un s.d.

simple de  $A$ , alors l'algèbre quotient  $A' = A/M$  est une A.H.T.I. ayant neuf, quatre, trois ou deux éléments.

Démonstration.

Soit  $M$  un s.d. simple de  $A$ . Il existe alors deux ultrafiltres  $U_1$  et  $U_2$  tels que  $M = \varphi(U_1) \wedge \varphi(U_2)$ ,  $\varphi(U_1) \subseteq U_2$ ,  $\varphi(U_2) \subseteq U_1$ .



Nous sommes ainsi amenés à distinguer les sous-ensembles que voici:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \varphi(U_1) \wedge \varphi(U_2) & ; & L_2 = \varphi(U_1) \wedge U_1 \wedge \complement \varphi(U_2) & ; \\
 L_3 &= \varphi(U_2) \wedge U_2 \wedge \complement \varphi(U_1) & ; & L_4 = \varphi(U_1) \wedge \complement U_1 & ; \\
 L_5 &= \varphi(U_2) \wedge \complement U_2 & ; & L_6 = U_2 \wedge \complement (U_1 \cup \varphi(U_1)) & ; \\
 L_7 &= U_1 \wedge U_2 \wedge \complement (\varphi(U_1) \cup \varphi(U_2)) & ; & &
 \end{aligned}$$

$$L_8 = U_1 \cap C(U_2 \cup \varphi(U_2)) \quad ; \quad L_0 = C(U_1 \cup U_2) .$$

Chacun de ces sous-ensembles est une classe d'équivalence modulo  $M$  . En effet:

1-  $L_1$  est une classe d'équivalence modulo  $M$  , car

$$L_1 = |1| = M .$$

2-  $L_2$  est une classe d'équivalence modulo  $M$  .

Soient  $a, b \in L_2$  , alors (1)  $a, b \in \varphi(U_1)$  ,  
 (2)  $a, b \in U_1$  et (3)  $a, b \notin \varphi(U_2)$  . Mais  $b \leq a \Rightarrow b$  ,  
 $a \leq b \Rightarrow a$  et  $\varphi(U_1)$  est un filtre, donc de (1) on  
 déduit (4)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in \varphi(U_1)$  . De plus  $\varphi(U_2)$  est  
 maximal par rapport aux éléments  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  puisque  
 $a, b \in U_1 \cap C \varphi(U_2)$  , alors (5)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in \varphi(U_2)$  .  
 De (4) et (5) on tire (6)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in M$  ,  
 d'où  $a \equiv b \pmod{M}$  .

Si  $x$  est un élément tel que  $a \equiv x \pmod{M}$  , on  
 a (7)  $a \Rightarrow x \in M$  . D'autre part (8)  $M \subseteq \varphi(U_1)$  , et de  
 (7) et (8) on conclut (9)  $a \Rightarrow x \in \varphi(U_1)$  . De (1)  
 et (9) d'après le modus ponens, (10)  $x \in \varphi(U_1)$  .  
 D'ailleurs (11)  $M \subseteq U_1$  , et de (7) et (11) on ti-  
 re (12)  $a \Rightarrow x \in U_1$  . De (2) et (12) en raison du

modus ponens, (13)  $x \in U_1$ . De (10) et (13) on déduit (14)  $x \in U_1 \cap \varphi(U_1)$ . Mais  $a \notin L_1$  et  $L_1$  est une classe d'équivalence alors de  $a \equiv x$  on conclut (15)  $x \notin L_1$ . De (14) et (15) on a  $x \in L_2$ .

3-  $L_3$  est une classe d'équivalence modulo M.

La démonstration est analogue à celle précédente.

4-  $L_4$  est une classe d'équivalence modulo M.

Soient  $a, b \in L_4$ , alors (1)  $a, b \in \varphi(U_1)$  et (2)  $a, b \in \text{CU}_1$ . Mais  $a \leq b \Rightarrow a$ ,  $b \leq a \Rightarrow b$  et  $\varphi(U_1)$  est un filtre donc de (1) on déduit (3)  $a \Rightarrow b$ ,  $b \Rightarrow a \in \varphi(U_1)$ . De (2) et en vertu d'être  $U_1$  un ultrafiltre on a (4)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in U_1$ . De (3) et (4) on tire (5)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in U_1 \cap \varphi(U_1)$ . Or (6)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \notin L_2$ , parce que dans le cas contraire  $\varphi(U_2)$  serait maximal par rapport aux éléments  $a \Rightarrow b$  et  $b \Rightarrow a$  et alors  $a \Rightarrow (a \Rightarrow b) = a \Rightarrow b \in \varphi(U_2)$  et  $b \Rightarrow (b \Rightarrow a) = b \Rightarrow a \in \varphi(U_2)$ , ce qui est impossible car  $\varphi(U_2)$  et  $L_2$  sont disjoints. De (5) et (6) on conclut  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in M$ , c'est-à-dire  $a \equiv b \pmod{M}$ .

Si  $x$  est un élément tel que  $a \equiv x \pmod{M}$ , alors (7)  $a \Rightarrow x \in M \subseteq \varphi(U_1)$ . De (1) et (7) d'après le

modus ponens, (8)  $x \in \varphi(U_1)$ . Si  $x \in L_1 \cup L_2$ , comme  $L_1$  et  $L_2$  sont deux classes d'équivalences on aurait  $a \in L_1 \cup L_2$ , ce qui contredit (2). Donc (9)  $x \notin L_1 \cup L_2$ . De (8) et (9) on a bien  $x \in L_4$ .

5-  $L_5$  est une classe d'équivalence modulo M.

La démonstration est analogue à celle précédente.

6-  $L_6$  est une classe d'équivalence modulo M.

Soient  $a, b \in L_6$  alors (1)  $a, b \in U_2$ , (2)  $a, b \notin U_1$ , (3)  $a, b \notin \varphi(U_1)$ . Comme  $U_1$  est un ultrafiltre, de (2) on déduit (4)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in U_1$ . De (1) et (3) on a que  $\varphi(U_1)$  est maximal par rapport aux éléments  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$ , alors (5)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in \varphi(U_1)$ . De (4) et (5) on tire (6)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in U_1 \cap \varphi(U_1)$ . Mais (7)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \notin L_2$ , puisque dans le cas contraire  $\varphi(U_2)$  serait maximal par rapport aux éléments  $a \Rightarrow b$  et  $b \Rightarrow a$ , et alors  $a \Rightarrow (a \Rightarrow b) = a \Rightarrow b \in \varphi(U_2)$  et  $b \Rightarrow (b \Rightarrow a) = b \Rightarrow a \in \varphi(U_2)$ , ce qui est impossible car  $\varphi(U_2)$  et  $L_2$  sont disjoints. De (6) et (7) on conclut (8)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in M$ , c'est-à-dire  $a \equiv x \pmod{M}$ .

Si  $x$  est un élément tel que  $a \equiv x \pmod{M}$  alors (9)  $a \Rightarrow x \in M \subseteq U_2$ . De (1) et (9) en raison du mo-



dus ponens (10)  $x \in U_2$ . Si  $x \in L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ , comme  $L_1, L_2, L_3$  et  $L_4$  sont classes d'équivalences on aurait  $a \in L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ , ce qui contredit (2) ou (3). Alors (11)  $x \notin L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ . Supposons que  $x \in L_7$ . De  $a \equiv x$  on a (12)  $x \Rightarrow a \in M \subseteq U_1$ . De  $x \in L_7$  on déduit (13)  $x \in U_1$ . De (12) et (13), d'après le modus ponens  $a \in U_1$ , ce qui contredit (2), alors (14)  $x \notin L_7$ . De (11) et (14) on conclut (15)  $x \notin L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_7$ . De (10) et (15),  $x \in L_6$ .

7-  $L_7$  est une classe d'équivalence modulo  $M$ .

Soient  $a, b \in L_7$ , alors (1)  $a, b \in U_1 \cap U_2$ ,  
 (2)  $a, b \notin \varphi(U_1)$  et (3)  $a, b \notin \varphi(U_2)$ . De (1) et (3),  $\varphi(U_2)$  est un filtre maximal par rapport aux éléments  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$ , donc (4)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in \varphi(U_2)$ . De (1) et (2),  $\varphi(U_1)$  est un filtre maximal par rapport aux éléments  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$ , alors (5)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in \varphi(U_1)$ . De (4) et (5) on obtient (6)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) = M$ , c'est-à-dire  $a \equiv b \pmod{M}$ .

Si  $x$  est un élément tel que  $a \equiv x \pmod{M}$  alors (7)  $a \Rightarrow x \in M$ . De (1), (7) et (8)  $M \subseteq \varphi(U_2) \subseteq U_1$ , d'après le modus ponens on a (9)  $x \in U_1$ . De (1), (7)

et (10)  $M \in \mathcal{F}(U_1) \subseteq U_2$ , d'après aussi le modus ponens on déduit (11)  $x \in U_2$ . De (9) et (11) on conclut (12)  $x \in U_1 \wedge U_2$ . Si  $x \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$ , comme  $L_1, L_2$  et  $L_3$  sont classes d'équivalences on aurait  $a \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$ , ce qui contredit (2) ou (3), donc (13)  $x \notin L_1 \cup L_2 \cup L_3$ . De (12) et (13),  $x \in L_7$ .

8-  $L_8$  est une classe d'équivalence modulo  $M$ .

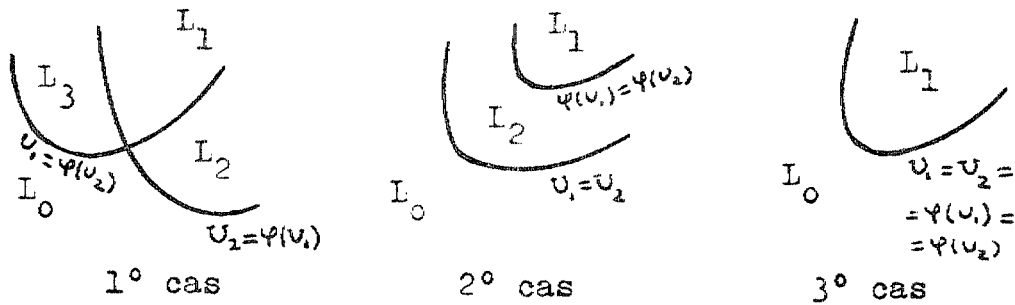
La démonstration est analogue à celle précédente.

9-  $L_0$  est une classe d'équivalence modulo  $M$ .

Soient  $a, b \in L_0$ , alors (1)  $a, b \notin U_1 \cup U_2$ . Mais  $U_1$  et  $U_2$  sont deux ultrafiltres, donc de (1) on déduit (2)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in U_1 \wedge U_2$ . Le filtre  $\mathcal{F}(U_2)$  est maximal par rapport aux éléments de  $U_1 \wedge \mathcal{C}\mathcal{F}(U_2)$  et  $\mathcal{F}(U_1)$  est maximal par rapport à ceux de  $U_2 \wedge \mathcal{C}\mathcal{F}(U_1)$ , alors de (1) et (2) on tire (3)  $a \Rightarrow (a \Rightarrow b) = a \Rightarrow b \in \mathcal{F}(U_1) \wedge \mathcal{F}(U_2)$  et (4)  $b \Rightarrow (b \Rightarrow a) = b \Rightarrow a \in \mathcal{F}(U_1) \wedge \mathcal{F}(U_2)$ . De (3) et (4) on conclut (5)  $a \Rightarrow b, b \Rightarrow a \in M$ , c'est-à-dire  $a \equiv b \pmod{M}$ .

Soit  $x$  un élément tel que  $a \equiv x \pmod{M}$ . Comme  $L_i, i \neq 0$  sont classes d'équivalence, si  $x \in L_i, i \neq 0$  on aurait  $a \in L_i$ , ce qui est impossible, alors  $x \in L_0$ .

Dans le diagramme ci-dessous nous avons les trois cas particuliers qui sont à distinguer:



$1^{\circ}$  cas.  $U_1 \neq U_2$  ,  $\varphi(U_1) = U_2$  ,  $\varphi(U_2) = U_1$

Il existe quatre classes d'équivalence modulo  $M$ :

$$L_1 = \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) \quad ; \quad L_2 = U_2 \cap CU_1$$

$$L_3 = U_1 \cap CU_2 \quad ; \quad L_0 = C(U_1 \cup U_2)$$

$2^{\circ}$  cas.  $U_1 = U_2$  ,  $\varphi(U_1) = \varphi(U_2)$  ,  $\varphi(U_1) \subset U_1$

Il existe trois classes d'équivalence modulo  $M$ :

$$L_1 = \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) \quad ; \quad L_2 = U_1 \cap C\varphi(U_1) \quad ; \quad L_0 = CU_1 .$$

$3^{\circ}$  cas.  $U_1 = U_2 = \varphi(U_1) = \varphi(U_2)$  .

Il existe deux classes d'équivalence modulo  $M$ :

$$L_1 = \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) \quad ; \quad L_0 = CU_1$$

En tenant compte des différents cas considérés, l'algèbre quotient  $A' = A/M$  est une algèbre ayant respecti-

vement neuf, quatre, trois ou deux éléments.

Etablissons le diagramme de chacune de ces quatre algèbres.

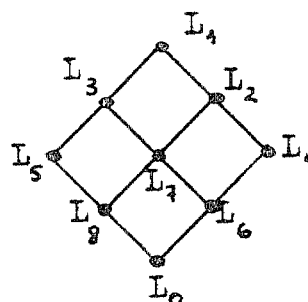
Soit  $a_i \in L_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 8$  alors  $|a_i| = L_i$ .

Si  $a_i \leq b_i$  sur  $A$ , on a  $a_i \Rightarrow b_i = 1$  d'où

$$|a_i \Rightarrow b_i| = |a_i| \Rightarrow |b_i| = |1| = M$$

c'est-à-dire  $|a_i| \leq |b_i|$  sur  $A'$ .

L'algèbre  $A' = A/M$  est celle indiquée dans le diagramme ci-près.



Le tableau correspondant à la opération  $\sim$  sur  $A'$  est le suivant:

x	$\sim x$
$L_0$	$L_1$
$L_8$	$L_3$
$L_6$	$L_2$

x	$\sim x$
$L_5$	$L_5$
$L_7$	$L_7$
$L_4$	$L_4$

x	$\sim x$
$L_3$	$L_8$
$L_2$	$L_6$
$L_1$	$L_0$

En effet:

1-  $\sim L_0 = L_1$ . Soit  $x \in L_0$ , alors (1)  $x \notin U_1$  et (2)  $x \notin U_2$ . Les conditions (1) et (2) sont équivalentes à (3)  $\sim x \in \varphi(U_1)$  et (4)  $\sim x \in \varphi(U_2)$ . De (3) et (4) on tire  $\sim x \in L_1$ .

2-  $\sim L_8 = L_3$ . Soit  $x \in L_8$ , alors (1)  $x \in U_1$ ,

(2)  $x \notin \varphi(U_2)$  et (3)  $x \notin U_2$ . De (1) on déduit (4)  $\sim x \notin \varphi(U_1)$ . De (2) on a (5)  $\sim x \in U_2$ . De (3) on conclut (6)  $\sim x \in \varphi(U_2)$ . D'après (4), (5) et (6) on tire  $\sim x \in L_3$ .

3-  $\sim L_6 = L_2$ . (voir la démonstration de 2-)

4-  $\sim L_5 = L_5$ . Soit  $x \in L_5$ , alors (1)  $x \in \varphi(U_2)$ , (2)  $x \notin U_2$ . De (1) on a (3)  $\sim x \notin U_2$  et de (2) on déduit (4)  $\sim x \in \varphi(U_2)$ . De (3) et (4) on tire  $\sim x \in L_5$ .

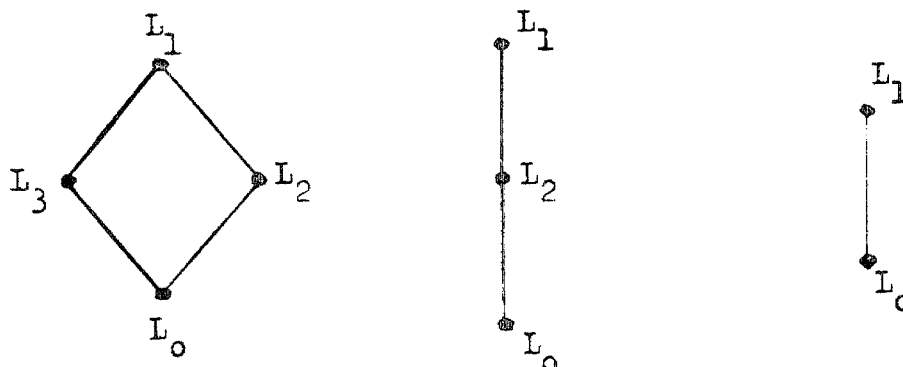
5-  $\sim L_7 = L_7$ . Soit  $x \in L_7$ , alors (1)  $x \in U_1$ , (2)  $x \in U_2$ , (3)  $x \notin \varphi(U_1)$  et (4)  $x \notin \varphi(U_2)$ . De (1) on déduit (5)  $\sim x \notin \varphi(U_1)$ ; de (2) on a (6)  $\sim x \notin \varphi(U_2)$ ; de (3) on obtient (7)  $\sim x \in U_1$  et d'après (4) on conclut (8)  $\sim x \in U_2$ . De (5), (6), (7) et (8) on tire  $\sim x \in L_7$ .

6-  $\sim L_4 = L_4$ . (voir la démonstration de 4-)

Comme  $A'$  est un A.H.T.I. on déduit que  $\sim L_3 = L_8$ ,  $\sim L_2 = L_6$  et  $\sim L_1 = L_0$ . Alors l'algèbre  $A'$  est une A.H.T.I. ayant neuf éléments.

En particulier:

1°, 2° et 3° cas. Les algèbres  $A' = A/M$  sont respectivement les A.H.T.I. indiquées par les diagrammes:



Les théorèmes 13 et 15 se combinent pour

donner le suivant:

Théorème 16. Toute algèbre  $A$  ayant plus d'un élément est isomorphe à un sous-produit direct d'algèbres  $S_2, S_3, S_4, S_9$ .

Démonstration.

Soit  $\{M_i\}_{i \in I}$  la famille de tous les s.d. simples de  $A$ . Chaque quotient  $A/M_i$  est une algèbre ayant neuf, quatre, trois ou deux éléments, alors nous pouvons considérer l'application biunivoque  $r_i: A/M_i \xrightarrow{\text{sur}} S^i$ , où  $S^i$  est une des algèbres  $S_2, S_3, S_4, S_9$ .

Si  $h_i$  est l'homomorphisme canonique de  $A$  sur  $A/M_i$ , la composition  $p_i = r_i \circ h_i$  est une application de  $A \rightarrow S^i$ . Pour chaque  $a \in A$  posons

$p(a) = (p_i(a))_{i \in I}$ . Il en résulte que  $A$  est isomorphe à un sous-produit direct d'algèbres  $S_k$ ,  $k = 2, 3, 4$  ou  $9$ .

Si l'algèbre  $A$  est finie, elle est isomorphe à un produit direct d'algèbres  $S_k$ ,  $k = 2, 3, 4$  ou  $9$ . Remarquons que si  $A$  est une algèbre de type fini, où  $G$  est le système fini de générateurs, la restriction de  $h: A \rightarrow S_k$  à  $G$  est une application  $f: G \rightarrow S_k$ . Dès que  $G$  est un ensemble fini il n'y a donc qu'un nombre fini d'applications différentes de  $G$  dans  $S_k$ ,  $k = 2, 3, 4$  ou  $9$ . Le nombre d'homomorphismes distincts de  $A$  dans  $S_k$  est alors fini; par conséquent l'algèbre  $A$  est isomorphe à un sous-produit direct d'un nombre fini d'algèbres  $S_k$  et  $A$  est donc une algèbre finie.

Définition 8. Une algèbre  $A$  ayant plus d'un élément est dite simple si elle n'a pas d'images homomorphes autres que  $A$  elle-même et l'algèbre réduite à un seul élément.

Les A.H.T.I. simples sont caractérisées au mo-

ven de l'énoncé suivant:

Théorème 17. Toute A.H.T.I. simple est isomorphe à une  
des algèbres  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_9$ .

Démonstration.

Soit  $A$  une A.H.T.I. simple. Comme  $A$  possède plus d'un élément il existe un s.d. simple  $M$ . Alors l'algèbre  $A' = A/M$  est une algèbre  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  ou  $S_9$ . Dans chacun des ces cas l'algèbre  $A'$  possède plus d'un élément et alors  $A' \cong S_2$  ou  $A' \cong S_3$  ou  $A' \cong S_4$  ou  $A' \cong S_9$ .

En raison des théorèmes précédents on montre:

Corollaire. Toute A.H.T.I. ayant plus d'un élément est isomorphe à un sous-produit direct d'algèbres simples.

Définition 9. Une algèbre  $A$  est dite sous-directement irréductible si pour toute famille non vide  $\{A_i\}_{i \in I}$  d'A.H.T.I. telle que  $A$  est isomorphe à un sous-produit direct  $A'$  de  $\{A_i\}_{i \in I}$ , il existe un indice  $i \in I$  de



sorte que l'homomorphisme  $\prod_i$  de  $A'$  sur  $A_i$  soit un isomorphisme.

Cette définition étant posée, il résulte du théorème 16 que l'on peut énoncer:

Corollaire. Les uniques A.H.T.I. sous-directement irréductibles sont les algèbres simples.

-----oOo-----

## CHAPITRE V

### ALGÈBRES LIBRES

#### I- DEFINITION ET EXISTENCE

La notion d'A.H.T.I. libre se définit à la manière habituelle.

Définition 10. Soit  $L$  une A.H.T.I. et  $G$  un sous-ensemble de  $L$  tel que  $\overline{G} = L$ . On dit que  $G$  est un ystème de générateurs li-

bres de  $L$  si toute application  $f$  de  $G$  dans une algèbre  $A$  quelconque peut se prolonger en un homomorphisme  $h$  de  $L$  dans  $A$ , c'est-à-dire si  $f(g) = h(g)$  pour tout  $g \in G$ .

L'homomorphisme  $h$  est univoquement déterminé par les images des éléments  $g$  de  $G$ ; autrement dit si  $h$  et  $h'$  sont deux homomorphismes de  $L$  dans  $A$  tels que  $h(g) = h'(g)$  pour tout  $g \in G$  alors  $h = h'$ .

Définition 11. Une A.H.T.I. est dite libre si elle possède un système de générateurs libres.

Comme les A.H.T.I. sont équationnellement définissables, il existe des A.H.T.I. libres engendrées par un système arbitraire de générateurs libres; de plus deux A.H.T.I. libres engendrées par un système de générateurs libres d'égal puissance sont isomorphes (G. Birkhoff).

Soit  $L$  une algèbre libre. Si la puissance de  $G$  est  $C$  nous dirons que  $L$  est l'algèbre libre ayant

$C$  générateurs.

Nous aborderons le problème de donner une construction de l'algèbre libre  $L$  ayant  $C$  générateurs.

En ce qui concerne l'étude des symétries dans les calculs propositionnels, Moisil a considéré le calcul propositionnel symétrique général, 1942, p.77 .

Ce calcul peut se caractériser en ajoutant au calcul propositionnel positif de Hilbert et Bernays un nouveau connectif, dit la négation et les axiomes et règles exprimant précisément les caractéristiques de la symétrie: le principe de la double négation et la loi de contraposition.

Soit  $I$  un ensemble de puissance  $C$  et considérons l'ensemble de symboles que voici:

- 1- une famille non vide  $G = \{g_i\}_{i \in I}$ , de symboles  $g_i$  dits variables propositionnelles
- 2- les connectifs  $\Rightarrow, \wedge, \vee, \sim$ .
- 3- les parenthèses  $(, )$ .

L'ensemble  $\mathcal{L}$  des formules (bien formées) est le plus petit ensemble tel que:

- F1-  $g_i \in \mathcal{L}$ , pour tout  $i \in I$

F2- si  $X, Y \in \mathcal{L}$  alors  $(X \Rightarrow Y), (X \wedge Y), (X \vee Y) \in \mathcal{L}$

F3- si  $X \in \mathcal{L}$  alors  $(\sim X) \in \mathcal{L}$ .

L'ensemble  $\mathcal{L}$  des tautologies est indiqué d'après les axiomes (schémas) et règles suivants:

HB) les axiomes du calcul propositionnel positif de Hilbert et Bernays

N1)  $(\sim\sim X \Rightarrow X)$

N2)  $(X \Rightarrow \sim\sim X)$

R1)  $\frac{X, (X \Rightarrow Y)}{Y}$  (Modus Ponens)

R2)  $\frac{(X \Rightarrow Y)}{(\sim Y \Rightarrow \sim X)}$  (Contraposition)

Parmi les propriétés plus intéressantes qui peuvent se déduire de ces axiomes nous avons les formules de A. de Morgan exprimant le fait d'être  $\sim$  une dualité:

$$(\sim(X \wedge Y) \Rightarrow (\sim X \vee \sim Y))$$

$$(\sim(X \vee Y) \Rightarrow (\sim X \wedge \sim Y))$$

$$((\sim X \vee \sim Y) \Rightarrow \sim(X \wedge Y))$$

$$((\sim X \wedge \sim Y) \Rightarrow \sim(X \vee Y))$$

Un cas particulier du calcul propositionnel

symétrique général s'obtient en ajoutant aux précédents l'axiome:

$$T3- ((X \Rightarrow Z) \Rightarrow Y) \Rightarrow (((Y \Rightarrow X) \Rightarrow Y) \Rightarrow Y)$$

(références de cet axiome on peut les trouver dans:

I. Thomas, 1962 et L. Monteiro, 1964, p.13-14) .

Remarquons que si au calcul ainsi obtenu nous ajoutons en outre l'axiome:

$$K- ((X \wedge \sim X) \Rightarrow (Y \vee \sim Y))$$

nous avons à faire avec un calcul propositionnel équivalent au calcul propositionnel trivalente de Lukasiewicz (L. Iturrioz, 1965, p.150)

Pour tout couple  $(X, Y)$  d'éléments de  $\mathcal{L}$  nous posons  $X \leq Y$  si et seulement si  $(X \Rightarrow Y) \in \mathcal{Z}$ . La relation  $\leq$  est réflexive et transitive et d'après N1) et N2) nous avons  $X \leq \sim \sim X$  et  $\sim \sim X \leq X$ . La règle R1) peut s'écrire: si  $X \leq Y$  alors  $\sim Y \leq \sim X$ .

On dit que  $X \equiv Y \pmod{\mathcal{Z}}$  si et seulement si  $(X \Rightarrow Y) \in \mathcal{Z}$  et  $(Y \Rightarrow X) \in \mathcal{Z}$ . C'est un fait bien connu ce que  $\equiv$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{L}$  compatible avec les opérations binaires  $\Rightarrow, \wedge, \vee$ . De

plus,  $\equiv$  est compatible avec l'opération  $\sim$ , c'est-à-dire si  $X \equiv Y \pmod{\mathcal{L}}$  alors  $\sim X \equiv \sim Y \pmod{\mathcal{L}}$ . En effet, de  $X \equiv Y \pmod{\mathcal{L}}$  on déduit  $X \leq Y$  et  $Y \leq X$  et d'après R2) on a  $\sim Y \leq \sim X$  et  $\sim X \leq \sim Y$ , ce qui montre bien  $\sim X \equiv \sim Y \pmod{\mathcal{L}}$ .

Pour chaque formule  $X$  on notera  $|X|$  la classe d'équivalence contenant  $X$  et  $1$  la classe  $|X \Rightarrow X| = \mathcal{L}$ . Soit  $L = \mathcal{L}/\mathcal{L}$  l'ensemble de tous les classes d'équivalence modulo  $\mathcal{L}$ .

D'une façon naturelle posons entre les éléments de  $L$ :

$$|X| \wedge |Y| = |X \wedge Y| \quad ; \quad |X| \vee |Y| = |X \vee Y|$$

$$|X| \Rightarrow |Y| = |X \Rightarrow Y| \quad ; \quad \sim |X| = |\sim X|$$

$$\neg |X| = |X| \Rightarrow 0 \quad , \quad \text{où } 0 = \sim 1 \quad .$$

De N1) et N2) on tire  $\sim \sim |X| = |X|$  et d'après R2), si  $|X| \leq |Y|$  alors  $1 = |X \Rightarrow Y| = |\sim Y \Rightarrow \sim X|$ , autrement dit  $\sim |Y| \leq \sim |X|$ . De plus  $\sim(|X| \wedge |Y|) = \sim |X| \vee \sim |Y|$ .

L'algèbre de Lindenbaum  $L$  est une algèbre de Heyting trivalente (L. Monteiro, 1964, p.14) et le système  $(L, \sim)$  est une A.H.T.I.

La structure des formules de  $\mathcal{L}$  exige que l'ensemble d'éléments  $\{g_i\}$  engendre  $L$ .

En suivant une marche tout à fait analogue à celle de H. Rasiowa et R. Sikorski, 1963, p.256-262, pour le calcul propositionnel classique nous allons interpréter les éléments de  $\mathcal{L}$ .

Soit  $A$  une A.H.T.I. donnée. Tout élément  $a = (a_i)_{i \in I}$  du produit cartésien  $A^G$  est dite une valuation dans  $A$ .

Chaque formule  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  peut s'interpréter comme une transformation  $\alpha_A: A^G \longrightarrow A$ , dite fonction polynomiale. Soit  $\mathcal{L}_A$  l'ensemble de ces formules.

Une formule  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  est dite valide dans une algèbre  $A$  si la fonction polynomiale  $\alpha_A$  est identiquement égale à 1 dans  $A$ , c'est-à-dire si  $\alpha_A(a) = 1$  pour toute valuation  $\underline{a}$  dans  $A$ .

On notera  $T_A$  l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales valides dans  $A$ . On vérifie aussitôt que les axiomes de  $\mathcal{L}$  sont des formules valides dans  $A$ , c'est-à-dire  $\mathcal{L} \subseteq T_A$ .

Si  $g_i, g_j$  sont deux variables proposition-



nelles distinctes on a  $|g_i| \neq |g_j|$ . S'il n'en était pas ainsi  $g_i \Rightarrow g_j$  serait une tautologie et alors valide dans toute algèbre  $A$ , autrement dit  $(g_i \Rightarrow g_j)_A(a) = 1$  pour toute valuation  $\underline{a}$  dans  $A$ , ce qui en général n'est pas vrai.

Soit  $|T_A|$  la famille de toutes les classes d'équivalences de  $L$  contenant des éléments de  $T_A$ . L'ensemble  $|T_A|$  est un s.d. de  $L$  et en posant  $\varphi: L \xrightarrow{\text{sur}} \mathcal{L}_A$  comme  $\varphi(|\alpha|) = \alpha_A$  on prouve que  $L/|T_A| \cong \mathcal{L}_A$ .

Soit  $f: |G| \rightarrow A$  où  $|G| = \{|g_i|\}_{i \in I}$  et considérons la valuation  $k = (f(|g_i|))_{i \in I} \in A^G$ .

Soit  $s$  l'homomorphisme de  $\mathcal{L}_A \rightarrow A$  tel que  $s(\alpha_A) = \alpha_A(k)$ . La composition  $h = s \circ \varphi$  est un homomorphisme de  $L \rightarrow A$  qui prolonge  $f$ . Donc l'algèbre de Lindenbaum  $(L, \sim)$  est l'A.H.T.I. libre ayant  $C$  générateurs, où  $C$  est la puissance de l'ensemble  $I$ .

## II- MATRICE CARACTERISTIQUE FINIE

Etant donnée une algèbre  $A$  nous avons introduit l'ensemble  $T_A$  de toutes les fonctions polynomiales valides dans  $A$  et montré que toute tautologie est une formule valide dans  $A$ .

Définition 12. Une algèbre  $A$  est dite matrice caractéristique pour le calcul propositionnel introduit si  $\mathcal{Z} = T_A$ .

Le calcul propositionnel en considération possède une matrice caractéristique finie. De façon précise nous montrerons que  $\mathcal{Z} = T_{S_9}$ .

L'élément  $g^0 = (|g_i|)_{i \in I}$  de  $L^G$  est dit la valuation canonique ou point caractéristique dans  $L = \mathcal{L}/\mathcal{Z}$ .

Etant donnée une formule  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  on montre aisément  $\alpha_L(g^0) = |\alpha| \in L$ .

Du fait d'être l'algèbre  $S_9$  une A.H.T.I. on tire  $\mathcal{Z} \subseteq T_{S_9}$ . Pour établir l'autre inclusion soit  $\alpha$

une formule valide dans  $S_9$ , d'où elle est valide dans  $S_2, S_3, S_4$ . La formule  $\alpha$  est donc valide dans tout produit direct d'algèbres  $S_2, S_3, S_4, S_9$  et dans toute sous-algèbre de ce produit direct. En raison du théorème 16  $\alpha$  est valide dans toute A.H.T.I. .

En particulier  $\alpha$  est valide dans  $L$ , c'est-à-dire  $\alpha_L(a) = 1$  pour toute valuation  $a$ . Ainsi pour  $a = g^0$  on a  $\alpha_L(g^0) = 1$ . Alors  $|\alpha| = \alpha_L(g^0) = 1$  et  $\alpha \in \mathcal{Z}$ .

Ce résultat fournit une méthode de décision par rapport au calcul propositionnel en considération.

### III- THEOREME DE REPRESENTATION POUR LES

#### A.H.T.I. LIBRES DE TYPE FINI

Soit  $L_n$  l'A.H.T.I. libre engendrée par un ensemble fini  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Comme  $L_n$  est de type fini est finie. Nous savons alors que  $L_n$  est isomorphe à un produit direct d'algèbres simples. Nous allons préciser, par la suite, ce résultat.

Théorème 18. L'algèbre  $L_n$  ayant  $n$  générateurs libres est isomorphe au produit direct d'algèbres simples que voici:

$$L_n \cong S_9 \frac{9^n - (4^n + 3^n) + 2^n}{2} \times S_4 \frac{4^n - 2^n}{2} \times S_3 \frac{3^n - 2^n}{2} \times S_2 \frac{2^n}{2} .$$

Démonstration.

Soit  $M$  un s.d. simple de  $L_n$  et  $h$  l'homomorphisme canonique de  $L_n \rightarrow L_n/M$ .  $G$  étant un système de générateurs de  $L_n$ ,  $h(G)$  est un système de générateurs de  $h(L_n) = L_n/M$ . L'algèbre  $L_n/M$  est isomorphe à une des algèbres simples  $S_2, S_3, S_4$  ou  $S_9$  d'après l'isomorphisme  $r$ , on voit donc que la restriction de l'homomorphisme  $h$  à  $G$  est une application  $f: G \rightarrow S_k$ ,  $k = 2, 3, 4$  ou  $9$ , donnée par  $f(g) = (r \circ h)(g)$ .

Inversement étant donnée  $f: G \rightarrow S_k$ ,  $k = 2, 3, 4$  ou  $9$  considérons l'automorphisme  $\alpha$  de  $S_k$  défini par l'égalité  $\alpha x = \sim -x$ . La composition  $f_2 = \alpha \circ f_1$  est une application de  $G \rightarrow S_k$ . Comme  $L_n$  est une A.H.T.I. libre les applications  $f_1$  et  $f_2$  de

$G \rightarrow S_k$  peuvent se prolonger en deux homomorphismes  $h_1$  et  $h_2$  de  $L_n \rightarrow S_k$ . L'homomorphisme  $\alpha \circ h_1: L_n \rightarrow S_k$  coïncide avec l'homomorphisme  $h_2$  sur  $G$  puisque  $(\alpha \circ h_1)(g) = \alpha(h_1(g)) = \alpha(f_1(g)) = (\alpha \circ f_1)(g) = f_2(g) = h_2(g)$ , donc  $h_2 = \alpha \circ h_1$ , et le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L_n & \xrightarrow{h_1} & S_k \\
 & \searrow h_2 & \downarrow \alpha \\
 & & S_k
 \end{array}$$

est commutatif, autrement dit  $N(h_1) = N(h_2)$ .

L'algèbre  $S_k$  est simple alors elle possède un unique s.d. propre, le  $\{1\}$ , qui est maximal et par conséquent  $N(h_1) = h_1^{-1}(1) = N(h_2) = h_2^{-1}(1)$  est un s.d. simple de  $L_n$ .

Nous voyons ainsi que tout s.d. simple  $M$  de  $L_n$  donne lieu à une application  $f: G \rightarrow S_k$ ,  $k=2,3,4$  ou  $9$ , mais si  $S_k$  possède un automorphisme propre  $\alpha$  alors les applications différentes  $f_1$  et  $\alpha \circ f_1$  de  $G \rightarrow S_k$  donnent lieu au même s.d. simple  $M$  de  $L_n$ .

Cela étant, il faut préciser d'abord le nombre de s.d. simples  $M$  de  $L_n$  tels que  $L_n/M \cong S_2$ . Dans ce

cas la restriction de l'homomorphisme  $h: L_n \longrightarrow S_2$  à  $G$  est une application  $f: G \longrightarrow S_2$ . Le nombre de telles applications est  $2^n$ . Comme  $S_2$  n'a pas d'automorphismes propres il y a une correspondance biunivoque entre les applications considérées et les noyaux des homomorphismes extensions. D'où résulte bien qu'il existe  $2^n$  s.d. simples  $M$  de  $L_n$  tels que  $L_n/M \cong S_2$ .

Un raisonnement du même genre va nous permettre déterminer le nombre de s.d. simples  $M$  tels que  $L_n/M \cong S_3$ . L'ensemble  $h(G)$  engendrant  $L_n/M \cong S_3$  il doit exister un  $g \in G$  tel que  $h(g) = c \in S_3$ . Le nombre de s.d. simples  $M$  de  $L_n$  tels que  $L_n/M \cong S_3$  est donc  $3^n - 2^n$ .

Si  $M$  est un s.d. simple de  $L_n$  tel que  $L_n/M \cong S_4$  et  $h$  l'homomorphisme canonique associé il doit exister un  $g \in G$  tel que  $h(g) = d$  ou  $e$  de  $S_4$ . Ces homomorphismes donnent lieu à  $4^n - 2^n$  applications différentes de  $G \longrightarrow S_4$ . Du fait que  $S_4$  possède un automorphisme propre, le nombre de s.d. simples  $M$  tels que  $L_n/M \cong S_4$  est  $\frac{4^n - 2^n}{2}$ .

Finalement si  $L_n/M \cong S_9$  et  $h$  est l'homomorphisme canonique associé il doit exister un  $g \in G$  tel que

teurs coïncide avec le nombre d'éléments de l'algèbre de Lukasiewicz trivalente libre ayant  $2n$  générateurs, ce qui a été conjecturé par A. Monteiro.

Si  $L_n^*$  est l'A.H.T.I. centrée ayant  $n$  générateurs libres, les quotients  $L_n^*/M$  sont isomorphes à  $S_9$  ou  $S_3$ . D'après une démonstration analogue à celle du théorème précédent on déduit que:

$$L_n^* \cong S_9^{\frac{9^n - 3^n}{2}} \times S_3^{3^n}.$$

Soit  $L_1$  l'A.H.T.I. ayant un générateur libre  $g$ . D'après le théorème 18 :

$$L_1 \cong S_9^2 \times S_4 \times S_3 \times S_2^2.$$


Du fait que  $L_1$  est libre tout homomorphisme  $h : L_1 \rightarrow S_k$ ,  $k = 2, 3, 4$  ou  $9$  doit transformer le générateur  $g$  de  $L_1$  dans un générateur de  $S_k$ . Les algèbres  $S_4$  et  $S_9$  possèdent un automorphisme propre, donc si  $h$  est un homomorphisme de  $L_1 \rightarrow S_k$ ,  $k = 4, 9$ , l'homomorphisme  $\alpha \circ h$  de  $L_1 \rightarrow S_k$ ,  $k = 4, 9$  donne lieu à la même image homomorphe. Nous pouvons en conclure:

avons:


$$N(\mathcal{L}_n) = 3^{3^n - 2^n} \cdot 2^{2^n} \quad (\text{A. Monteiro, 1966 b}) .$$

Soit  $\mathcal{L}_{2n}$  l'algèbre de Lukasiewicz trivalente ayant  $2n$  générateurs libres et  $\alpha$  une involution sur l'ensemble de générateurs définie par:  $\alpha(g_i) = g_{n+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Comme  $\mathcal{L}_{2n}$  est libre l'application  $\alpha$  de  $G$  sur  $G$  peut se prolonger en un homomorphisme  $\alpha$  de l'algèbre  $\mathcal{L}_{2n}$  sur elle-même. Montrons que le couple  $(\mathcal{L}_{2n}, \alpha)$  est l'A.H.T.I. ayant  $n$  générateurs libres  $(L_n, \nu)$ . En effet,  $g_1, g_2, \dots, g_n$  engendrent  $L_n$  et soit  $f$  une application de l'ensemble de ces générateurs dans une A.H.T.I.  $(A, \beta)$ . L'application  $f$  peut se prolonger en une application de  $G \rightarrow A$  en posant  $f(g_{n+1}) = f(\alpha(g_i)) = \beta f(g_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Comme l'algèbre  $\mathcal{L}_{2n}$  est libre,  $f$  se prolonge en un homomorphisme  $h$  de  $L_n$  dans  $A$ , en tant qu'algèbre de Lukasiewicz trivalente. De plus pour tout  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  on a  $f(\alpha(g_i)) = \beta f(g_i)$  et alors  $h(\alpha(x)) = \beta h(x)$  pour tout  $x \in L_n$ . Nous pouvons donc conclure que le nombre d'éléments de l'A.H.T.I. libre ayant  $n$  généra-





$$2^n + 4^n - 2^n = 4^n$$



$$3^n - 2^n + 9^n - (4^n + 3^n) + 2^n = 9^n - 4^n$$


Si l'on désigne par  $N(L_n)$  le nombre d'éléments de l'algèbre libre  $L_n$  alors:

$$N(L_n) = 3^{9^n - 4^n} \cdot 2^{4^n} \quad ; \quad \text{ce qui équivaut}$$

à:


$$N(L_n) = 3^{3^{2n} - 2^{2n}} \cdot 2^{2^{2n}}$$

En particulier, si  $L_n$  est une algèbre de Lukasiewicz trivalente les filtres  $P$  et  $\Psi(P)$  sont comparables; pour cette raison dans  $(\Pi_n, \Psi)$  les ensembles du type



$$4^n - 2^n$$

et



$$9^n - (4^n + 3^n) + 2^n$$

ne peuvent pas apparaître. Donc si  $\mathcal{L}_n$  est l'algèbre de Lukasiewicz trivalente ayant  $n$  générateurs libres et  $N(\mathcal{L}_n)$  désigne le nombre de ses éléments, nous

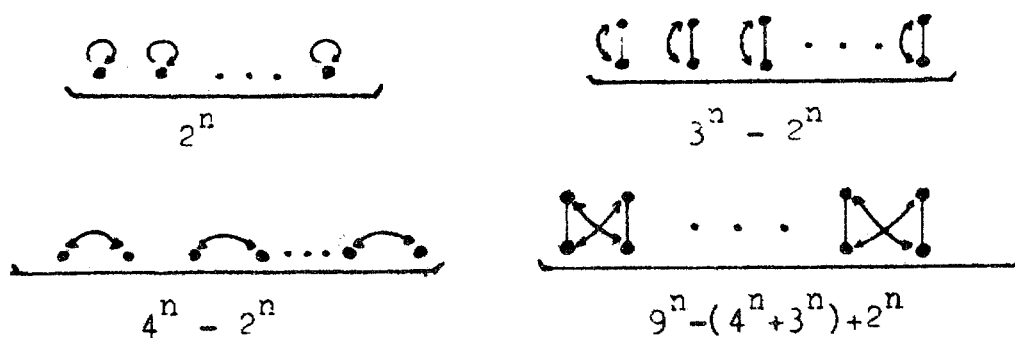
$h(g) = a, b, f$  ou  $g$  de  $S_9$ . Ces homomorphismes se correspondent avec  $9^n - (4^n + 3^n) + 2^n$  applications distincts de  $G \rightarrow S_9$ . L'algèbre  $S_9$  possède un automorphisme propre alors le nombre de s.d. simples  $M$  tels que  $L_n/M \cong S_9$  est  $\frac{9^n - (4^n + 3^n) + 2^n}{2}$ .

En résumé:

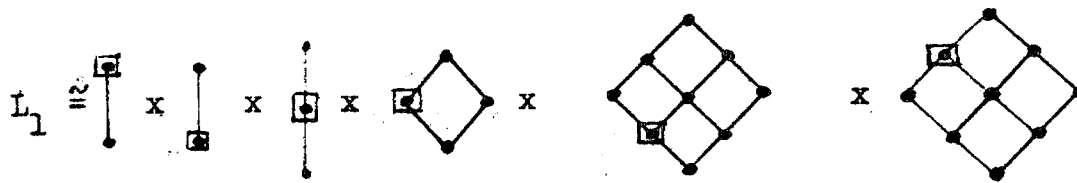
$$L_n \cong S_9 \times S_4 \times S_3 \times S_2$$

$\frac{9^n - (4^n + 3^n) + 2^n}{2}$      $\frac{4^n - 2^n}{2}$      $3^n - 2^n$      $2^n$

Remarque. Le système déterminant  $(\bar{\Pi}_n, \psi)$  de  $L_n$  est la somme cardinale des ensembles suivants:



Du fait que  $L_n$  est un treillis distributif il en résulte que, en tant que treillis,  $L_n$  est le produit cartésien des chaînes indiquées ci-dessous:



et le système déterminant  $(\Pi_1, \Upsilon)$  est le suivant:



-----oOo-----

## C H A P I T R E VI

### CONSTRUCTION DE L'A.H.T.I. LIBRE AU MOYEN D'ENSEMBLES

Il y a lieu de donner une construction de l'A.H.T.I. libre  $L$  ayant  $\mathcal{C}$  générateurs à l'aide d'ensembles. La construction que nous allons faire a été suggérée par les résultats connus dans les cas des algèbres de Boole, algèbres de Morgan et algèbres de Lukasiewicz trivalentes (Stone, 1937 a , O. Chateaubriand et A. Monteiro, 1969, A. Monteiro et R. Cignoli, 1965, p.152-153) .

Pour cela il faut d'abord noter quelques résultats concernant l'A.H.T.I. libre  $L_1$  ayant un générateur.

1- Etant donné un générateur  $g$  nous cherchons la forme des éléments de l'algèbre libre  $L_1$ .

Comme les opérations  $\neg$  et  $\sim$  satisfont aux propriétés

$$\begin{aligned} \neg(x \wedge y) &= \neg x \vee \neg y & ; & \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \\ \sim(x \wedge y) &= \sim x \vee \sim y & ; & \sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y \end{aligned}$$

nous pouvons supposer que celles s'appliquent directement sur le générateur  $g$ .

Appliquons nous les opérateurs  $\neg$  et  $\sim$  sur  $g$ . De proche en proche on obtient les dix éléments distincts  $g, \neg g, \sim g, \nabla g, \neg \sim g, \nabla \sim g, \sim \nabla g, \neg \nabla g, \Delta g,$  où  $\nabla g = \neg \neg g$ ,  $\Delta g = \sim \nabla \sim g$ ,  $\neg \nabla g = \sim \neg \sim g$ .

Parmi toutes les intersections finies que nous pouvons calculer avec eux considérons les suivantes:

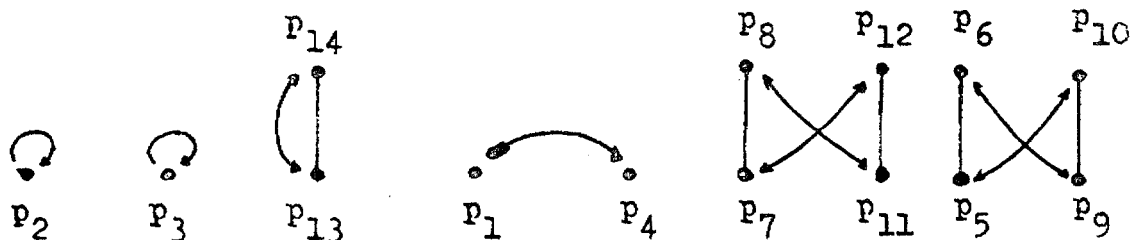
$$\begin{aligned} p_1 &= \Delta g \wedge \sim \nabla g & ; & p_2 = \Delta g \wedge \neg \sim g \\ p_3 &= \sim \nabla g \wedge \neg g & ; & p_4 = \neg g \wedge \neg \sim g \\ p_5 &= \Delta g \wedge \sim g \wedge \sim \neg g & ; & p_6 = \Delta g \wedge \nabla \sim g \wedge \sim \neg g \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
p_7 = g \wedge \sim \nabla g \wedge \Gamma g & ; p_8 = \nabla g \wedge \sim \nabla g \wedge \Gamma g \\
p_9 = g \wedge \Gamma g \wedge \sim \nabla g & ; p_{10} = \nabla g \wedge \Gamma g \wedge \sim \nabla g \\
p_{11} = \sim g \wedge \sim \Gamma g \wedge \sim \nabla g & ; p_{12} = \nabla \sim g \wedge \sim \Gamma g \wedge \sim \nabla g \\
p_{13} = g \wedge \sim g \wedge \Gamma g \wedge \sim \nabla g & ; p_{14} = \nabla g \wedge \nabla \sim g \wedge \Gamma g \wedge \sim \nabla g
\end{array}$$

Comme  $L_1$  est un treillis distributif fini chaque filtre premier  $P$  est engendré par un élément premier  $p$ , c'est-à-dire  $P = P(p)$ ,  $p$  premier, et tout élément  $x \in L_1$ ,  $x \neq 0$  peut s'exprimer comme une borne supérieure d'éléments premiers.

Les éléments  $p_1, p_2, \dots, p_{14}$  indiqués sont précisément les quatorze éléments premiers de  $L_1$ , ce qui peut être prouvé en calculant ces expressions dans chacun des axes de la décomposition de l'algèbre  $L_1$ .

D'une façon schématique:



Tout élément  $x$  de  $L_1$  admet une représentation de la forme:

$$x = \bigvee_{k=1}^{14} (\varepsilon_k \wedge p_k)$$

où  $\varepsilon_k = 0$  ou  $\varepsilon_k = 1$  .

2- Considérons maintenant le cas où le système  $G$  de générateurs est de la forme  $G = \{g_i\}_{i \in I}$  . Pour chaque  $g_i$  nous pouvons construire les éléments  $p_{ik}$  ,  $k = 1, 2, \dots, 14$  .

A l'aide de ces éléments nous considérons les éléments  $x_{ij}$  qui suivent:

$$x_{ij} = \bigvee_{k=1}^{14} (\varepsilon_{jk} \wedge p_{ik}) , \text{ ceux}$$

qui dépendent de  $j$  et  $k$  .

Soit  $R$  le treillis engendré par les éléments  $x_{ij}$  . Tout élément  $x$  de  $R$  peut se mettre sous la forme (Birkhoff, 1948, p.145):

$$x = \bigvee_{r=1}^m \bigwedge_{s=1}^{n(r)} x_{i(r,s)j(r,s)} .$$

Montrons nous que  $R$  est l'A.H.T.I. engendrée par  $G$  .

a-  $g_i, \sim g_i, \neg g_i \in R$  puisque ils peuvent s'exprimer comme une borne supérieure d'éléments premiers.

b-  $\sim x_{ij}, \neg x_{ij} \in R$ .

Comme

$$x_{ij} = \bigvee_{k=1}^{14} (\varepsilon_{jk} \wedge p_{ik}) \quad , \text{ alors}$$

$$(1) \quad \sim x_{ij} = \bigwedge_{k=1}^{14} (\sim \varepsilon_{jk} \vee \sim p_{ik}) \quad \text{et}$$

$$(2) \quad \neg x_{ij} = \bigwedge_{k=1}^{14} (\neg \varepsilon_{jk} \vee \neg p_{ik}) \quad .$$

Les éléments  $\sim p_{ik}$  et  $\neg p_{ik}$  s'expriment comme une borne supérieure d'un nombre fini d'éléments premiers, alors (1) et (2) indiquent le fait que  $\sim x_{ij}$  et  $\neg x_{ij}$  sont bornes inférieures d'un nombre fini d'éléments de  $R$ , donc  $\sim x_{ij}, \neg x_{ij} \in R$ .

c- si  $x \in R$  alors  $\sim x, \neg x \in R$ .

Puisque

$$x = \bigvee_{r=1}^m \bigwedge_{s=1}^{n(r)} x_{i(r,s)j(r,s)} \quad ,$$

on a:

$$\sim x = \bigwedge_{r=1}^m \bigvee_{s=1}^{n(r)} \sim x_{i(r,s)j(r,s)} \quad ,$$

et d'après b- on déduit  $\sim x \in R$ . Un raisonnement ana-



logue permet de montrer que  $\exists x \in R$ .

Il en résulte que  $R$  est une sous-algèbre contenant les générateurs, c'est-à-dire  $\bar{G} \subseteq R$ .

D'autre part tout élément de  $R$  s'obtient en appliquant les opérations  $\wedge, \vee, \sim, \neg$  à partir des éléments de  $G$ , donc  $R \subseteq \bar{G}$ . D'où  $R = \bar{G}$ .

3- Nous allons donner des coordonnées aux éléments premiers  $p_1, p_2, \dots, p_{14}$ . En vertu d'être  $L_1$  un treillis distributif fini il est isomorphe à un anneau d'ensembles. Il suffit de prendre pour chaque  $x \in L_1$  l'ensemble  $s(x)$  de tous les éléments premiers  $p$  tels que  $p \leq x$ .

Dans  $(\Pi_1, \varphi)$  cherchons nous les ensembles de la forme  $s(g), s(-g), s(\sim g), s(\alpha g)$ .

Ainsi:

$$s(g) = \{p_1, p_2, p_5, p_6, p_7, p_9, p_{13}\}$$

$$s(-g) = \{p_3, p_4, p_7, p_9, p_{11}, p_{12}, p_{13}\}$$

$$s(\sim g) = \{p_1, p_3, p_5, p_7, p_8, p_{11}, p_{13}\}$$

$$s(\alpha g) = \{p_2, p_4, p_5, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{13}\}$$

Désignons par  $K_X$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $X$  et à chaque élément premier  $p$  faisons correspondre les coordonnées

$$(K_{s(g)}(p), K_{s(-g)}(p), K_{s(\sim g)}(p), K_{s(\alpha g)}(p)) .$$

On a donc:

$$p_1 = (1, 0, 1, 0) \quad ; \quad p_2 = (1, 0, 0, 1) \quad ; \quad p_3 = (0, 1, 1, 0)$$

$$p_4 = (0, 1, 0, 1) \quad ; \quad p_5 = (1, 0, 1, 1) \quad ; \quad p_6 = (1, 0, 0, 0)$$

$$p_7 = (1, 1, 1, 0) \quad ; \quad p_8 = (0, 0, 1, 0) \quad ; \quad p_9 = (1, 1, 0, 1)$$

$$p_{10} = (0, 0, 0, 1) \quad ; \quad p_{11} = (0, 1, 1, 1) \quad ; \quad p_{12} = (0, 1, 0, 0)$$

$$p_{13} = (1, 1, 1, 1) \quad ; \quad p_{14} = (0, 0, 0, 0) .$$

4- En ce qui concerne la construction de l'A.H.T.I. libre ayant  $\mathbb{C}$  générateurs considérons l'ensemble  $C$  contenant les 14 points donnés plus haut et soient  $\alpha$  et  $\varphi$  deux involutions de  $C$  sur  $C$  définies au moyen des égalités:

$$\alpha(x, y, u, v) = (v, u, y, x)$$

$$\varphi(x, y, u, v) = (1-u, 1-v, 1-x, 1-y)$$

pour tout  $(x, y, u, v) \in C$  .

On vérifie aussitôt  $\varphi \alpha(x, y, u, v) = \alpha \varphi(x, y, u, v)$

Soit  $I$  un ensemble de puissance  $\mathbb{C}$  et considérons le produit  $E = \prod_{i \in I} C_i$  où  $C_i = C$  pour tout  $i \in I$ .

Soit  $E'$  le sous-ensemble de  $E$  contenant les points qui ne possèdent pas, en même temps, une coordonnée  $x_i$  appartenant à l'ensemble  $\{P_5, P_7, P_9, P_{11}, P_{13}\}$  et une autre  $x_j$  dans l'ensemble  $\{P_6, P_8, P_{10}, P_{12}, P_{14}\}$ .

Pour tout  $x = (x_i)_{i \in I} \in E'$  posons:

$$\alpha(x) = (\alpha x_i)_{i \in I} \quad ,$$

$$\varphi(x) = (\varphi x_i)_{i \in I} \quad .$$

Les transformations  $\alpha$  et  $\varphi$  sont deux involutions de  $E'$  sur  $E'$  commutant entre elles.

A l'aide de ces deux involutions  $\alpha$  et  $\varphi$  nous allons définir, pour chaque partie  $X$  de  $E'$  les opérations:

$$\neg X = \mathbb{C}(X \cup \varphi \alpha X)$$

$$\sim X = \mathbb{C} \varphi X$$

$$- X = \mathbb{C} \varphi \alpha X \quad .$$

En posant  $\nabla X = \neg \neg X$  on déduit  $\nabla X = X \cup \varphi \alpha X$ . Comme  $\alpha$  et  $\varphi$  sont deux involutions,

$$\alpha(X \cup Y) = \alpha X \cup \alpha Y ; \alpha(X \cap Y) = \alpha X \cap \alpha Y ;$$

$$\alpha CX = C \alpha X ; \varphi CX = C \varphi X .$$

Pour tout  $i \in I$  soit  $G_i$  l'ensemble de tous les points  $x = (x_i)_{i \in I} \in E'$  dont la coordonnée d'indice  $i$  appartient à l'ensemble  $\{P_1, P_2, P_5, P_6, P_7, P_9, P_{13}\}$ .

Posons  $G = \{G_i\}_{i \in I}$ . Si  $i \neq j$ , d'après la définition de  $G_i$  on déduit  $G_i \neq G_j$  et par conséquent, la puissance de  $G$  est égal à celle de  $I$ .

Pour chaque  $G_i$  prenons les éléments de la forme  $P_{ik}$ ,  $k = 1, \dots, 14$  considérés plus haut. On a:

$$P_{ik} = \left\{ (x_i)_{i \in I} \quad / \quad x_i = P_k \right\}, \text{ si } k=1,2,3,4,5,7,9,11,13$$

$$P_{ik} = \left\{ (x_i)_{i \in I} \quad / \quad x_i \in \{P_{k-1}, P_k\} \right\}, \text{ si } k=6,8,10,12,14$$

Remarquons:

$$\varphi \alpha P_{ik} = P_{ik} \quad , \quad \text{si } k = 1,2,3,4,6,8,10,12,14 \quad ,$$

$$\varphi \alpha P_{ik} = P_{i(k+1)} - P_{ik} \quad , \quad \text{si } k = 5,7,9,11,13 \quad .$$

Montrons que la famille  $\{G_i\}_{i \in I}$  vérifie la

condition:

$$\begin{aligned} A) (P_{ik} \cup \varphi \alpha P_{ik}) \cap (P_{jq} \cup \varphi \alpha P_{jq}) &\subseteq \\ &\subseteq (P_{ik} \cup \varphi \alpha P_{jq}) \cap (P_{jq} \cup \varphi \alpha P_{ik}) \end{aligned}$$

En effet, si  $P_{ik} = \varphi \alpha P_{ik}$ , alors A) est vérifiée puisque

$$P_{ik} \cap (P_{jq} \cup \varphi \alpha P_{jq}) \subseteq P_{ik} \subseteq (P_{ik} \cup \varphi \alpha P_{jq}) \cap (P_{jq} \cup P_{ik}) .$$

De la même manière si  $P_{jq} = \varphi \alpha P_{jq}$ .

Si  $k, q \in \{5, 7, 9, 11, 13\}$  alors

$$\begin{aligned} (1) (P_{ik} \cup \varphi \alpha P_{ik}) \cap (P_{jq} \cup \varphi \alpha P_{jq}) &= \\ &= \left\{ (x_i)_{i \in I} \ / \ x_i \in \{p_k, p_{k+1}\}, \ x_j \in \{p_q, p_{q+1}\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (P_{ik} \cup \varphi \alpha P_{jq}) \cap (P_{jq} \cup \varphi \alpha P_{ik}) &= \\ &= \left\{ (x_i)_{i \in I} \ / \ \begin{array}{l} x_i = p_k \quad \text{et} \quad x_j = p_q \\ x_i = p_{k+1} \quad \text{et} \quad x_j = p_{q+1} \end{array} \quad \text{ou} \right\} \end{aligned}$$

Dès que les points de coordonnées  $x_i = p_k$ ,  $x_j = p_{q+1}$  et  $x_i = p_{k+1}$ ,  $x_j = p_q$ ,  $k, q \in \{5, 7, 9, 11, 13\}$  n'appartient pas à  $E'$ , les ensembles (1) et (2) coïncident.

Il en résulte  $\neg(P_{ik} \cap P_{jq}) = \neg P_{ik} \cup \neg P_{jq}$ ,

et si  $X_{ij} = \bigcup_{k=1}^{14} (\varepsilon_{jk} \cap P_{ik})$  comme  $\neg(X \cup Y) =$

$= \neg X \wedge \neg Y$  , on tire  $\neg(X_{ij} \cap X_{lm}) = \neg X_{ij} \cup \neg X_{lm}$  .

Soit L le treillis distributif des sous-ensembles de  $E'$  engendré par les ensembles  $X_{ij}$  . L satisfait à la condition  $\neg(X \cap Y) = \neg X \cup \neg Y$  .

Montrons que le système  $(L, \alpha)$  est l'A.H.T.I. de sous-ensembles de  $E'$  engendrée par la famille  $G = \{G_i\}_{i \in I}$  . En effet:  $--X = C\varphi\alpha C\varphi\alpha X = X$  ;  $-(X \cap Y) = C\varphi\alpha(X \cap Y) = C\varphi\alpha X \cup C\varphi\alpha Y = -X \cup -Y$  ;  $-X \cup \nabla X = C\varphi\alpha X \cup X \cup \varphi\alpha X = E'$  ;  $X \cap -X = X \cap C\varphi\alpha X = C\varphi\alpha X \cap (X \cup \varphi\alpha X) = -X \cap \nabla X$  ;  $\nabla(X \cap Y) = \neg\neg(X \cap Y) = \neg(\neg X \cup \neg Y) = \neg\neg X \cap \neg\neg Y = \nabla X \cap \nabla Y$  ;  $\alpha(-X) = \alpha C\varphi\alpha X = C\varphi\alpha\alpha X = -\alpha X$  ;  $\alpha(\nabla X) = \alpha(X \cup \varphi\alpha X) = \alpha X \cup \varphi\alpha X = \nabla\alpha X$  .

Finalement, nous allons montrer:

Théorème 19.  $(L, \alpha)$  est l'A.H.T.I. ayant  $\mathcal{C}$  générateurs libres.

Démonstration.

Soit  $A$  une A.H.T.I.. Nous pouvons supposer que  $A$  est une A.H.T.I. de sous-ensembles d'un ensemble  $T$  . Pour chaque  $X \leq T$  soient  $\varphi$  et  $\gamma$  les involutions de  $T$  sur  $T$  telles que:

$$\neg X = C(X \cup \Upsilon \beta X)$$

$$\sim X = C \Upsilon X$$

Soit  $f$  une application de l'ensemble  $G = \{G_i\}_{i \in I}$  dans  $A$ . Posons pour chaque  $i \in I$ ,  $f(G_i) = H_i$ . Nous avons à démontrer qu'il existe un homomorphisme  $h$  de  $L$  dans  $A$  qui est une extension de  $f$ .

Nous allons définir une transformation  $K$  de  $T$  dans  $E'$ . Pour ceci considérons d'abord pour chaque  $t \in T$  l'application  $K_i$  de  $T$  dans  $C_i$  au moyen de l'égalité

$$\begin{aligned} K_i(t) &= (K_{H_i}(t), K_{C \beta \Upsilon H_i}(t), K_{C \Upsilon H_i}(t), K_{\beta H_i}(t)) = \\ &= (K_{H_i}(t), 1 - K_{\beta \Upsilon H_i}(t), 1 - K_{\Upsilon H_i}(t), K_{\beta H_i}(t)). \end{aligned}$$

Soit  $K(t) = (K_i(t))_{i \in I}$ . Montrons que  $K$  est une application de  $T$  dans  $E'$ , c'est-à-dire, que les points  $(K_i(t))_{i \in I}$  ne possèdent pas, en même temps, une coordonnée  $x_i \in \{p_5, p_7, p_9, p_{11}, p_{13}\}$  et une autre

$$x_j \in \{p_6, p_8, p_{10}, p_{12}, p_{14}\}.$$

Supposons que  $\underline{K_i(t) = p_5 = (1, 0, 1, 1)}$  ou  $K_i(t) = \underline{p_{11} = (0, 1, 1, 1)}$  ou  $K_i(t) = \underline{p_{13} = (1, 1, 1, 1)}$ .

Alors  $K_{\Upsilon H_i}(t) = 0$  et  $K_{\beta H_i}(t) = 1$ , c'est-à-dire

$$t \notin \Upsilon H_i \quad \text{et} \quad t \in \beta H_i \quad (1) .$$

Si  $K_j(t) = p_6 = (1, 0, 0, 0)$  ou  $K_j(t) = p_{12} = (0, 1, 0, 0)$   
 ou  $K_j(t) = p_{14} = (0, 0, 0, 0)$ , alors  $K_{\Upsilon H_j}(t) = 1$  et  
 $K_{\beta H_j}(t) = 0$ , donc  $t \in \Upsilon H_j$  et  $t \notin \beta H_j$  (2) .

De (1) et (2) on tire

$$t \in (\Upsilon H_i \cup \beta H_i) \cap (\Upsilon H_j \cup \beta H_j) .$$

En tenant compte de la condition A)

$$(X \cup \Upsilon \beta X) \cap (Y \cup \Upsilon \beta Y) \subseteq (X \cup \Upsilon \beta Y) \cap (Y \cup \Upsilon \beta X) ,$$

$$\text{on a } t \in (\Upsilon H_i \cup \beta H_j) \cap (\Upsilon H_j \cup \beta H_i) ,$$

d'où  $t \in (\Upsilon H_i \cup \beta H_j)$ , c'est-à-dire ou  $t \in \Upsilon H_i$

ou  $t \in \beta H_j$ , ce qui contredit les hypothèses.

Si  $K_j(t) = p_8 = (0, 0, 1, 0)$  ou  $K_j(t) = p_{10} = (0, 0, 0, 1)$ ,

alors  $K_{H_j}(t) = 0$  et  $K_{\beta \Upsilon H_j}(t) = 1$ , c'est-à-dire

$$t \notin H_j \quad \text{et} \quad t \in \beta \Upsilon H_j \quad (3) .$$

De (1) et (3) on tire

$$t \in (\beta H_i \cup \Upsilon H_i) \cap (H_j \cup \Upsilon \beta H_j) \quad \text{et}$$

d'après la condition A),

$$t \in (\beta H_i \cup \Upsilon \beta H_j) \cap (H_j \cup \Upsilon H_i) , \quad \text{d'où}$$



$t \in \Upsilon H_i \cup H_j$  , c'est-à-dire ou  $t \in \Upsilon H_i$  ou  $t \in H_j$  .

contrairement aux hypothèses.

Supposons que  $\underline{K_i(t)} = p_7 = (1,1,1,0)$  ou  $\underline{K_i(t)} = p_9 = (1,1,0,1)$  , alors  $K_{H_i}(t) = 1$  et  $K_{\beta \Upsilon H_i}(t) = 0$  donc  $t \in H_i$  et  $t \notin \beta \Upsilon H_i$  (4) .

Si  $K_j(t) = p_6 = (1,0,0,0)$  ou  $K_j(t) = p_{12} = (0,1,0,0)$  ou  $K_j(t) = p_{14} = (0,0,0,0)$  , alors  $K_{\Upsilon H_j}(t) = 1$  et  $K_{\beta H_j}(t) = 0$  , donc  $t \in \Upsilon H_j$  et  $t \notin \beta H_j$  (5) .

De (4) et (5) on déduit

$$t \in (\beta \Upsilon H_i \cup H_i) \cap (\Upsilon H_j \cup \beta H_j) \text{ et d'après A)}$$

$$t \in (\beta \Upsilon H_i \cup \beta H_j) \cap (\Upsilon H_j \cup H_i) \text{ alors}$$

$t \in \beta \Upsilon H_i \cup \beta H_j$  , c'est-à-dire ou  $t \in \beta \Upsilon H_i$  ou

$t \in \beta H_j$  ce qui contredit les hypothèses.

Si  $K_j(t) = p_8 = (0,0,1,0)$  ou  $K_j(t) = p_{10} = (0,0,0,1)$  , alors  $K_{H_j}(t) = 0$  et  $K_{\beta \Upsilon H_j}(t) = 1$  , c'est-à-dire

$$t \notin H_j \text{ et } t \in \beta \Upsilon H_j \text{ (6) .}$$

De (4) et (6) on conclut

$t \in (\beta\gamma H_i \cup H_i) \cap (\beta\gamma H_j \cup H_j)$  et d'après A)

$t \in (\beta\gamma H_i \cup H_j) \cap (\beta\gamma H_j \cup H_i)$  d'où

$t \in (\beta\gamma H_i \cup H_j)$ , c'est-à-dire ou  $t \in \beta\gamma H_i$  ou  $t \in H_j$ ,

contrairement aux hypothèses.

Soit  $h$  la transformation de  $2^{E'}$  dans  $2^T$  définie par la formule:

pour chaque  $X \in E'$  :  $h(X) = K^{-1}(X)$ .

Il est clair que:

$$h(X \cup Y) = h(X) \cup h(Y)$$

$$h(X \cap Y) = h(X) \cap h(Y)$$

$$h(E') = T$$

Nous allons prouver:

a-  $h(\alpha X) = \beta h(X)$ , autrement dit  $K^{-1}(\alpha X) = \beta K^{-1}(X)$

b-  $h(\gamma X) = \gamma h(X)$ , c'est-à-dire  $K^{-1}(\gamma X) = \gamma K^{-1}(X)$ .

Montrons a-. La condition  $t \in K^{-1}(\alpha X)$  équivaut à chacune

des conditions suivantes:  $K(t) \in \alpha X$ ;  $\alpha K(t) =$

$= (\alpha K_i(t))_{i \in I} \in X$ , où  $\alpha K_i(t) =$

$= (K_{\beta H_i}(t), 1 - K_{\gamma H_i}(t), 1 - K_{\beta\gamma H_i}(t), K_{H_i}(t))$

De plus nous avons les équivalences qui suivent:

$$K_{\beta H_i}(t) = 1 \iff t \in \beta H_i \iff \beta t \in H_i \iff K_{H_i}(\beta t) = 1$$

$$K_{\gamma H_i}(t) = 1 \iff t \in \gamma H_i \iff \beta t \in \beta \gamma H_i \iff K_{\beta \gamma H_i}(\beta t) = 1$$

$$K_{\beta \gamma H_i}(t) = 1 \iff t \in \beta \gamma H_i \iff \beta t \in \gamma H_i \iff K_{\gamma H_i}(\beta t) = 1$$

$$K_{H_i}(t) = 1 \iff t \in H_i \iff \beta t \in \beta H_i \iff K_{\beta H_i}(\beta t) = 1$$

En remplaçant:

$$\begin{aligned} \alpha K_i(t) &= (K_{H_i}(\beta t), 1 - K_{\beta \gamma H_i}(\beta t), 1 - K_{\gamma H_i}(\beta t), K_{\beta H_i}(\beta t)) \\ &= K_i(\beta t) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \alpha K(t) = (\alpha K_i(t))_{i \in I} = (K_i(\beta t))_{i \in I} = K(\beta t) \in X,$$

c'est-à-dire  $\beta t \in K^{-1}(X)$ , ce qui équivaut à

$$t \in \beta K^{-1}(X).$$

Montrons b- La condition  $t \in K^{-1}(\varphi X)$  équivaut à chacune

des conditions suivantes:  $K(t) \in \varphi X$ ;  $\varphi K(t) =$

$$= (\varphi K_i(t))_{i \in I} \in X, \quad \text{où } \varphi K_i(t) =$$

$$= (K_{\gamma H_i}(t), 1 - K_{\beta H_i}(t), 1 - K_{H_i}(t), K_{\beta \gamma H_i}(t)).$$

En outre:

$$K_{\gamma H_i}(t) = 1 \iff t \in \gamma H_i \iff \gamma(t) \in H_i \iff K_{H_i}(\gamma t) = 1$$

$$K_{\beta H_i}(t) = 1 \iff t \in \beta H_i \iff \gamma(t) \in \gamma \beta H_i = \beta \gamma H_i \iff$$

$$\iff K_{\beta\gamma H_i}(\gamma t) = 1$$

$$K_{H_i}(t) = 1 \iff t \in H_i \iff \gamma(t) \in \gamma H_i \iff K_{\gamma H_i}(\gamma t) = 1$$

$$K_{\beta\gamma H_i}(t) = 1 \iff t \in \beta\gamma H_i \iff \gamma(t) \in \gamma\beta\gamma H_i = \beta H_i \iff \\ \iff K_{\beta H_i}(\gamma t) = 1$$

En remplaçant:  $\varphi K_i(t) =$

$$= (K_{H_i}(\gamma t), 1 - K_{\beta\gamma H_i}(\gamma t), 1 - K_{\gamma H_i}(\gamma t), K_{\beta H_i}(\gamma t)) =$$

$$= K_i(\gamma t) \quad . \quad \text{D'où:}$$

$$\varphi K(t) = (\varphi K_i(t))_{i \in I} = (K_i(\gamma t))_{i \in I} = K(\gamma t) \in X, \text{ ce}$$

qui équivaut à  $\gamma t \in K^{-1}(X)$ , c'est-à-dire  $t \in \gamma K^{-1}(X)$ .

Montrons maintenant que:  $h(\neg X) = \neg h(X)$

$$h(\sim X) = \sim h(X)$$

En effet:

$$h(\neg X) = h(C(X \cup \gamma \alpha X)) = C(h(X \cup \gamma \alpha X)) = C(h(X) \cup h(\gamma \alpha X)) =$$

$$= C(h(X) \cup \gamma h(\alpha X)) = C(h(X) \cup \gamma \beta h(X)) = \neg h(X) \quad \text{et}$$

$$h(\sim X) = h(C\gamma X) = C(h(\gamma X)) = C\gamma h(X) = \sim h(X) \quad .$$

L'homomorphisme  $h$  est une extension de  $f$ , autre-

ment dit  $h(G_i) = f(G_i) = H_i$ . Il en résulte des é-

quivalences suivantes:

$$t \in H_i \iff K_{H_i}(t) = 1 \iff K(t) \in G_i \iff \\ \iff t \in K^{-1}(G_i) = h(G_i) .$$

Il reste à montrer que  $h$  est un homomorphisme de  $L$  dans  $A$ , c'est-à-dire  $h(L) \subseteq A$ .

Nous savons que  $h(L)$  est une sous-algèbre de  $2^T$  et  $h(G) \subseteq A$ ; mais  $G$  étant un système de générateurs de  $L$ ,  $h(G)$  est un système de générateurs de  $h(L)$  et alors  $h(L) \subseteq A$ ; ceci achève la démonstration.

-----oOo-----

## C H A P I T R E VII

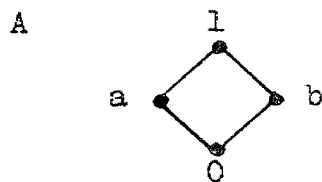
### LES ALGÈBRES CENTRÉES ET LES ANNEAUX

Ce chapitre se propose de préciser le rapport qu'il existe entre les A.H.T.I. centrées et un type spécial d'anneau ayant élément unité. Cet étude a été suggéré en examinant les résultats connus dans les cas particuliers des algèbres de Boole, algèbres de Boole involutives et de Lukasiewicz trivalentes.

Sur une algèbre de Boole on peut définir une structure d'anneau booléen ayant élément unité, c'est-

à-dire un anneau ayant élément unité dans lequel tous ses éléments sont idempotentes ( $x^2 = x$ ). La condition  $x^2 = x$  entraîne  $xy = yx$  et  $2x = 0$ . Inversement, Stone, 1935, p.104 a démontré à son tour que sur un anneau booléen ayant élément unité on peut définir une structure d'algèbre de Boole.

Par rapport aux algèbres de Boole involutives Moisil, 1954, a considéré l'algèbre A que voici:



x	$\alpha(x)$
0	0
a	b
b	a
1	1

et les opérations + et . définies au moyen des tableaux:

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	0	1	b
b	b	1	0	a
1	1	b	a	0

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	b	1	a
b	0	1	a	b
1	0	a	b	1

Le système  $(A, +, \cdot)$  est le corps de Galois  $GF(2^2)$ , où  $\alpha(x) = x^2$ . Toutes les fonctions d'une variable de  $GF(2^2)$  dans lui-même peuvent s'exprimer à l'aide de polynômes de troisième degré au plus à coefficients dans le corps et sur l'ensemble de toutes ces fonctions on peut définir une structure

d'algèbre de Boole involutive au moyen des égalités:

$$x \wedge y = x^2 y^2 + x^2 y + xy^2$$

$$x \vee y = x^2 y^2 + x^2 y + xy^2 + x + y$$

$$-x = x + 1$$

$$\alpha(x) = x^2$$

Moisil a montré en général qu'étant donnée une algèbre de Boole involutive  $(A, \alpha)$  on peut définir sur  $A$ , grâce aux opérations primitives, une structure d'anneau, en tenant compte des opérations  $+$  et  $\cdot$  suivantes:

$$x + y = (x \wedge -y) \vee (y \wedge -x)$$

$$x \cdot y = (x \wedge y \wedge \alpha x \wedge \alpha y) \vee (-x \wedge -y \wedge \alpha x \wedge \alpha y) \vee (x \wedge -\alpha x \wedge \alpha y) \vee (y \wedge -\alpha y \wedge \alpha x)$$

L'anneau qui en résulte possède élément unité et satisfait aux propriétés  $x^4 = x$  et  $2x = 0$ .

Moisil a démontré aussi la réciproque. Etant donné un anneau ayant élément unité et satisfaisant aux conditions  $x^4 = x$  et  $2x = 0$  il y a moyen de définir sur celui-ci une structure d'algèbre de Boole involutive, si l'on considère les opérations  $\wedge, \vee, -$  et  $\alpha$  en faisant usage des égalités données plus haut.



Les algèbres de Lukasiewicz trivalentes ne sont pas en général des anneaux, mais Moisil, 1941, a montré qu'étant donnée une algèbre de Lukasiewicz trivalente centrée on peut la munir d'une structure d'anneau à l'aide des opérations  $\wedge$  et  $\vee$  définies de la façon suivante:

$$x + y = (-\nabla x \wedge \Delta y) \vee (-\nabla y \wedge \Delta x) \vee (\nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla -x \wedge \nabla -y) \vee \{c \wedge ((-\nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla -y) \vee (-\nabla y \wedge \nabla x \wedge \nabla -x) \vee (\Delta x \wedge \Delta y))\}$$

$$x \cdot y = (\Delta x \wedge \Delta y) \vee (\nabla x \wedge \nabla y \wedge \nabla -x \wedge \nabla -y) \vee \{c \wedge ((\Delta x \wedge \nabla y \wedge \nabla -y) \vee (\Delta y \wedge \nabla x \wedge \nabla -x))\},$$

où  $c$  est le centre de l'algèbre. L'anneau résultant admet élément unité et satisfait aux propriétés  $x^3 = x$  et  $\exists x = 0$ .

Inversement, Moisil a aussi démontré que sur un anneau ayant élément unité et satisfaisant aux conditions  $x^3 = x$  et  $\exists x = 0$  peut se définir une structure d'algèbre de Lukasiewicz trivalente centrée au moyen des opérations:

$$x \wedge y = x^2 y^2 + 2x^2 y + 2xy^2 + 2xy$$

$$x \vee y = 2x^2 y^2 + x^2 y + xy^2 + xy + x + y$$

$$-x = 2x + 1$$

$$\nabla x = x^2$$

L'élément  $c = 2$  est le centre de cette algèbre.

D'après les résultats énoncés il y a lieu de considérer les anneaux ayant élément unité  $(A, +, \dots, 1)$  et satisfaisant aux conditions  $x^9 = x$  et  $3x = 0$  pour tout  $x \in A$ .

De la condition  $x^9 = x$  on tire que l'anneau  $A$  est commutatif (Jacobson, 1945, p.702).

Nous allons essayer, dans ce qui suit, d'introduire sur un anneau  $A$  de cette nature, une structure d'A.H.T.I. centrée.

L'anneau  $A$  ne possède pas d'éléments nilpotents non triviales, alors son nil-radical (autrement dit l'intersection de tous ces idéaux premiers) est réduit à  $(0)$ . Il en résulte que l'application canonique  $A \longrightarrow \prod_{\mathfrak{P}} A/\mathfrak{P}$  où  $\mathfrak{P}$  parcourt la famille de tous les idéaux premiers est injective. Pour chaque idéal premier  $\mathfrak{P}$ ,  $A/\mathfrak{P}$  est un domaine d'intégrité dans lequel tout élément est une racine de l'équation  $x^9 - x = 0$ , donc  $A/\mathfrak{P}$  est fini -plus préci-

sément,  $A/P$  contient au plus neuf éléments- et par conséquent est un corps. Sur  $A/P$  les conditions  $x^9 = x$  et  $3x = 0$  sont aussi satisfaites pour tout  $x \in A/P$ , et alors le quotient  $A/P$  doit être isomorphe à  $GF(3)$  ou  $GF(3^2)$ .

Nous pouvons en conclure que tout anneau  $A$  ayant élément unité et satisfaisant aux conditions  $x^9 = x$  et  $3x = 0$  pour tout  $x \in A$  est isomorphe à un sous-produit direct de corps de Galois ayant neuf et trois éléments.

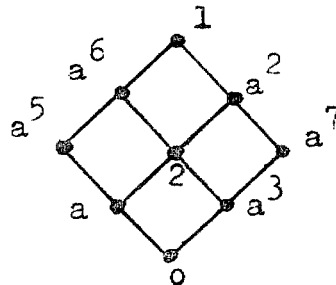
Considérons le corps  $GF(3^2)$ . Tout élément de ce corps peut se mettre sous la forme  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \alpha$  où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in Z_3 \cong GF(3)$  et  $\alpha$  est racine, par exemple, du polynôme  $x^2 + 1$ , celui qui est irréductible sur  $Z_3$ . Les éléments non nuls de  $GF(3^2)$  constituent un groupe cyclique par rapport au produit, ayant par générateur  $\underline{a}$  un quelconque des éléments  $1 + \alpha, 1 + 2\alpha, 2 + \alpha, 2 + 2\alpha$ . Les éléments de  $GF(3^2)$  sont donc  $0, a = 1 + \alpha, a^2 = 2\alpha, a^3 = 1 + 2\alpha, a^4 = 2, a^5 = 2 + 2\alpha, a^6 = \alpha, a^7 =$

$= 2 + \alpha$  ,  $a^8 = 1$  , avec lesquels on peut construire les tableaux des opérations  $+$  et  $\cdot$  .

Le corps  $GF(3^2)$  admet un unique automorphisme  $\alpha$  , autre que l'identité, donné par l'égalité  $\alpha(x) = x^3$  ; il possède de plus un unique sous-corps, le  $GF(3) \cong Z_3$  qui n'admet aucun automorphisme propre.

Nous allons donner un ordre sur  $GF(3^2)$  de telle façon qu'il soit coïncident avec celui de l'algèbre  $S_9$  et que l'automorphisme  $\alpha(x) = x^3$  soit le correspondant de l'automorphisme propre de  $S_9$  . Une telle ordination est possible,

par exemple, de la manière indiquée par le diagramme.



L'ordre du sous-corps  $GF(3)$  coïncide avec celui de la sous-algèbre  $S_3$  .

Toute fonction  $P : S_9 \longrightarrow S_9$  peut s'exprimer au moyen d'un polynôme de degré 8 au plus et à coefficients dans le corps  $GF(3^2)$  . D'une manière explicite  $P$  peut se calculer à l'aide de la formule d'interpolation:

$$P(x) = P(0) L_0(x) + \sum_{k=1}^8 P(a^k) L_k(x) ,$$

où  $L_k(x)$  ,  $k=0,1,\dots,8$  sont les polynômes d'interpolation , c'est-à-dire tels que:

$$L_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad L_0(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0 ,$$

$$L_k(a^k) = 1 \quad \text{pour } k=1,\dots,8 \quad \text{et} \quad L_k(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \neq a^k .$$

Il est immédiat que  $L_0(x) = 2x^8 + 1$  et tous les autres peuvent s'obtenir par une "translation":

$$L_k(x) = L_0(x + 2a^k) , \quad k=1,\dots,8$$

(Moisil, 1969) .

En utilisant la formule d'interpolation, les opérations unaires  $\gamma$  ,  $\sim$  ,  $\alpha$  définies sur  $S_9$  s'expriment de la façon suivante:

$$\gamma x = 2x^6 + 2x^4 + x^2 + 1 \quad (1)$$

$$\sim x = 2x^3 + 1 \quad (2)$$

$$\alpha x = x^3$$

Les fonctions  $P: S_9 \times S_9 \longrightarrow S_9$  sont aussi polynômes à deux variables et peuvent s'exprimer de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= P(0,0) \cdot L_0(x) \cdot L_0(y) + \sum_{k=1}^8 P(0, a^k) \cdot L_0(x) \cdot L_k(y) + \\
&+ \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^8 P(a^k, a^j) \cdot L_k(x) \cdot L_j(y) + \sum_{k=1}^8 P(a^k, 0) \cdot L_k(x) \cdot L_0(y)
\end{aligned}$$

où  $L_k(x)$ ,  $L_j(y)$  sont les polynômes d'interpolation à une indéterminée donnés ci-dessus.

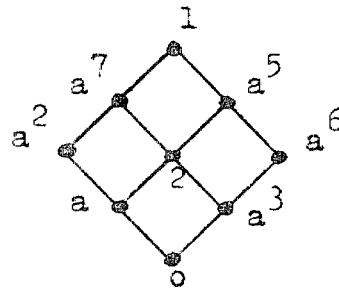
En effectuant les calculs, lesquels sont embêtants à réaliser, nous pouvons donner les expressions des opérations binaires  $\wedge$  et  $\vee$  sur  $S_9$ . Ainsi:

$$\begin{aligned}
x \wedge y &= 2x^6y^6 + x^6y^4 + 2x^6y^3 + x^6y^2 + x^4y^6 + x^4y^4 + 2x^4y^2 + \\
&+ 2x^4y + 2x^3y^6 + 2x^3y^3 + x^3y^2 + x^3y + x^2y^6 + 2x^2y^4 + \\
&+ x^2y^3 + 2x^2y^2 + 2xy^4 + xy^3 + xy \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \vee y &= x^6y^6 + 2x^6y^4 + x^6y^3 + 2x^6y^2 + 2x^4y^6 + 2x^4y^4 + x^4y^2 + \\
&+ x^4y + x^3y^6 + x^3y^3 + 2x^3y^2 + 2x^3y + 2x^2y^6 + x^2y^4 + \\
&+ 2x^2y^3 + x^2y^2 + xy^4 + 2xy^3 + 2xy + x + y \quad (4)
\end{aligned}$$

Remarque. Si à la place de l'ordenation indiquée des éléments de  $GF(3^2)$  nous prenons, par exemple, celle du

diagramme que voici, les opérations  $\wedge, \vee, \gamma$  et  $\sim$  peuvent s'exprimer:



$$\begin{aligned}
 x \wedge y &= x^8 y^8 + 2x^8 y^7 + 2x^8 y^5 + 2x^8 y^4 + x^8 y^3 + x^8 y + 2x^7 y^8 + \\
 &+ 2x^7 y^7 + 2x^7 y^6 + 2x^7 y^4 + x^7 y^3 + x^7 y^2 + 2x^7 y + 2x^6 y^7 + \\
 &+ 2x^6 y^6 + x^6 y^3 + 2x^6 y^2 + 2x^6 y + 2x^5 y^8 + 2x^5 y^5 + 2x^5 y^4 + \\
 &+ 2x^4 y^8 + 2x^4 y^7 + 2x^4 y^5 + 2x^4 y^3 + x^4 y^2 + x^3 y^8 + x^3 y^7 + \\
 &+ x^3 y^6 + 2x^3 y^4 + 2x^3 y^3 + 2x^3 y^2 + x^2 y^7 + 2x^2 y^6 + x^2 y^4 + \\
 &+ 2x^2 y^3 + xy^8 + 2xy^7 + 2xy^6 + 2xy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x \vee y &= x^8 y^8 + 2x^8 y^6 + 2x^8 y^3 + 2x^8 y^2 + 2x^8 y + x^7 y^7 + x^7 y^6 + \\
 &+ 2x^7 y^5 + 2x^7 y^4 + 2x^7 y^3 + 2x^7 y^2 + 2x^7 y + 2x^6 y^8 + x^6 y^7 + \\
 &+ x^6 y^3 + x^6 y^2 + x^6 y + 2x^5 y^7 + x^5 y^5 + 2x^5 y^4 + x^5 y^3 + 2x^4 y^7 + \\
 &+ 2x^4 y^5 + 2x^4 y^3 + 2x^4 y^2 + x^4 y + 2x^3 y^8 + 2x^3 y^7 + x^3 y^6 + \\
 &+ x^3 y^5 + 2x^3 y^4 + x^3 y^2 + 2x^2 y^8 + 2x^2 y^7 + x^2 y^6 + 2x^2 y^4 + \\
 &+ x^2 y^3 + 2x^2 y^2 + 2x^2 y + 2xy^8 + 2xy^7 + xy^6 + xy^4 + 2xy^2 +
 \end{aligned}$$

$$+ x + y$$

$$\neg x = 2x^8 + x^6 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$\sim x = x^6 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$$

Nous nous proposons de donner sur l'anneau  $A$  une structure d'A.H.T.I. centrée. Nous savons que l'anneau  $A$  est isomorphe, à l'aide d'un isomorphisme  $\varphi$ , à un sous-anneau  $A'$  du produit direct de corps de Galois  $GF(3^2)$  et  $GF(3)$ . Chacun de ces axes, avec les opérations définies d'après les égalités (1), (2), (3) et (4) est une A.H.T.I. centrée, où  $c = 2$  est le centre; il en est de même du produit de ces axes et  $A'$ .

Pour tout  $x, y \in A$ , soient  $x \wedge y, x \vee y, \neg x, \sim x$  les éléments de  $A$  tels que:

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$$

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$$

$$\varphi(\neg x) = \neg \varphi(x)$$

$$\varphi(\sim x) = \sim \varphi(x)$$

Ces éléments de  $A$  sont univoquement définis puisque  $\varphi$  est injective et  $A'$  est fermée par rapport aux opé-



rations  $\wedge, \vee, \neg$  et  $\sim$ .

Chacun des axiomes caractérisant une A.H.T.I. centrée peut être vérifiée sur  $A$  car  $A'$  est une A.H.T.I. centrée. Il en résulte que le système  $(A, \sim)$  est une A.H.T.I. centrée.

Nous avons ainsi établi:

Théorème 20. Soit  $(A, +, \cdot, 1)$  un anneau satisfaisant aux conditions  $x^2 = x$  et  $3x = 0$  pour tout  $x \in A$ . Si sur  $A$  on définit les opérations  $\wedge, \vee, \neg$  et  $\sim$  au moyen des formules (1), (2), (3) et (4), alors  $A$  est un treillis distributif par rapport aux opérations  $\wedge$  et  $\vee$ , où  $0$  et  $1$  sont respectivement le plus petit et le plus grand élément, et le système  $(A, \sim)$  est une A.H.T.I. centrée, où  $c = 2$  est le centre.

Une preuve directe de ce résultat repose sur la démonstration, moyennant les propriétés des opérations d'anneau, de la validité de chacun des axiomes qui carac-

terisent une A.H.T.I. centrée. A ce propos, nous avons réalisé une démonstration, à l'aide d'une machine, en tenant compte des difficultés présentées dans les calculs des propriétés associatives et distributives. Le programme, dont nous avons eu besoin, a été réalisé par M. Guy Tassart de l'Institut de Calcul de Grenoble.

Nous aborderons, par la suite, le problème inverse.

Soit  $(A, \sim)$  une A.H.T.I. centrée de centre  $\underline{c}$ . Nous savons que  $A$  est isomorphe, d'après l'application  $\underline{h}$  à une sous-algèbre  $A'$  du produit direct d'algèbres simples  $S_k$ ,  $k = 3, 9$ .

Nous allons définir sur  $S_9$  deux opérations  $+$  et  $\cdot$  de telle façon que le système  $(S_9, +, \cdot, 1)$  soit un anneau ayant élément unité et satisfaisant aux conditions  $x^9 = x$  et  $3x = 0$  pour tout  $x \in S_9$ .

Les expressions des opérations  $x + y$  et  $x \cdot y$  doivent être choisies de sorte que, en remplaçant les indéterminées  $x$  et  $y$  par les éléments de  $S_9$  on obtienne les tableaux correspondants de la somme et du produit sur  $GF(3^2)$ .

Pour chaque  $x$ , considérons les expressions de la forme  $x_k$ ,  $k=1,2,\dots,14$  introduites au chapitre précédent.

Nous posons sur  $S_9$  :

$$x + y = \bigvee_{k=1}^{14} \bigvee_{i=1}^{14} \varepsilon_{(k,i)} (x_k \wedge y_i) \vee \left\{ c \wedge \bigvee_{m=1}^{14} \bigvee_{n=1}^{14} \varepsilon_{(m,n)} (x_m \wedge y_n) \right\} \quad (5)$$

où :

$$\varepsilon_{(k,i)} = 1 \quad \text{si } (k,i) \in \{(1,3), (1,4), (1,12), (2,3), (2,4), (2,5), (2,12), (3,6), (3,7), (3,9), (3,13), (4,6), (5,5), (6,12), (7,11), (8,8), (8,10), (8,14), (9,11), (10,10), (10,14), (11,14), (14,14)\} \cup \{ \text{les paires symétriques des précédentes} \}$$

$$\text{et } \varepsilon_{(k,i)} = 0 \quad \text{pour toute une autre paire}$$

$$\varepsilon_{(m,n)} = 1 \quad \text{si } (m,n) \in \{(1,1), (1,2), (1,5), (2,2), (4,7), (4,9), (4,14)\} \cup \{ \text{les paires symétriques des précédentes} \}$$

$$\text{et } \varepsilon_{(m,n)} = 0 \quad \text{pour toute une autre paire}$$

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= \bigvee_{k=1}^{14} \bigvee_{i=1}^{14} \xi_{(k,i)} (x_k \wedge y_i) \vee \\
 &\vee \left\{ c \wedge \bigvee_{m=1}^{14} \bigvee_{n=1}^{14} \xi_{(m,n)} (x_m \wedge y_n) \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

où:

$\xi_{(k,i)} = 1$  si  $(k,i) \in \{(1,2), (1,8), (1,12), (2,2), (2,6), (2,7), (2,9), (2,13), (4,4), (4,6), (4,8), (4,11), (5,5), (5,11), (5,14), (6,10), (7,7), (7,12), (8,14), (9,9), (10,12), (10,14), (12,12), (14,14)\} \cup \{ \text{les paires symétriques des précédentes} \}$

et  $\xi_{(k,i)} = 0$  pour toute une autre paire

$\xi_{(m,n)} = 1$  si  $(m,n) \in \{(1,1), (1,4), (1,14), (4,9)\} \cup$

$\{ \text{les paires symétriques des précédentes} \}$

et  $\xi_{(m,n)} = 0$  pour tout une autre paire

En suivant un raisonnement tout à fait analogue à celui donné plus haut, nous pouvons munir l'algèbre centrée  $A$  d'une structure, de telle façon que le système  $(A, +, \cdot, 1)$  soit un anneau ayant élément unité et satisfaisant aux propriétés  $x^9 = x$  et  $3x = 0$  pour tout  $x \in A$ .

Nous avons ainsi établi:

Théorème 21. Soit  $(A, \sim)$  une A.H.T.I. centrée. Si sur  $A$  on définit les opérations  $+$  et  $\cdot$  au moyen des formules (5) et (6), alors  $A$  est un anneau par rapport aux opérations  $+$  et  $\cdot$ , ayant  $1$  comme élément unité et satisfaisant aux propriétés  $x^9 = x$  et  $3x = 0$  pour tout  $x \in A$ .

De plus, si sur  $(A, +, \cdot, 1)$  on définit les opérations  $\bar{\cdot}, \sim, \wedge$  et  $\vee$  données par les égalités (1), (2), (3) et (4) on retrouve l'algèbre  $(A, \sim)$ .

Cette dernière partie du théorème se déduit d'après la construction réalisée.

Nous pouvons conclure, grâce à ce que nous avons montré que la théorie des A.H.T.I. centrées est équivalente à celle des anneaux ayant élément unité et satisfaisant aux conditions  $x^9 = x$  et  $3x = 0$  pour tout  $x$ .

- BIBLIOGRAPHIE -

BIALYNICKI-BIRULA, A. and RASIOWA, H.

- (1957) - On the representation on quasi-Boolean algebras, Bull. Acad. Pol. des Sciences, classe III, 5, (1957), p.259-261.
- (1958) - On constructible falsity in the constructive logic with strong negation, Coll. Math., VI, (1958), p.287-310.

BIRKHOFF, G.

- (1937) - Rings of sets, Duke Math. Jour., 3, (1937), p.443-454.
- (1948) - Lattice Theory, Amer. Math. Soc., Coll. Publ., vol XXV, New York, rev. ed. (1948) .

BIRKHOFF, G. and FRINK, O.

- (1948) - Representations of lattices by sets, Trans. Amer. Math. Soc. 64, (1948), p.299-315.

BOURBAKI, N.

- (1958) - Algèbre, Ch. 1, Structures algébriques, 2<sup>o</sup> ed. Hermann, (1958) .

CHATEAUBRIAND, O. et MONTEIRO, A.

- (1969) - Les algèbres de Morgan libres, Notas de Lógica Mat. n°26, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1969), p.1-9.

CIGNOLI, R. and MONTEIRO, A.

- (1965) - Boolean elements in Lukasiewicz algebras, Proc. Japan Acad., Vol 41, n°8 (1965), p.676-680.

DUBREIL, P.- DUBREIL-JACOTIN, M.L.

- (1961) - Leçons d'algèbre moderne, Dunod, Paris, (1961)

HEYTING, A.

- (1930) - Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitz. Preuss. Akad. Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse, (1930), p.42-56.

ITURRIOZ, L.

- (1965) - Axiomas para el cálculo proposicional tri-valente de Lukasiewicz, Rev. de la Unión Mat. Arg., Vol XXII, n°3, (1965), p.150.

JACOBSON, N.

- (1945) - Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, Annals of Math. 46, n°4, (1945), p.695-707.

KALMAN, J.A.

- (1958) - Lattices with involution, Trans. Amer. Math. Soc., 87, n°2, (1958), p.485-491.

KLEENE, S.C.

- (1938) - On notation for ordinal numbers, Jour. of Sym. Logic, Vol 3, n°4, (1938), p.150-155.
- (1952) - Introduction to methamathematics, North-Holland Pub.Co., Amsterdam, (1952) .

LUKASIEWICZ, J.

- (1938) - Die Logik und das Grundlagenproblem, Les entretiens de Zürich (1938), p.82-100. Discussion p.100-108.

MATSUMOTO, K.

- (1950) - On a lattice relating to the intuitionistic logic, Jour. Osaka Inst. of Scie. and Tech., Vol 2, n°1-2, (1950), p.97-107.

McCOY, N.

- (1948) - Rings and ideals, The Carus Math. Monographs, Math. Assoc. of Amer., n°8, (1948) .

MOISIL, Gr.C.

- (1935) - Recherche sur l'algèbre de la logique, Ann. Sci. Univ. Jassy, 22(1935), p.1-117 .
- (1941) - Sur les anneaux de caractéristique deux et trois et leurs applications, Bull. de l'Ecole Polyt. de Bucarest, XII, (1941), p.66-90.
- (1942) - Logique Modale, Disquis. Mathem. Phys., 2, (1942), p.3-98.
- (1954) - Algebra Schemelor cu elemente ventii, Rev. Univ. C.I.Parhon și a Polit. București, n°4-5, (1954), p.9-41.



- (1969) - The algebraic Theory of Switching Circuits, Pergamon Press, (1969) .

MONTEIRO, A.

- (1947) - Filtros e ideais I, Notas de Matemática n°2, IMPA, Rio de Janeiro, (1947) .
- (1948) - Filtros e ideais II, Notas de Matemática n°5, IMPA, Rio de Janeiro, (1948) .
- (1954) - L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques, Segundo symposium de Matemáticas, Villavicencio, Mendoza, Argentina, (1954), p.129-162.
- (1955) - Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer, Rev. de la Unión Mat. Arg., Vol XVII, (1955), p.149-160.
- (1957) - Algebras de Heyting monádicas, Actas X Jornadas, Unión Mat. Arg., (1957), p.52-62.
- (1960) - Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique, Anais da Acad. Brasileira de Ciências, 32, n°1, (1960), p.1-7.
- (1960)a - Calcul propositionnel implicatif positif, cours donné à l'Univ. Nat. du Sud, Bahía Blanca, Argentina, (1960).
- (1962) - Algèbre de la logique III, cours donné à l'Univ. Nat. du Sud, Bahía Blanca, Argentina (1962) .
- (1962)a - Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays, Rev. de la Unión Mat. Arg., Vol XX, (1962), p.308-309.

- (1963) - Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roum. 7 (55), n°1-2, (1963), p.3-12.
- (1963)a - Algèbres de Lukasiewicz trivalentes, cours donné à l'Univ. Nat. du Sud, Bahía Blanca, (1963) .
- (1964) - Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays, cours donné à l'Univ. Nat. du Sud, Bahía Blanca, Argentina (1964).
- (1966) - Algebras de Boole involutivas, Rev. de la Unión Mat. Arg., Vol XXIII, n°1, (1966)p.39.
- (1966)a - Algèbres de Morgan, cours donné à l'Univ. Nat. du Sud, Bahía Blanca, Argentina, (1966).
- (1966)b - Séminaire sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes, Juillet 1966, Univ. Nat. du Sud, Bahía Blanca, Argentina.
- (1969) - Algèbres de Boole involutives, cours donné à l'Univ. Nat. du Sud, Bahía Blanca, Argentina, (1969) .
- (1969)a - Sur quelques extensions du calcul propositionnel intuitioniste, IVème congrès des mathématiciens d'expression latine, 17-24 Septembre 1969, Bucarest.
- (1970) - Théorème de la déduction, cours donné à l'Univ. Nat. du Sud, Bahía Blanca, Argentina (1970).

MONTEIRO, A. et CIGNOLI, R.

- (1965) - Construcción geométrica de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes libres, Rev. de la Unión Mat. Arg., Vol XXII, n°3, (1965), p. 152-153.

MONTEIRO, L.

- (1964) - Sur les algèbres de Heyting trivalentes, Notas de Lógica Matemática n°19, Univ. Nat. du Sud, Bahía Blanca, Argentina, (1964), p.1-23.
- (1970) - Les algèbres de Heyting et de Lukasiewicz trivalentes, Notre Dame Jour. of Formal Logic, XI, n°4 (1970), p.453-466.

OGASAWARA, T.

- (1939) - Relations between Intuitionistic Logic and Lattice, Jour. of Sci. Hiroshima Univ., Vol 9, n°3 (1939) p.157-164.

RASIOWA, H. and SIKORSKI, R.

- (1963) - The mathematics of metamathematics, Polska Akad. Nauk., Monografie Matematyczne, Tom 41, Warszawa (1963) .

RIEGER, L.

- (1949) - On the lattice theory of Brouwerian propositional logic, Acta Fac. Rerum Nat. Univ. Carolinae, 189 (1949) p.3-40.

SIKORSKI, R.

- (1960) - Boolean algebras, Springer-Verlag (1960).

Stone, M.H.

- (1935) - Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings, Proc. of the Nat. Acad. of Sci., Vol 21, n°2, p.103-105.
- (1936) - The theory of representations for Boolean Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936) p.37-111.

- (1937) - Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics, Cas. Mat. Fys. 67 (1937) p.1-25.
- (1937)a - Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937) p.321-364.
- (1938) - The representation of Boolean Algebras, Bull. Amer. Math. Soc., Vol 44, n°12, part I (1938) p.807-816.

TARSKI, A.

- (1956) - Logic, semantics, metamathematics, Clarendon Press, Oxford (1956) .

THOMAS, I.

- (1962) - Finite limitations on Dummett's L.C., Notre Dame Jour. of Formal Logic, vol 3 (1962) p.170-174.

van der WAERDEN, B.L.

- (1949) - Modern algebra, Vol I (1949) F.Ungar Pub.Co.

VARLET, J.C.

- (1968) - Algèbres de Lukasiewicz trivalentes, Bull. Soc. Roy. des Sci. de Liège, n°9-10, (1968) p.399-408.

## - I N D I C E -

## Chapitre I . Introduction.

I- Algèbres de Morgan .....	1
II- Algèbres de Boole involutives ou symétriques .....	5
III- Algèbres de Heyting involutives .....	6
IV- Algèbres de Heyting trivalentes involutives .....	8
V- Règles de calcul valables dans une A.H.T.I. ....	13
VI- A.H.T.I. centrées .....	16

## Chapitre II. Deux caractérisations des A.H.T.I..

## A.H.T.I. d'ensembles.

I- Les A.H.T.I. et de Lukasiewicz symétriques .....	18
II- Une autre caractérisation des A.H.T.I. ....	24
III- A.H.T.I. d'ensembles.....	32

## Chapitre III. Systèmes déductifs.

## Théorème de représentation.

I- Définition.....	39
II- L'implication faible et les s.d. ....	46
III- S.d. maximaux et simples.....	52
IV- S.d. complètement irréductibles. Théorème de représentation .....	59

Chapitre IV . Algèbres simples .....	67
Chapitre V . Algèbres libres	
I- Définition et existence .....	81
II- Matrice caractéristique finie .....	89
III- Théorème de représentation pour les A.H.T.I. libres de type fini .....	90
Chapitre VI. Construction de l'A.H.T.I. libre au moyen d'ensembles .....	99
Chapitre VII. Les algèbres centrées et les anneaux..	117
Bibliographie .....	133