NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

36

MANUEL ABAD

ESTRUCTURAS CICLICA Y MONADICA DE UN ALGEBRA DE LUKASIEWICZ n-VALENTE

1988

INMABB - CONICET

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA (*)

Nº 36

ESTRUCTURAS CICLICA Y MONADICA DE UN ALGEBRA

DE LUKASIEWICZ n-VALENTE

MANUEL ABAD

TESIS DE DOCTORADO PRESENTADA EN JULIO DE 1986

INMABB - CONICET

1988

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

ESTRUCTURAS CICLICA Y MONADICA DE UN ALGEBRA DE LUKASIEWICZ n-VALENTE

Manuel Abad

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

A mi querida esposa Julita

y a mis hijas Cynthia y Pamela.

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Luiz F. Monteiro, cuya ayuda y paciente atención hicieron posible la culminación de este trabajo.

También quiero agradecer al Dr. Rafael Panzone por el inestimable apoyo que me brindó.

Por último, quiero mencionar en forma especial a mi querido maestro Dr. Antonio Monteiro, cuya influencia en mi formación fue decisiva.

INDICE

CAPITULO I. ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ n-VALENTES CICLICAS

CAPITULO II. ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ n-VALENTES MONADICAS

CAPITULO I

ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ n-VALENTES CICLICAS

I.1. PRELIMINARES

Exponemos en este párrafo algunos resultados conocidos de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes que nos serán necesarios más adelante, así como las primeras nociones sobre álgebras de Lukasiewicz cíclicas. Salvo indicación expresa, los resultados sobre álgebras de Lukasiewicz n-valentes pueden verse en (11). Comenzaremos recordando la siguiente definición:

I.1.1. DEFINICION. Un álgebra de De Morgan es un sistema $(A, 1, \vee, \wedge, \sim)$ tal que $(A, 1, \vee, \wedge)$ es un reticulado distributivo con último elemento 1, y $\sim$ es un operador unario definido sobre A que satisface las siguientes condiciones:

M1) $\sim\sim x = x$

M2) $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

Si el operador $\sim$ satisface además la condición

K) $x \wedge \sim x \leqslant y \vee \sim y$

diremos que $(A, 1, \vee, \wedge, \sim)$ es un álgebra de Kleene.

Esta noción fue introducida por Bialynicki-Birula y Rasiowa (7) bajo el nombre de "quasi-Boolean algebras". Han sido estudiadas por Moisil (21), quien las llamó álgebras de De Morgan, y por J. Kalman (19) y A. Monteiro (28). Ver también (4) y (43).

Se verifica fácilmente que en toda álgebra de De Morgan se cumplen:

M3) $x \leq y$ si y sólo si $\sim y \leq \sim x$

M4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

M5) $\sim 1 = 0$ es el primer elemento del reticulado $(A, \vee, \wedge)$.

En toda álgebra de De Morgan A se define para todo filtro primo P de A la transformación de Bialinicki-Birula y Rasiowa (7) por medio de la fórmula $\varphi(P) = \complement \sim P$, donde $\complement$ indica el complemento conjuntista, y $\sim P = \{\sim x : x \in P\}$.

El siguiente lema es de fácil verificación y será importante más adelante:

I.1.2. LEMA. Si P es un filtro primo del álgebra de De Morgan A, entonces $\varphi(P)$ es un filtro primo de A, y además $\varphi(\varphi(P)) = P$.

I.1.3. DEFINICION. Un álgebra de Lukasiewicz n-valente (n entero, $n \geq 2$) es un sistema $(A, 1, \vee, \wedge, \sim, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ tal que $(A, 1, \vee, \wedge, \sim)$ es un álgebra de De Morgan y $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ son operadores unarios definidos sobre A (llamados operadores modales) que satisfacen las siguientes condiciones:

L1) $s_i(x \vee y) = s_i x \vee s_i y$

L2) $s_i x \vee \sim s_i x = 1$

L3) $s_i s_j x = s_j x$

L4) $s_i \sim x = \sim s_{n-i} x$

L5) $s_1 x \leq s_2 x \leq \ldots \leq s_{n-1} x$

L6) Si $s_i x = s_i y$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, entonces $x = y$. (Principio de determinación de Moisil)

Esta noción fue introducida por Gr. C. Moisil en 1941 [23] y fue desarrolada por el mismo en [25, 26], por C. Sicoe [45, 46, 47] y por R. Cignoli [11].

En toda álgebra de Lukasiewicz n-valente valen las siguientes reglas de cálculo, cuya demostración es inmediata:

L7) $s_i(x \wedge y) = s_i x \wedge s_i y$

L8) $s_i x \wedge \sim s_i x = 0$

L9) $x \leqslant y$ si y sólo si $s_i x \leqslant s_i y$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

R. Cignoli [11] demostró que se pueden caracterizar las álgebras de Lukasiewicz n-valentes mediante L7, L8, L3, L4, L5 y L9 y que además valen las siguientes propiedades:

L10) $x \leqslant s_{n-1} x$

L11) $s_1 x \leqslant x$

L12) $s_i 1 = 1$, $s_i 0 = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

L13) $\sim x \vee s_{n-1} x = 1$

L14) $x \wedge \sim s_i x \wedge s_{i+1} y \leqslant y$ para $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Una nueva caracterización de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes puede darse ahora mediante las condiciones L1, L2, L3, L4, L5, L10 y L14, lo cual permite fácilmente caracterizar dichas álgebras mediante igualdades.

Denotaremos por L_n la variedad formada por todas las álgebras de Lukasiewicz n-valentes.

Si notamos el álgebra de Boole de todos los elementos complementados de A por B[A], entonces Moisil probó [25, p. 123] que:

I.1.4. LEMA. $x \in B[A]$ <u>si y sólo si</u> $s_i x = x$, <u>para algún</u> i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

En ese caso, $s_j x = x$ para todo j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, ya que si $s_i x = x$, entonces $s_j x = s_j s_i x = s_i x = x$. Además, si $x \in B[A]$, el complemento de x es $\sim x$.

Luego si escribimos $K_i = \{x \in A : s_i x = x\}$ se tiene que $K_1 = K_2 = \ldots = K_{n-1} = B[A]$.

Resulta en particular que un álgebra de Boole es un álgebra de Lukasiewicz n-valente si definimos $\sim x$ como el complemento de x y $s_i x = x$ para todo i. Además cualquier álgebra de Lukasiewicz 2-valente es un álgebra de Boole si definimos el complemento de x como $\sim x$.

El ejemplo más importante de álgebra de Lukasiewicz n-valente es el álgebra C_n, n entero $\geqslant 2$, de todas las fracciones $\frac{j}{n-1}$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, considerado como subreticulado de los números reales, y con la negación de Morgan y los operadores modales definidos como sigue:

$$\sim\left(\frac{j}{n-1}\right) = 1 - \frac{j}{n-1} \quad ;$$

$$s_i\left(\frac{j}{n-1}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } i + j < n \\ \\ 1 \text{ si } i + j \geq n \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \; j = 0, 1, \ldots, n-1$$

La importancia de este álgebra radica en que toda álgebra de Lukasiewicz n-valente es producto subdirecto de álgebras C_n [11].

Un caso particularmente interesante de álgebras de Lukasiewicz n-valentes está dado por las álgebras de Post n-valentes.

I.1.5. DEFINICION. Sea n un entero fijo, $n \geq 2$. Un álgebra de Post n-valente es un sistema $(P, 0, 1, \vee, \wedge, e_1, \ldots, e_{n-2})$ tal que $(P, 0, 1, \vee, \wedge)$ es un reticulado distributivo con primer elemento 0 y último elemento 1, y $e_1, \ldots, e_{n-2}$ son $n - 2$ elementos de P tales que:

P1) $0 = e_0 \leq e_1 \leq \ldots \leq e_{n-2} \leq e_{n-1} = 1$

P2) Si $B(P)$ denota el álgebra de Boole de todos los elementos complementados de P, para cada $x \in P$ existen elementos $b_1, \ldots, b_{n-1}$ en $B(P)$ tal que $x = (b_1 \wedge e_1) \vee (b_2 \wedge e_2) \vee \ldots \vee b_{n-1}$.

P3) Si $b \in B(P)$ y $b \wedge e_j \leq e_{j-1}$ para algún j, $1 \leq j \leq n-1$, entonces $b = 0$. T. Traczyk [49] .

Los elementos $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ son distintos y únicos [14]. Por otro lado, escribiendo $d_i = \bigvee_{j=1}^{n-i} b_j$, $1 \leq i \leq n-1$, se puede probar que todo elemento x del álgebra de Post P se puede escribir también en la forma $x = (d_1 \wedge e_1) \vee (d_2 \wedge e_2) \vee \ldots \vee d_{n-1}$

con $d_i \in B(P)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, y $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_{n-1}$.

G. Epstein (14) probó que esta representación es única y que si escribimos $d_i = D_i(x)$, y si b' es el complemento booleano de un elemento $b \in B(A)$, entonces el operador definido por

$$\sim x = \bigvee_{i=1}^{n-1} (e_i \wedge (D_{n-i}(x))') \quad \text{es una negación de Morgan.}$$

Si ahora escribimos $s_i(x) = D_{n-i}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, entonces se cumplen las propiedades L1 a L6, y además

$$s_i e_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i + j < n \\ 1 \text{ si } i + j \geqslant n \end{cases} \qquad (1).$$

Se tiene entonces el siguiente teorema que es una caracterización de las álgebras de Post n-valentes y cuya demostración puede encontrarse en (11):

I.1.6. TEOREMA. P <u>es un álgebra de Post n-valente si y solo si</u> P <u>es un álgebra de Lukasiewicz n-valente y</u> P <u>tiene</u> $n - 2$ <u>elementos</u> $e_1, \ldots, e_{n-2}$ <u>que satisfacen</u> (1).

Introducimos ahora la noción de álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica, donde $n \geqslant 2$ y $k \geqslant 1$ son enteros fijos.

I.1.7. DEFINICION. <u>Un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica es un sistema</u> $(A, 1, \vee, \wedge, \sim, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, T)$ <u>tal que</u> $(A, 1, \vee, \wedge, \sim, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ <u>es un álgebra de Lukasiewicz</u>

n-valente y T *es un automorfismo de* A *tal que* $T^k x = x$ *para todo* $x \in A$.

Si k es el menor entero positivo tal que $T^k x = x$ para todo $x \in A$, diremos que A es k-periódica.
Estudiaremos la clase ecuacional de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes k-cíclicas, donde $n \geqslant 2$ y $k \geqslant 1$ son enteros fijos, y la notaremos $L_{n,k}$.
Las álgebras de Boole son exactamente las álgebras de Lukasiewicz n-valentes k-cíclicas donde $n = 2$ y $k = 1$. Si $n = 2$ y $k = 2$ se tienen las álgebras de Boole simétricas introducidas por Gr. C. Moisil [24, 27] para estudiar la teoría de circuitos, y desarrolladas por A. Monteiro [30] [Ver también [1, 3]]. Si $n = 2$ y k es arbitrario se tienen las álgebras de Boole cíclicas estudiadas por A. Monteiro en [34].

En 1975, Samuel C. Lee y Y. Keren-Zvi [20] introdujeron las álgebras de Boole generalizadas en las cuales se extiende la operación de complementación a una operación más general llamada complemento generalizado, y se define además una operación, que llamaron rotación, y que tiene las propiedades del operador T definido anteriormente. En ese artículo probaron que este tipo de operaciones puede ser ventajosamente aplicado al diseño de sistemas digitales.

I.1.8. EJEMPLO. La siguiente álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica es importante. Consideremos el álgebra C_n definida anteriormente. Como L_n es una variedad, $C_n^k = \prod_{i=1}^{k} C_{n_i}$, donde $C_{n_i} = C_n$ para todo i, es un álgebra de Lukasiewicz n-valente. Si $f \in C_n^k$ y ponemos $Tf(i) = \begin{cases} f(i-1) & \text{si } i \neq 1 \\ f(k) & \text{si } i = 1 \end{cases}$

entonces T es un automorfismo de C_n^k. Sea $l \geqslant 1$ y sea $l = qk + r$, $0 \leqslant r < k$. Entonces se puede probar que

$$T^l f(i) = \begin{cases} f(i-r) & \text{si } i > r \\ f(i-r+k) & \text{si } i \leqslant r \end{cases}$$

En particular, $T^k f = f$ para todo $f \in C_n^k$, y por lo tanto el sistema $(C_n^k, T) \in L_{n,k}$, esto es, (C_n^k, T) es un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-periódica. Notaremos esta álgebra por $C_{n,k}$.

Sea $A \in L_n$. Un filtro F de A es un filtro de Stone cuando $x \in F$ implica $s_1 x \in F$.

Moisil (23) probó que para cada filtro de Stone F de A, la relación binaria definida por la condición $x \equiv y$ (mód F) si y sólo si existe $f \in F$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$ es una congruencia sobre A, y además $F = \{x \in A : x \equiv 1\}$. Recíprocamente, si $\equiv$ es una congruencia en A, se tiene que $F = \{x \in A : x \equiv 1\}$ es un filtro de Stone de A (11, p. 18).

Si F es un filtro de Stone de A, entonces $F^* = F \cap B(A)$ es un filtro del álgebra de Boole B(A) y $F = \{ x \in A : s_1 x \in F^* \}$. Recíprocamente, si F^* es un filtro de B(A), entonces el conjunto F definido por $F = s_1^{-1}(F^*) = \{ x \in A : s_1 x \in F^* \}$ es un filtro de Stone de A, y $F^* = F \cap B(A)$. Esto es, existe una correspondencia biunívoca entre los filtros de Stone de A y los filtros de B(A). Además, F es un filtro de Stone primo si y sólo si F^* es un filtro primo (i.e., maximal) en el álgebra de Boole B(A).

El siguiente teorema nos da una importante caracterización de los filtros de Stone maximales que nos será útil más adelante. Fue probado por A. Monteiro (29) para el caso $n = 3$.

I.1.9. TEOREMA. Para que un subconjunto M de un álgebra de Lukasiewicz A sea un filtro de Stone maximal es necesario y suficiente que M sea un filtro primo minimal de A (11).

Las álgebras simples de la variedad L_n quedan caracterizadas en el siguiente teorema:

I.1.10. TEOREMA. Sea $A \in L_n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) B(A) es el álgebra de Boole $\{0, 1\}$
2) A es isomorfa a una subálgebra de C_n
3) A es simple

(4, 11).

De aquí y del bien conocido teorema de Birkhoff (4, 9) sobre productos subdirectos en variedades se tiene:

I.1.11. COROLARIO. <u>Toda álgebra de Lukasiewicz n-valente no trivial es un producto subdirecto de una familia de subálgebras de</u> C_n.

Recordemos finalmente algunos resultados sobre la estructura de los filtros primos de las álgebras de Lukasiewicz (consideradas como reticulados distributivos acotados).

Sea $A \in L_n$. Sabemos que si U es un ultrafiltro del álgebra de Boole $B(A)$, entonces $s_1^{-1}(U)$ es un filtro de Stone primo de A. Es fácil ver que $s_1^{-1}(U)$ es el filtro de A generado por U. Además

$$U_i = s_i^{-1}(U) = \left\{ x \in A : s_i x \in U \right\}$$

son filtros primos de A y se tiene: $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1}$ y $U_i \cap B(A) = U$.

Recíprocamente, para cada filtro primo P de A existe un i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, tal que $P = (P^*)_i = P_i^*$. Por lo tanto se tiene:

I.1.12. TEOREMA. <u>Sea</u> $A \in L_n$. <u>Entonces todo filtro primo</u> P <u>del reticulado</u> A <u>es miembro de una y sólo una cadena de filtros primos con a lo sumo n - 1 elementos</u>.

I.1.13. COROLARIO. M <u>es un filtro de Stone maximal del álgebra de Lukasiewicz n-valente</u> A <u>si y sólo si existe un (único) filtro primo</u> P^* <u>de</u> $B(A)$ <u>tal que</u> $M = P_1^*$.

Este corolario fue probado por A. Monteiro (29) para el caso $n = 3$.

Como todo filtro primo P es de la forma P^*_i, con P^* filtro primo de $B(A)$, es fácil probar el teorema siguiente que caracteriza la transformación φ en el caso de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes:

I.1.14. TEOREMA. $\varphi(P^*_i) = P^*_{n-i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

En particular resulta que para todo filtro primo P de A, P y $\varphi(P)$ son comparables, lo cual es una condición necesaria y suficiente para que un álgebra de De Morgan sea de Kleene, esto es, toda álgebra de Lukasiewicz n-valente es un álgebra de Kleene (29).

I.2. HOMOMORFISMOS Y CONGRUENCIAS EN LAS ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ CICLICAS.

La noción de homomorfismo se define en la forma usual [9, Cap. VI], es decir, un homomorfismo es una aplicación de un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica A en un álgebra de la misma naturaleza A' que preserva todas las operaciones algebraicas; precisamente:

I.2.1. DEFINICION. _Sean_ A y A' _miembros de la variedad_ $L_{n,k}$. _Un homomorfismo_ h _de_ A _en_ A' _es una aplicación_ $h : A \longrightarrow A'$ _que satisface las siguientes condiciones_:

H1) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$

H2) $h(\sim x) = \sim h(x)$

H3) $h(s_i x) = s_i h(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$

H4) $h(Tx) = Th(x)$

Esto quiere decir que h es un homomorfismo de la estructura subyacente de álgebra de Lukasiewicz n-valente, lo que llamaremos L-homomorfismo, que verifica la propiedad adicional H4.

I.2.2. DEFINICION. _Se llama núcleo de un homomorfismo_ $h : A \longrightarrow A'$ _al conjunto_ $N(h) = h^{-1}(\{1\})$, _esto es_, $N(h) = \{ x \in A : h(x) = 1 \}$.

Se prueba sin dificultad que un homomorfismo h es un monomorfismo si y sólo si $N(h) = \{ 1 \}$, y que:

I.2.3. LEMA. _El núcleo_ $N = N(h)$ _de un homomorfismo tiene las siguientes propiedades_:

N1) N <u>es un filtro de</u> A

N2) <u>Si</u> $x \in N$ <u>entonces</u> $s_1 x \in N$

N3) <u>Si</u> $x \in N$ <u>entonces</u> $Tx \in N$

Esto es, el núcleo de un homomorfismo es un filtro de Stone que verifica N3.

I.2.4. DEFINICION. <u>Daremos el nombre de núcleo de un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica</u> A <u>a todo filtro de Stone</u> N <u>de</u> A <u>que verifique</u> N3, <u>y un núcleo se dice propio si</u> $N \neq A$.

Sea N un núcleo de A, $A \in L_{n,k}$. Diremos que dos elementos x e y de A son congruentes módulo N, y escribiremos $x \equiv y$ (mód N), si existe un $n \in N$ tal que $x \wedge n = y \wedge n$.

De la definición resulta que $x \equiv y$ (mód N) es una relación de congruencia sobre A considerada como álgebra de Lukasiewicz n-valente. Veamos que si $x \equiv y$ (mód N) entonces $Tx \equiv Ty$ (mód N). En efecto, por hipótesis existe $n \in N$ tal que $x \wedge n = y \wedge n$, luego $T(x \wedge n) = T(y \wedge n)$, i.e., $Tx \wedge Tn = Ty \wedge Tn$; como $Tn \in N$, podemos afirmar que $Tx \equiv Ty$ (mód N).

Sea $A' = A/\equiv$ el cociente de A por la relación de equivalencia $\equiv$, y sea $|x|$ la clase de equivalencia que contiene al elemento $x \in A$. Si algebrizamos A' en la forma natural, $|x| \wedge |y| = |x \wedge y|$, $|x| \vee |y| = |x \vee y|$, $\sim |x| = |\sim x|$, $s_i |x| = |s_i x|$, $T|x| = |Tx|$, entonces, como la noción de álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica es definible por igualdades, y como la relación $\equiv$ es una congruencia sobre el álgebra, se puede probar por métodos estandard [9, Cap. VI] que A' es un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica que tiene por último elemento a $|1| = N$, y que la aplicación $\psi(x) = |x|$ de A en A' es un epimorfismo cuyo núcleo es N. Escribiremos también $A' = A/N$ y diremos que A/N es el álgebra cociente de A por N. El epimorfismo ψ se lo denomina homomorfismo natural de A sobre A/N.

Se tiene además que si θ es una congruencia sobre A, el conjunto $N = \{x \in A : (x, 1) \in \theta\}$ es un núcleo de A, y existe un isomorfismo de orden entre el conjunto de los núcleos de A y el conjunto de las congruencias definidas sobre A.

El siguiente resultado se prueba en la forma habitual:

I.2.5. TEOREMA. <u>Sean</u> A, A', A'' <u>miembros de la variedad</u> $L_{n,k}$, $h' : A \longrightarrow A'$, $h'' : A \longrightarrow A''$ <u>homomorfismos. Si</u> $N(h') \subseteq N(h'')$ <u>entonces existe un único homomorfismo</u> $h : A' \longrightarrow A''$ <u>tal que</u> $h'' = h \circ h'$. <u>Además, si</u> h'' <u>es epimorfismo</u>, h <u>es epimorfismo, y si</u> h'' <u>es epimorfismo con</u> $N(h') = N(h'')$ <u>entonces</u> h <u>es un isomorfismo</u>.

I.2.6. COROLARIO. <u>Si</u> A y A' <u>son álgebras de Lukasiewicz n-valentes k-cíclicas y</u> $h : A \longrightarrow A'$ <u>un epimorfismo, entonces</u> A' <u>es isomorfa a</u> A/N(h).

<u>Demostración</u>. Como N(h) es un núcleo, podemos considerar el álgebra cociente A/N(h). Si ψ es el homomorfismo natural de A sobre A/N(h), entonces es fácil ver que $N(h) = N(\psi)$, y por lo tanto A' es isomorfa a A/N(h).

Podemos por consiguiente afirmar que todas las imágenes homomórficas de un álgebra A de $L_{n,k}$ se pueden obtener, a menos de isomorfismo, por la construcción indicada anteriormente, ya que si A' es una imagen homomórfica de A por medio del epimorfismo $h : A \longrightarrow A'$, entonces $A' = A/N(h)$, donde $=$ indica isomorfismo.

En adelante identificaremos álgebras isomorfas.

Consideremos ahora la operación binaria de implicación débil definida por : $x \longrightarrow y = s_{n-1} \sim x \vee y$. Es claro que sobre B(A), esta implicación coincide con la implicación clásica. Además, decir $x \leqslant y$ es equivalente a $s_i x \leqslant s_i y$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, y por lo anterior, esto es equivalente a $s_i x \longrightarrow s_i y = 1$. Luego se tiene que $x \leqslant y$ si y sólo si $s_i x \longrightarrow s_i y = 1$.

Entonces, si $h : A \longrightarrow A'$ es un epimorfismo, decir que $h(x) = h(y)$ es equivalente a decir que $s_i h(x) \longrightarrow s_i h(y) = s_i h(y) \longrightarrow s_i h(x) = 1$, esto es, $h(s_i x \longrightarrow s_i y) = h(s_i y \longrightarrow s_i x) = 1$, o sea, $s_i x \longrightarrow s_i y \in N(h)$ y $s_i y \longrightarrow s_i x \in N(h)$.

Se tiene entonces el siguiente corolario, que es una caracterización de las congruencias en términos de la implicación débil:

I.2.7. COROLARIO. $x \equiv y$ (mód N) <u>si y solo si</u> $s_i x \longrightarrow s_i y \in N$ <u>y</u> $s_i y \longrightarrow s_i x \in N$, para $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. [11]

<u>Demostración</u>. Basta considerar el epimorfismo $h : A \longrightarrow A/N$.

I.3. NUCLEOS MAXIMALES

Nos proponemos en este párrafo obtener una caracterización de los núcleos maximales de un álgebra $A \in L_{n,k}$.

Observemos en primer lugar que la familia de todos los núcleos propios de A, A no trivial, es inductiva superiormente, luego cada núcleo propio está contenido en un núcleo maximal.

Observemos también que si N es un núcleo y X es una parte de A tal que $N \subseteq X$, entonces $N \subseteq T(X)$. Esto es una consecuencia de que $T(N) = N$, lo cual resulta de la definición de núcleo y de que T tiene período k.

I.3.1. TEOREMA. <u>Si</u> P <u>es un filtro primo minimal, entonces</u> $N = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{k-1}(P)$ <u>es un núcleo maximal</u>.

<u>Demostración</u>. 1.- N es un filtro ya que es intersección de filtros.
2.- En un álgebra de Lukasiewicz n-valente la noción de filtro primo minimal es equivalente a la noción de filtro de Stone maximal [11]. Es fácil ver que $P = T^0(P), T(P), \ldots, T^{k-1}(P)$ son filtros primos minimales, y por lo tanto son, en particular, filtros de Stone. Luego si $x \in N$, entonces $x \in T^i(P)$ para todo i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, y por lo tanto $s_1x \in T^i(P)$ para todo i. Luego $s_1x \in N$.
De 1.- y 2.-, N es un filtro de Stone.
3.- Si $x \in N$, se prueba inmediatamente que $Tx \in N$, por lo tanto N es un núcleo.
4.- Veamos que N es un núcleo maximal. Supongamos que N no es

maximal. Entonces existe un núcleo maximal M tal que $N \subset M$. Como M es un filtro de Stone, M está contenido en un filtro de Stone maximal, o sea, existe un filtro primo minimal Q tal que $M \subseteq Q$. Entonces $N = P \cap T[P] \cap \ldots \cap T^{k-1}[P] \subset Q$. Luego existe un i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, tal que $T^{i}[P] \subseteq Q$. Como Q es un filtro primo minimal, $T^{i}[P] = Q$. Luego $M \subseteq T^{i}[P]$, y por lo tanto

$M \subseteq T^{i+1}[P], \ldots, M \subseteq T^{k}[P] = P,\ M \subseteq T[P],\ M \subseteq T^{2}[P], \ldots, M \subseteq T^{i-1}[P]$

Entonces $M \subseteq P \cap T[P] \cap \ldots \cap T^{k-1}[P] = N \subseteq M$, de donde resulta $M = N$, lo que es una contradicción.

I.3.2. TEOREMA. <u>Si</u> N <u>es un núcleo maximal, entonces existe un filtro primo minimal</u> P <u>tal que</u> $N = P \cap T[P] \cap \ldots \cap T^{k-1}[P]$.

<u>Demostración</u>. Si N es un núcleo maximal, entonces, como N es un filtro de Stone, existe un filtro primo minimal P tal que $N \subseteq P$. Entonces $N \subseteq P \cap T[P] \cap \ldots \cap T^{k-1}[P]$, y como $P \cap T[P] \cap \ldots \cap T^{k-1}[P]$ es un núcleo y N es maximal, resulta que $N = P \cap T[P] \cap \ldots \cap T^{k-1}[P]$.

I.3.3. DEFINICION. <u>Sea</u> P <u>un filtro primo minimal. Se dice que</u> P <u>es de período</u> d, <u>si</u> d <u>es el menor entero positivo tal que</u> $T^{d}[P] = P$. <u>En este caso diremos que el núcleo maximal</u> $N = P \cap T[P] \cap \ldots \cap T^{d-1}[P]$ <u>es de período</u> d, <u>o que</u> N <u>es un d-núcleo</u>.

I.3.4. TEOREMA. Si el filtro primo minimal P es de período d, entonces $d|k$.

Demostración. Sea $k = q.d + r$. Entonces $P = T^k[P] = T^{q.d + r}[P]$ $= T^r[\ T^{q.d}[P]] = T^r[P]$, es decir, $T^r[P] = P$ y $r < d$.

Luego $r = 0$ y por lo tanto $k = q.d$.

I.3.5. TEOREMA. Si $N = P \cap T[P] \cap \ \ldots \ \cap T^{d-1}[P]$ es un núcleo maximal, donde P es un filtro primo de período d, entonces los únicos filtros primos minimales que contienen a N son P, $T[P], \ldots, T^{d-1}[P]$

Demostración. Si Q es un filtro primo minimal que contiene a N, entonces $P \cap T[P] \cap \ \ldots \ \cap T^{d-1}[P] \subseteq Q$. Luego existe i, $0 \leqslant i \leqslant d$ tal que $T^i[P] \subseteq Q$, esto es, $T^i[P] = Q$.

I.4. PRODUCTO DIRECTO Y SUBDIRECTO DE ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ CICLICAS.

El siguiente teorema nos será útil más adelante:

I.4.1. TEOREMA. Si $A \in L_{n,k}$, la intersección de todos los núcleos maximales de A es el núcleo $\{1\}$.

Demostración. Si $\{N_j\}_{j \in J}$ es la familia de todos los núcleos maximales de A, entonces por los teoremas I.3.2 y I.3.5, Cada N_j está contenido en un filtro primo minimal P_j, y $\{P_j, T(P_j), \ldots, T^{k-1}(P_j)\}_{j \in J}$ es la familia de todos los filtros primos minimales de A. Además

$$\bigcap_{j \in J} N_j = \bigcap_{j \in J} (P_j \cap T(P_j) \cap \ldots \cap T^{k-1}(P_j)).$$

Pero en un álgebra de Lukasiewicz n-valente, la intersección de todos los filtros primos minimales es $\{1\}$ (11, teoremas 2.19 y 2.20). Luego $\bigcap_{j \in J} N_j = \{1\}$.

I.4.2. DEFINICION. Diremos que un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica A es simple si A no es trivial, esto es, A tiene más de un elemento, y las únicas imágenes homomórficas de A son A y el álgebra trivial.

Como las imágenes homomórficas de A son de la forma A/N, donde N es un núcleo de A, resulta en forma inmediata [9, p.138] que:

I.4.3. TEOREMA. <u>Sea</u> A $\in L_{n,k}$. <u>Entonces</u> A <u>es simple si y sólo si los únicos núcleos de</u> A <u>son</u> A <u>y</u> $\{1\}$.

Si notamos $I(A) = \{ x \in A : Tx = x \}$, se tiene :

I.4.4. TEOREMA. <u>Sea</u> A $\in L_{n,k}$. <u>Entonces</u> A <u>es simple si y sólo si</u> $K_1(A) \cap I(A) = \{0, 1\}$.

<u>Demostración</u>. Supongamos que A es simple. Siempre $\{0, 1\} \subseteq K_1(A) \cap I(A)$. Si $a \in K_1(A) \cap I(A)$, entonces el filtro $F(a)$ generado por a, es un núcleo. En efecto, si $b \in F(a)$, es $a \leqslant b$ y entonces $Ta \leqslant Tb$, pero $Ta = a$, luego $a \leqslant Tb$ y por lo tanto $Tb \in F(a)$. Además, $s_1a \leqslant s_1b$ y como $s_1a = a$, $a \leqslant s_1b$, de donde $s_1b \in F(a)$. Como A es simple, por I.4.3 debe ser $F(a) = \{1\}$ ó $F(a) = A$, de donde $a = 1$ ó $a = 0$.
Recíprocamente, supongamos que $K_1(A) \cap I(A) = \{0, 1\}$. Sea N un núcleo de A, $N \neq A$ y $a \in N$; entonces $s_1(a \wedge Ta \wedge \ldots \wedge T^{k-1}a) \in N \cap K_1(A) \cap I(A)$. De $N \neq A$ resulta $s_1(a \wedge Ta \wedge \ldots \wedge T^{k-1}a) = 1$, y como $s_1(a \wedge Ta \wedge \ldots \wedge T^{k-1}a) \leqslant a \wedge Ta \wedge \ldots \wedge T^{k-1}a$, se tiene entonces $a \wedge Ta \wedge \ldots \wedge T^{k-1}a = 1$, y por lo tanto $a = 1$. Luego $N = \{1\}$.

I.4.5. COROLARIO. <u>El álgebra</u> $C_{n,k}$ <u>es simple</u>.

<u>Demostración</u>. En efecto, si $f \in K_1[C_{n,k}] \cap I[C_{n,k}]$, entonces $Tf = f$, de donde $T^l f = f$, $1 \leqslant l \leqslant k-1$, esto es, $(T^l f)(i) = f(i)$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant l \leqslant k-1$; pero

$$T^l f(i) = \begin{cases} f(i-l) & \text{si } i > l \\ \\ f(i-l+k) & \text{si } i \leqslant l \end{cases}$$

En particular, para $i = k$, $T^l f(k) = f(k-l) = f(k)$, $1 \leqslant l \leqslant k-1$. Luego f es constante, esto es, $f(i) = f(j)$ para $i, j \in \{1,\ldots k\}$. Como además $s_1 f = f$, entonces $s_1 f(i) = f(i)$, luego $f(i) \in B(C_n) = \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Por lo tanto $f = \mathbf{0}$ ó $f = \mathbf{1}$, donde $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son el primer y último elemento respectivamente de $C_{n,k}$. Luego $K_1[C_{n,k}] \cap I[C_{n,k}] = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

I.4.6. COROLARIO. <u>Toda subálgebra</u> S <u>de un álgebra simple</u> A <u>es un álgebra simple</u>.

<u>Demostración</u>. En efecto, $K_1(S) = K_1(A) \cap S$, e $I(S) = I(A) \cap S$, luego si $K_1(A) \cap I(A) = \{0, 1\}$, entonces $K_1(S) \cap I(S) = \{0, 1\}$.

En particular, de I.4.5 y I.4.6 se tiene que todas las subálgebras del álgebra $C_{n,k}$ son álgebras simples.

Como consecuencia del teorema I.4.3, tenemos también:

I.4.7. TEOREMA. Si M es un núcleo maximal de A, entonces A/M es un álgebra simple.

Demostración. Sea N' un núcleo de A/M y $\psi : A \longrightarrow A/M$ el homomorfismo natural. Entonces $\psi^{-1}(N')$ es un núcleo de A que contiene a M, y como M es un núcleo maximal, debe ser $\psi^{-1}(N') = M$ o bien $\psi^{-1}(N') = A$, de donde $N' = \{1\}$ o $N' = A/M$, y por I.4.3, A/M es simple.

I.4.8. DEFINICION. Se dice que un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica A es producto subdirecto de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de álgebras de la misma naturaleza si :

1) A es isomorfa a una subálgebra A^* del álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica $\prod_{i \in I} A_i$.

2) La proyección de A^* sobre cada eje A_i es un epimorfismo.

A se dice semisimple si es producto subdirecto de una familia de álgebras simples (9).

La demostración del próximo teorema es una adaptación de técnicas habituales de álgebra universal (9, corol.1, teor.11, Cap. VI).

I.4.9. TEOREMA. Para que un álgebra $A \in L_{n,k}$ sea producto subdirecto de una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de álgebras de la misma naturaleza, es necesario y suficiente que exista una familia $\{N_i\}_{i \in I}$

de núcleos de A tal que:

1) $\bigcap_{i \in I} N_i = \{1\}$.

2) $A_i = A/N_i$ para todo $i \in I$.

Demostración. Condición necesaria. Supongamos que A es isomorfa a una subálgebra A^* de $P = \prod_{i \in I} A_i$ y sea h el isomorfismo. Sea $p_i : P \longrightarrow A_i$ la proyección que al elemento z de P le hace corresponder la i-ésima coordenada $z(i) = z_i \in A_i$. Como p_i es un epimorfismo de A^* sobre A_i, la composición $h_i = p_i \circ h$ es un epimorfismo. Luego $N_i = N(h_i)$ es un núcleo de A que verifica $A_i = A/N_i$. Sea $N = \bigcap_{i \in I} N_i$. Si $x \in N$, entonces $h_i(x) = 1$ para todo $i \in I$, esto es, $1 = p_i(h(x)) = x_i$, cualquiera que sea $i \in I$. Por lo tanto $h(x) = 1$ y como h es inyectiva, $x = 1$. Luego $N = \{1\}$.

Condición suficiente. Sea $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia de núcleos de A tales que $\bigcap_{i \in I} N_i = \{1\}$ y veamos que A es producto subdirecto de la familia $\{A_i = A/N_i\}_{i \in I}$. Para cada $i \in I$, sea ψ_i el homomorfismo natural de A sobre A_i. Si $x \in A$, sea x^* la función definida sobre I por $x^*(i) = \psi_i(x)$. Es claro que $x^* \in P = \prod_{i \in I} A_i$. Sea $A^* = \{x^* : x \in A\}$ y sea $h : A \longrightarrow P$ definida por $h(x) = x^*$. Se verifica sin dificultad que h es un epimorfismo de A sobre A^*.

Si $x_i \in A_i$, existe $x \in A$ tal que $\psi_i(x) = x_i$, y por lo tanto $p_i(x^*) = x_i$, es decir, las restricciones de las proyecciones de P a A^* son epimorfismos de A^* sobre los ejes A_i. Veamos que h es inyectiva: $N(h) = \{ x \in A : h(x) = 1 \} = \{ x \in A : x^* = 1 \} =$

$= \{ x \in A : \psi_i(x) = 1$ para todo $i \in I \} =$

$= \{ x \in A : x \in N_i$ para todo $i \in I \} = \bigcap_{i \in I} N_i = \{ 1 \}$.

I.4.10. TEOREMA. <u>Toda álgebra</u> $A \in L_{n,k}$ <u>no trivial es semisimple</u>.

<u>Demostración</u>. Sea $\mathcal{N} = \{ N_i \}_{i \in I}$ la familia de todos los núcleos maximales de A. Sabemos que $\bigcap_{i \in I} N_i = \{ 1 \}$, luego si $S_i = A/M_i$, podemos afirmar que A es producto subdirecto de la familia $\{ S_i \}_{i \in I}$. Además las álgebras S_i son álgebras simples.

El teorema I.4.10 será reformulado en forma más precisa una vez que determinemos las álgebras simples, lo que haremos en el próximo párrafo.

I.5. ALGEBRAS SIMPLES.

Observemos que la restricción de T a $B(A)$ es un automorfismo de $B(A)$. En efecto, claramente $T|_{B(A)} : B(A) \longrightarrow B(A)$. Además, si $y \in B(A)$ existe $x \in A$ tal que $Tx = y$, y se ve sin dificultad que $x \in B(A)$, luego $T(B(A)) = B(A)$. Usando este hecho se prueba:

I.5.1. LEMA. <u>Si</u> $A \in L_{n,k}$ <u>y</u> P <u>es un filtro primo de</u> A, <u>entonces</u> $T(P_i^*) = T(P)_i^*$.

<u>Demostración</u>. Probemos:

a) $T(P^*) = T(P)^*$

b) Si U es un ultrafiltro de $B(A)$, $T(U_i) = T(U)_i$

a) $T(P^*) = T(P \cap B(A)) = T(P) \cap B(A) = T(P)^*$

b) Sea $x \in T(U_i)$, entonces $x = Ty$, $y \in U_i$, o sea, $s_i y \in U$. Pero $s_i x = s_i Ty = Ts_i y$, luego $s_i x \in T(U)$ y por lo tanto, $x \in T(U)_i$, luego $T(U_i) \subseteq T(U)_i$.

Sea ahora $x \in T(U)_i$. Entonces $s_i x \in T(U)$ y $T^{k-1}s_i x \in U$, esto es, $s_i T^{k-1} x \in U$, de donde $T^{k-1}x \in U_i$, y por lo tanto, $T^k x = x \in T(U_i)$. Luego $T(U)_i \subseteq T(U_i)$.

Sea M un núcleo maximal de período d del álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica A, $M = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{d-1}(P)$, $d|k$, P filtro primo minimal, y por lo tanto $P = P_1^*$.

Sabemos que P es el primer elemento de la siguiente cadena, que es única, de filtros primos:

$$P = P_1^* \subseteq P_2^* \subseteq \dots \subseteq P_{n-1}^* \qquad (1)$$

donde las inclusiones no son necesariamente propias.

Lo mismo podemos observar para los filtros primos minimales $T(P), \dots, T^{d-1}(P)$, es decir, cada uno de ellos es el primer elemento de una única cadena de filtros primos como en (1), en la que valen las mismas inclusiones, propias o no. Tenemos entonces:

$$\begin{array}{lllll}
P = P_1^* & \subseteq P_2^* & \subseteq \dots & \subseteq P_{n-1}^* \\
T(P) = T(P)_1^* & \subseteq T(P)_2^* & \subseteq \dots & \subseteq T(P)_{n-1}^* \\
T^2(P) = T^2(P)_1^* & \subseteq T^2(P)_2^* & \subseteq \dots & \subseteq T^2(P)_{n-1}^* \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \\
T^{d-1}(P) = T^{d-1}(P)_1^* & \subseteq T^{d-1}(P)_2^* & \subseteq \dots & \subseteq T^{d-1}(P)_{n-1}^*
\end{array}$$

Escribamos por conveniencia de notación $P_0^* = \emptyset$ y $P_n^* = A$, y notemos $\triangle(j_1, j_2, \dots, j_d) =$

$$= (P_{j_1}^* - P_{j_1-1}^*) \cap (T(P)_{j_2}^* - T(P)_{j_2-1}^*) \cap \dots \cap (T^{d-1}(P)_{j_d}^* - T^{d-1}(P)_{j_d-1}^*),$$

$1 \leqslant j_i \leqslant n$.

I.5.2. LEMA. Si $a, b \in \Delta[j_1, j_2, \ldots, j_d]$, entonces $a \equiv b$ (mód M).

<u>Demostración</u>. Veamos que de $a, b \in P^*_{j_1} - P^*_{j_1-1}$ se deduce que

$s_i a \longrightarrow s_i b \in P^*_1$ y $s_i b \longrightarrow s_i a \in P^*_1$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$.

Si $i \geq j_1$, $s_i a \geq s_{j_1} a$; como $s_{j_1} a \in P^* \subseteq P^*_1$, entonces $s_i a \in P^*_1$.

Análogamente $s_i b \in P^*_1$, y como $s_i a \leq s_i b \longrightarrow s_i a$ y $s_i b \leq s_i a \longrightarrow s_i b$,

entonces $s_i a \longrightarrow s_i b \in P^*_1$ y $s_i b \longrightarrow s_i a \in P^*_1$.

Supongamos ahora que $i < j_1$, entonces $i \leq j_1 - 1$. De $a \notin P^*_{j_1-1}$,

$\sim a \notin \sim P^*_{j_1-1}$, esto es, $\sim a \in \complement \sim P^*_{j_1-1} = \varphi(P^*_{j_1-1}) = P^*_{n-j_1-1}$

por I.1.14. Luego $s_{n-j_1-1} \sim a \in P^* \subseteq P^*_1$. Pero $n-i \geq n-j_1+1$.

Luego $s_{n-i} \sim a \geq s_{n-j_1+1} \sim a$, y por lo tanto $s_{n-i} \sim a \in P^*_1$.

Análogamente $s_{n-i} \sim b \in P^*_1$.

Como $s_i a \longrightarrow s_i b = s_{n-1} \sim s_i a \vee s_i b = \sim s_1 s_i a \vee s_i b = \sim s_i a \vee s_i b =$

$= s_{n-i} \sim a \vee s_i b$, entonces $s_{n-i} \sim a \leq s_i a \longrightarrow s_i b$ y

$s_{n-i} \sim b \leq s_i b \longrightarrow s_i a$. Luego $s_i a \longrightarrow s_i b$ y $s_i b \longrightarrow s_i a \in P^*_1$.

De la misma manera se prueba que de $a, b \in T^{l-1}(P)^*_{j_l} - T^{l-1}(P)^*_{j_l-1}$,

resulta $s_i a \longrightarrow s_i b \in T^{l-1}(P)^*_1$ y $s_i b \longrightarrow s_i a \in T^{l-1}(P)^*_1$, $2 \leq l \leq d$.

Luego $s_i a \longrightarrow s_i b$, $s_i b \longrightarrow s_i a \in P^*_1 \cap T(P)^*_1 \cap \ldots \cap T^{d-1}(P)^*_1 = M$

y entonces por I.2.7, $a \equiv b$ (mód M).

I.5.3. LEMA. <u>Si</u> $a \in \triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d)$ <u>y</u> $a \equiv x$ (mód M), <u>entonces</u> $x \in \triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d)$.

<u>Demostración</u>. De $a \equiv x$ (mód M), existe $m \in M$ tal que $a \wedge m = x \wedge m$.

Pero $M \subseteq P^*_{j_1} \cap T(P)^*_{j_2} \cap \ldots \cap T^{d-1}(P)^*_{j_d}$, y como $m \in M$ y $a \in \triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d)$, resulta

$a, m \in P^*_{j_1} \cap T(P)^*_{j_2} \cap \ldots \cap T^{d-1}(P)^*_{j_d}$, luego

$x \wedge m = a \wedge m \in P^*_{j_1} \cap T(P)^*_{j_2} \cap \ldots \cap T^{d-1}(P)^*_{j_d}$, de donde resulta

que $x \in P^*_{j_1} \cap T(P)^*_{j_2} \cap \ldots \cap T^{d-1}(P)^*_{j_d}$.

Si $x \in P^*_{j_1-1}$, de $a \wedge m = x \wedge m$ y $m \in M \subseteq P^*_{j_1-1}$, resulta

$x \wedge m \in P^*_{j_1-1}$, y entonces $a \wedge m \in P^*_{j_1-1}$, de donde $a \in P^*_{j_1-1}$,

lo cual es imposible. Luego $x \notin P^*_{j_1-1}$.

De la misma manera se prueba que $x \notin T(P)^*_{j_2-1}, \ldots, T^{d-1}(P)^*_{j_d-1}$.

Luego $x \in \triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d)$.

De los lemas I.5.2 y I.5.3 resulta que las clases de equivalencia determinadas por la congruencia módulo el núcleo maximal M son aquellos conjuntos $\triangle[j_1, j_2,\dots, j_d]$ que no son vacíos.

Veamos cómo están definidas las operaciones en el álgebra cociente A/M.

I.5.4. LEMA. Si $x \in \triangle[j_1, j_2,\dots, j_d]$, $y \in \triangle[i_1, i_2,\dots, i_d]$, entonces $x \wedge y \in \triangle[\text{máx}[j_1,i_1], \text{máx}[j_2,i_2],\dots, \text{máx}[j_d,i_d]]$.

Demostración. Sea $h_1 = \text{máx}[j_1,i_1]$. Entonces, de $x \in P^*_{j_1} - P^*_{j_1-1}$ e $y \in P^*_{i_1} - P^*_{i_1-1}$ se tiene $x, y \in P^*_{h_1}$, y $x \notin P^*_{h_1-1}$ o $y \notin P^*_{h_1-1}$.

Luego $x \wedge y \in P^*_{h_1}$, y como $x \wedge y \leqslant x$ y $x \wedge y \leqslant y$, debe ser $x \wedge y \notin P^*_{h_1-1}$, esto es, $x \wedge y \in P^*_{h_1} - P^*_{h_1-1}$.

Análogamente, $x \wedge y \in T(P)^*_{h_2} - T(P)^*_{h_2-1}, \dots, T^{d-1}(P)^*_{h_d} - T^{d-1}(P)^*_{h_d-1}$, donde $h_2 = \text{máx}[j_2,i_2],\dots, h_d = \text{máx}[j_d,i_d]$.

I.5.5. LEMA. $a \in \triangle[j_1, j_2,\dots, j_d]$ si y sólo si

$$\sim a \in \triangle[n-j_1+1, n-j_2+1,\dots, n-j_d+1]$$

Demostración. Las siguientes condiciones son equivalentes:

$a \in P^*_{j_1}$; $\sim a \in \sim P^*_{j_1}$; $\sim a \notin \complement \sim P^*_{j_1} = \varphi(P^*_{j_1}) = P^*_{n-j_1}$.

Y también: $a \notin P^*_{j_1-1}$; $\sim a \notin \sim P^*_{j_1-1}$; $\sim a \in \complement \sim P^*_{j_1-1} =$

$= \varphi(P^*_{j_1-1}) = P^*_{n-j_1+1}$. Por lo tanto

$a \in P^*_{j_1} - P^*_{j_1-1}$ si y sólo si $\sim a \in P^*_{n-j_1+1} - P^*_{n-j_1}$.

Análogamente se prueba que $a \in T^{i-1}(P)^*_{j_i} - T^{i-1}(P)^*_{j_i-1}$ si y sólo si

$\sim a \in T^{i-1}(P)^*_{n-j_i+1} - T^{i-1}(P)^*_{n-j_i}$, $2 \leq i \leq d$.

I.5.6. LEMA. Si $a \in \triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d)$ entonces

$s_i a \in \triangle(l_1, l_2, \ldots, l_d)$ donde $l_h = \begin{cases} 1 \text{ si } i \geq j_h \\ \\ n \text{ si } i < j_h \end{cases}$, $1 \leq h \leq d$.

Demostración. En efecto, basta probar que si $a \in \triangle(j_1, \ldots, j_d)$,

entonces

$a_1)$ $s_i a \in P^*_1$ si y sólo si $i \geq j_1$

$s_i a \notin P^*_{n-1}$ si y sólo si $i < j_1$

$a_2)$ $s_i a \in T(P)^*_1$ si y sólo si $i \geq j_2$

$s_i a \notin T(P)^*_{n-1}$ si y sólo si $i < j_2$

....

$a_d)$ $s_i a \in T^{d-1}(P)^*_1$ si y sólo si $i \geq j_d$

$s_i a \notin T^{d-1}(P)^*_{n-1}$ si y sólo si $i < j_d$

Vamos a probar $a_1)$ ya que el resto de los incisos se demuestra en forma análoga.

Supongamos que $s_i a \in P^*_1$; si fuese $i < j_1$ entonces $i \leq j_1-1$, luego $P^*_i \subseteq P^*_{j_1-1}$. como $a \in \Delta[j_1, j_2, \ldots, j_d]$, $a \in P^*_{j_1} - P^*_{j_1-1}$.

De $a \notin P^*_{j_1-1}$ resulta $a \notin P^*_i$. Luego $s_i a \notin P^* = P \cap B[A] = P^*_1 \cap B[A]$.

Como $s_i a \in B[A]$, entonces $s_i a \notin P^*_1$, lo cual es una contradicción.

Luego $i \geq j_1$.

Recíprocamente, supongamos $i \geq j_1$; entonces $P^*_i \supseteq P^*_{j_1}$. Como

$a \in P^*_{j_1}$, entonces $a \in P^*_i$. Luego $s_i a \in P^* \subseteq P^*_1$, y por lo tanto

$s_i a \in P^*_1$.

Probemos ahora la segunda parte.

Supongamos que $s_i a \notin P^*_{n-1}$. Si fuese $i \geq j_1$ entonces $P^*_i \supseteq P^*_{j_1}$.

Como $a \in P^*_{j_1}$ entonces $a \in P^*_i$. Luego $s_i a \in P^* \subseteq P^*_{n-1}$, de donde re-

sulta $s_i a \in P^*_{n-1}$, lo cual contradice la hipótesis.

Supongamos ahora que $i < j_1$, entonces $i \leq j_1-1$, luego $P^*_i \subseteq P^*_{j_1-1}$.

Como $a \notin P^*_{j_1-1}$ entonces $a \notin P^*_i$, esto es, $s_i a \notin P^*$. Luego

$s_{n-1} s_i a = s_i a \notin P^*$ y en consecuencia $s_i a \notin P^*_{n-1}$.

I.5.7. LEMA <u>Si</u> $a \in \Delta[j_1, j_2, \ldots, j_d]$ <u>entonces</u>

$$Ta \in \Delta[j_d, j_1, \ldots, j_{d-1}]$$

Demostración. Inmediata.

Sea $M = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{d-1}(P)$ un núcleo maximal de A de período d, $d|k$, P filtro primo minimal. Sea $\varphi : A \longrightarrow C_{n,k}$ la aplicación que a cada $x \in A$ le hace corresponder la función $f_x : \{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow C_n$ tal que si $x \in \triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d)$, $1 \leq j_i \leq n$, y si $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ con $r \equiv h$ (mód d) para algún h, $1 \leq h \leq d$, $f_x(r) = \dfrac{n-j_h}{n-1}$. Entonces

I.5.8. TEOREMA. φ es un homomorfismo tal que $N(\varphi) = M$.

Demostración. Observemos que si $r \equiv h$ (mód d) entonces $f_x(r) = f_x(h)$. Por comodidad supondremos que $r = h$, con $1 \leq h \leq d$.

Comencemos por probar que la fórmula dada define un homomorfismo. Para ello es suficiente probar H2, H3 y H4 de la definición I.2.1, juntamente con H5 : $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$. Probemos entonces sucesivamente:

H5) $f_{x \wedge y} = f_x \wedge f_y$.

Sea $x \in \triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d)$, $y \in \triangle(i_1, i_2, \ldots, i_d)$. Por el lema I.5.4, $x \wedge y \in \triangle(\text{máx}(j_1,i_1), \text{máx}(j_2,i_2), \ldots, \text{máx}(j_d,i_d))$.

Entonces $f_x(h) = \dfrac{n-j_h}{n-1}$; $f_y(h) = \dfrac{n-i_h}{n-1}$;

$$(f_x \wedge f_y)(h) = f_x(h) \wedge f_y(h) = \text{mín}\left(\frac{n-j_h}{n-1}, \frac{n-i_h}{n-1} \right) =$$

$$= \frac{\text{mín}(n-j_h,\ n-i_h)}{n-1} = \frac{n - \text{máx}(j_h,\ i_h)}{n-1} = f_{x \wedge y}(h).$$

H2) $f_{\sim x} = \sim f_x$.

Sea $x \in \triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d)$; entonces $f_x(h) = \dfrac{n-j_h}{n-1}$ y

$$\sim f_x(h) = 1 - \frac{n-j_h}{n-1} = \frac{j_h-1}{n-1} .$$

Por otro lado, por el lema I.5.5, $\sim x \in \triangle(n-j_1+1, \ldots, n-j_d+1)$,

luego $f_{\sim x}(h) = \dfrac{n - (n-j_h+1)}{n-1} = \dfrac{j_h-1}{n-1}$, lo que prueba H2.

H3) $f_{s_i x} = s_i f_x$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Sea $x \in \triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d)$; entonces $f_x(h) = \dfrac{n-j_h}{n-1}$ y

$$s_i f_x(h) = s_i \frac{n-j_h}{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + n - j_h \geqslant n \\ 0 & \text{si } i + n - j_h < n \end{cases}$$, es decir,

$$s_i f_x(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geqslant j_h \\ 0 & \text{si } i < j_h \end{cases}$$

Por otro lado, por el lema I.5.6, $s_i x \in \triangle(l_1, l_2, \ldots, l_d)$ donde

$$l_h = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j_h \\ n & \text{si } i < j_h \end{cases}, \quad 1 \leq h \leq d, \text{ luego } \quad f_{s_i x}(h) = \frac{n-l_h}{n-1},$$

pero

$$n-l_h = \begin{cases} n-1 & \text{si } i \geq j_h \\ 0 & \text{si } i < j_h \end{cases}, \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{n-l_h}{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j_h \\ 0 & \text{si } i < j_h \end{cases}, \text{ esto es, } \quad f_{s_i x} = s_i f_x$$

H4) $f_{Tx} = Tf_x$.

Observemos que si $r \equiv h$ (mód d), también la función Tf_x tiene la propiedad $(Tf_x)(r) = (Tf_x)(h)$, porque la función f_x la tiene. Luego también en este caso supondremos $r = h$, con $1 \leq h \leq d$.

Sea $x \in \Delta(j_1, j_2, \ldots, j_d)$; entonces $f_x(h) = \dfrac{n-j_h}{n-1}$ y

$$(Tf_x)(h) = \begin{cases} f_x(d) & \text{si } h = 1 \\ f_x(h-1) & \text{si } h \neq 1 \end{cases}, \text{ i.e., } \quad (Tf_x)(h) = \begin{cases} \dfrac{n-j_d}{n-1} & \text{si } h = 1 \\[2ex] \dfrac{n-j_{h-1}}{n-1} & \text{si } h \neq 1 \end{cases}$$

Por el lema I.5.7, $Tx \in \triangle[j_d, j_1, \ldots, j_{d-1}]$, luego

$$f_{Tx}(h) = \begin{cases} \dfrac{n-j_d}{n-1} & \text{si } h = 1 \\[2ex] \dfrac{n-j_{h-1}}{n-1} & \text{si } h \neq 1 \end{cases}$$

y por lo tanto $f_{Tx} = Tf_x$.

De H5, H2, H3 y H4 resulta que φ es un homomorfismo.

Finalmente

$$M = P \cap T(P) \cap \ldots \cap T^{d-1}(P) = P_1^* \cap T(P)_1^* \cap \ldots \cap T^{d-1}(P)_1^* =$$

$$= (P_1^* - P_0^*) \cap (T(P)_1^* - T(P)_0^*) \cap \ldots \cap (T^{d-1}(P)_1^* - T^{d-1}(P)_0^*) =$$

$$= \triangle[1, 1, \ldots, 1] = N(\varphi).$$

I.5.9. COROLARIO. Si $A \in L_{n,k}$ y M es un núcleo maximal de A, entonces A/M es una subálgebra de $C_{n,k}$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema I.5.8.

Como identificamos álgebras isomorfas, tendremos ahora el siguiente corolario:

I.5.10. COROLARIO. Los miembros simples de la variedad $L_{n,k}$ son las subálgebras de $C_{n,k}$.

Demostración. Si S es un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica simple, S es no trivial y el núcleo $M = \{1\}$ es maximal. Por el teorema I.5.8, S/M es isomorfa a una subálgebra de $C_{n,k}$.

Pero S/M y S son isomorfas, luego S es isomorfa a una subálgebra de $C_{n,k}$.

Recíprocamente, sabemos por I.4.5 y I.4.6 que las subálgebras de $C_{n,k}$ son álgebras simples.

Podemos ahora enunciar el teorema I.4.10 en forma más precisa:

I.5.11. TEOREMA. <u>Toda álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica no trivial es producto subdirecto de una familia de subálgebras de</u> $C_{n,k}$.

Sabemos que todo filtro primo minimal P de un álgebra de Lukasiewicz n-valente A es el primer elemento de la siguiente cadena, que es única, de filtros primos de A:

$$P = P_1^* \subseteq P_2^* \subseteq \dots \subseteq P_{n-1}^*$$

que tiene a lo sumo n-1 elementos.

I.5.12. DEFINICION. <u>Se dice que</u> P <u>es de orden</u> t, $2 \leq t \leq n$, <u>si dicha cadena de filtros primos tiene</u> t - 1 <u>elementos distintos</u>.

Por otro lado, si M es un núcleo maximal de A de período d, entonces $M = P \cap T(P) \cap \dots \cap T^{d-1}(P)$, $d|k$, P filtro primo minimal. Diremos que el núcleo maximal M es de orden t si el filtro primo es de orden t.

Observemos que si M es un núcleo maximal de período d y de orden t, M está contenido exactamente en los siguientes (t-1).d filtros primos:

$$\begin{array}{lllll}
P = P_1^* & \subseteq P_2^* & \subseteq \cdots \subseteq P_{n-1}^* \\
T(P) = T(P)_1^* & \subseteq T(P)_2^* & \subseteq \cdots \subseteq T(P)_{n-1}^* \\
T^2(P) = T^2(P)_1^* & \subseteq T^2(P)_2^* & \subseteq \cdots \subseteq T^2(P)_{n-1}^* \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
T^{d-1}(P) = T^{d-1}(P)_1^* & \subseteq T^{d-1}(P)_2^* & \subseteq \cdots \subseteq T^{d-1}(P)_{n-1}^*
\end{array}$$

Por ser T un automorfismo y P de orden t, cada cadena contiene exactamente t - 1 elementos distintos. Además, como en un álgebra de Lukasiewicz n-valente todo filtro primo pertenece a una y sólo una cadena de filtros primos (11, p.22), no puede verificarse

$$T^i(P)_h^* = T^j(P)_1^* \quad , \quad i \neq j.$$

Por otro lado, los (t-1).d filtros primos anteriores son los únicos filtros primos que contienen a M. En efecto, si Q es un filtro primo tal que $M = P_1^* \cap T(P)_1^* \cap \ldots \cap T^{d-1}(P)_1^* \subseteq Q$, entonces existe un i tal que $T^i(P)_1^* \subseteq Q$, $0 \leqslant i \leqslant d-1$, luego Q pertenece a la cadena de filtros primos cuyo primer elemento es $T^i(P)_1^*$, y es por lo tanto uno de ellos.

I.5.13. TEOREMA. <u>Un núcleo maximal</u> M <u>de un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica</u> A <u>es de período</u> d <u>y de orden</u> t, $d|k$, $2 \leqslant t \leqslant n$, si y sólo si A/M es isomorfa a una subálgebra de $C_{n,k}$ con t^d elementos.

Demostración. Como los elementos de A/M son los $\triangle(j_1, j_2, \ldots, j_d) =$

$$= (P^*_{j_1} - P^*_{j_1-1}) \cap (T(P)^*_{j_2} - T(P)^*_{j_2-1}) \cap \ldots \cap (T^{d-1}(P)^*_{j_d} - T^{d-1}(P)^*_{j_d-1})$$

con $1 \leqslant j_i \leqslant n$, es claro que A/M tiene t^d elementos si y sólo si M es de período d y de orden t.

I.6. SUBALGEBRAS DEL ALGEBRA $C_{n,k}$.

En este párrafo vamos a determinar las subálgebras de $C_{n,k}$, así como algunas de sus propiedades, que usaremos más adelante.

Sea d un divisor de k y sea A una subálgebra del álgebra $C_n \in L_n$. Escribamos $k = q.d$, y sea

$$S(A, d) = \left\{ f \in C_{n,k} : f(i) \in A \text{ y } f(i) = f(i') \text{ si } i \equiv i' (\text{mód } d) \right\} \quad (*).$$

Se prueba sin dificultad que S(A, d) es una subálgebra de $C_{n,k}$. Además S(A, d) es d-periódica. En efecto, por I.1.8 tenemos que

$$T^l f(i) = \begin{cases} f(i-l) & \text{si } i > l \\ f(i-l+k) & \text{si } i \leqslant l \end{cases} \quad , \text{ para } 1 \leqslant l \leqslant k,$$

entonces $$T^d f(i) = \begin{cases} f(i-d) & \text{si } i > d \\ f(i-d+k) & \text{si } i \leqslant d \end{cases} \quad ;$$

pero $i - d + k = i - d + q.d = i + (q-1).d \equiv i\ (\text{mód } d)$ e $i - d \equiv i\ (\text{mód } d)$, y por lo tanto $T^d f(i) = f(i)$, esto es, $T^d f = f$.

Por otro lado d es el menor entero positivo tal que $T^d f = f$ para todo $f \in S(A, d)$, ya que si consideramos la función f tal que $f(i) = 1$ si $i = t.d$, $1 \leqslant t \leqslant q$, y $f(i) = 0$ si $i \neq t.d$, entonces si $0 < d' < d$, $T^{d'} f(d') = f(k - d' + d') = f(k) = 1$, mientras que $f(d') = 0$.

Veamos que las únicas subálgebras de $C_{n,k}$ son las indicadas en (*).

Sea S una subálgebra de $C_{n,k}$. Para cada i, $1 \leqslant i \leqslant k$, se verifica sin dificultad que

$$A_i = \{ a \in C_n : \text{existe } f \in S \text{ tal que } a = f(i) \}$$

es una subálgebra de C_n.

Veamos que $A_i \doteq A_j$ para todo par i, j, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Supongamos $i < j$. Sea $a \in A_i$, entonces existe $f \in S$ tal que $a = f(i)$, luego $T^{j-i}f(j) = f(j-(j-i)) = f(i) = a$. Como S es una subálgebra, $T^{j-i}(f) \in S$, por lo tanto $a \in A_j$, esto es $A_i \subseteq A_j$.

Recíprocamente, si $a \in A_j$ existe $f \in S$ tal que $f(j) = a$, entonces $T^{k-(j-i)}f(i) = T^{k-j+i}f(i) = f(i-(k-j+i)+k) = f(j) = a$, ya que $k-j+i \geqslant i$. Luego $a \in A_i$, de donde $A_j \subseteq A_i$.

Sea $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_k$. Si $f \in S$, se tiene que $f(i) \in A$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Sea d el menor entero positivo tal que $T^d f = f$ para todo $f \in S$. Entonces $d|k$. Veamos que si $f \in S$, entonces $f(i) = f(i')$ para $i \equiv i'(\text{mód } d)$. En efecto, supongamos $i \equiv i'(\text{mod } d)$ e $i > i'$. Entonces $i = t.d + i'$, con $t \geqslant 1$, luego $f(i) = f(t.d + i') = T^{t.d}f(t.d + i') = f(t.d + i' - t.d) = f(i')$.

Tenemos entonces que si $f \in S$, $f(i) \in A$, $1 \leqslant i \leqslant k$, y $f(i) = f(i')$ para $i \equiv i'(\text{Mód } d)$. Por lo tanto $S \subseteq S(a, d)$. Para demostrar que vale la igualdad, necesitamos de algunos resultados previos que pasamos a desarrollar.

I.6.1. OBSERVACION. $B[C_{n,k}] = B_k$ es un álgebra de Boole k-periódica [34] cuyos átomos son los elementos g_i, $i = 1, 2, \dots, k$, de la forma $g_i[j] = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker. T permuta circularmente los átomos de B_k. A. Monteiro probó [34] que la familia de todas las subálgebras de B_k ordenada por inclusión es isomorfa al conjunto de los divisores de k ordenados por la relación de divisibilidad, donde para cada divisor d de k, la subálgebra B_d de B_k asociada a d es la única subálgebra de B_k d-periódica caracterizada por

$$B_d = \{ g \in B_k : T^d g = g \} .$$

Los átomos de B_d son los elementos g_i^*, $1 \leq i \leq d$, de la forma :

$$g_i^*[j] = \begin{cases} 1 & \text{si } j \equiv i[\text{mód } d] \\ 0 & \text{si } j \not\equiv i[\text{mód } d] \end{cases}$$

y se tiene $Tg_1^* = g_2^*$, $Tg_2^* = g_3^*$, ..., $Tg_d^* = g_1^*$.

I.6.2. OBSERVACION. Consideremos los elementos $e_1, e_2, \dots, e_{n-2}$ de $C_{n,k}$ definidos por: $e_j[r] = \frac{j}{n-1}$ para todo $r \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Entonces
$$s_i e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < n \\ 1 & \text{si } i + j \geq n \end{cases}$$

y usando el principio de determinación de Moisil se tiene que para todo $f \in C_{n,k}$, $f = (s_{n-1}f \wedge e_1) \vee (s_{n-2}f \wedge e_2) \vee \dots \vee s_1 f$.

I.6.3. LEMA. <u>Sea</u> S <u>una subálgebra de</u> $C_{n,k}$ <u>y sea d el menor entero positivo tal que</u> $T^d f = f$ <u>para todo</u> $f \in S$. <u>Entonces</u> $B(S) = B_d$.

<u>Demostración</u>. $B(S)$ es una subálgebra de $B(C_{n,k}) = B_k$, y como $T^d f = f$ para todo $f \in B(S)$, entonces $B(S) \subseteq B_d$.

Para ver que $B(S) = B_d$ basta probar que d es el menor entero positivo tal que $T^d g = g$ para todo $g \in B(S)$.

Supongamos que existe $d' < d$ tal que para todo $g \in B(S)$, es $T^{d'} g = g$. Sea $f \in S$, entonces $s_{n-i} f \in S$, $1 \leq i \leq n-1$, y como $s_{n-i} f$ son elementos complementados, $s_{n-i} f \in B(S)$. Luego $T^{d'} s_{n-i} f = s_{n-i} f$, $1 \leq i \leq n-1$. Además $Te_i = e_i$, y por lo tanto $T^{d'} e_i = e_i$. Luego de $f = (s_{n-1} f \wedge e_1) \vee (s_{n-2} f \wedge e_2) \vee \dots \vee s_1 f$, resulta $T^{d'} f = f$ para todo $f \in S$, lo que es una contradicción ya que d es el menor entero positivo tal que $T^d f = f$ para todo $f \in S$.

Probemos ahora que $S(A, d) \subseteq S$.

Sea $f \in S(A, d)$. Para cada i, $1 \leq i \leq k$, $f(i) \in A$, luego existe $h_i \in S$ tal que $h_i(i) = f(i)$. Como $S \subseteq S(A, d)$, se tiene $h_i \in S(A,d)$, y por lo tanto $h_i(j) = f(i)$ si $j \equiv i (\text{mód } d)$. Por otro lado, por el lema I.6.3 resulta que los elementos $g_1^*, g_2^*, \dots, g_d^* \in S$ por ser los átomos del álgebra de Boole $B_d = B(S)$.

Entonces $h_i \wedge g_i^* \in S$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant d$, y

$$(h_i \wedge g_i^*)(j) = \begin{cases} f(i) & \text{si } j \equiv i (\text{mód } d) \\ 0 & \text{si } j \not\equiv i (\text{mód } d) \end{cases}$$

luego $f = (h_1 \wedge g_1^*) \vee (h_2 \wedge g_2^*) \vee \ldots \vee (h_d \wedge g_d^*)$ y por lo tanto $f \in S$. Luego $S(A, d) \subseteq S$.

Tenemos entonces que $S = S(A, d)$ y en consecuencia hemos probado que :

I.6.4. TEOREMA. Las subálgebras del álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica $C_{n,k}$ son las álgebras $S(A, d)$ definidas en (*), donde A es una subálgebra de C_n y d es un divisor positivo de k.

Observemos que cada elemento f de $S(A, d)$ queda determinado por los d valores $f(i) \in A$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Entonces $N[S(A,d)] = (N[A])^d$, donde $N[X]$ indica el número de elementos de un conjunto finito X. Además, el número de subálgebras de $C_{n,k}$ es igual al producto del número de subálgebras de C_n por el número de divisores de k.

Dada una subálgebra $S(A, d)$ de $C_{n,k}$, nos interesa ahora calcular las subálgebras maximales de $S(A, d)$. Para ello probemos previamente el siguiente lema :

I.6.5. LEMA. $S(A_1, d_1) \subseteq S(A_2, d_2)$ si y sólo si $A_1 \subseteq A_2$ y $d_1 | d_2$.

Demostración. En efecto, supongamos que $A_1 \subseteq A_2$ y $d_1 | d_2$. Sea

$f \in S[A_1, d_1]$, entonces $f[i] \in A_1$ para todo i, $1 \leq i \leq k$, y por lo tanto $f[i] \in A_2$. Además, si $i \equiv i'[\text{mód } d_2]$ entonces $i \equiv i'[\text{mód } d_1]$, por lo tanto $f[i] = f[i']$, luego $f \in S[A_2, d_2]$, esto es, $S[A_1, d_1] \subseteq S[A_2, d_2]$.

Recíprocamente, supongamos que $S[A_1, d_1] \subseteq S[A_2, d_2]$. Sea $a \in A_1$ y sea f la función definida por $f[i] = a$ para todo i, $1 \leq i \leq k$. Entonces $f \in S[A_1, d_1]$ y por lo tanto $f \in S[A_2, d_2]$, de donde resulta $f[i] = a \in A_2$, esto es $A_1 \subseteq A_2$.

Probemos por último que $d_1 | d_2$. Supongamos $d_2 \neq k$ pues caso contrario no habría nada que probar. Si fuese $d_2 = t.d_1 + r$, con $0 < r < d_1$, consideremos la siguiente función $f \in C_{n,k}$:

$$f[i] = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv r[\text{mód } d_1] \\ 0 & \text{si } i \not\equiv r[\text{mód } d_1]. \end{cases}$$

Es claro que $f \in S[A_1, d_1]$. Además $f[d_2] = 1$ ya que $d_2 \equiv r[\text{mód } d_1]$. Observemos que como $d_2 | k$ y $d_2 \neq k$ entonces $2d_2 \leq k$. Calculemos entonces $f[2d_2]$. Si fuese $2d_2 \equiv r[\text{mód } d_1]$, como $2d_2 \equiv 2r[\text{mód } d_1]$, sería $2r \equiv r[\text{mód } d_1]$, lo cual es imposible. Luego $2d_2 \not\equiv r[\text{mód } d_1]$, y por lo tanto $f[2d_2] = 0$. Por lo tanto $f[d_2] \neq f[2d_2]$, y como $d_2 \equiv 2d_2[\text{mód } d_2]$, entonces $f \notin S[A_2, d_2]$, lo que es una contradicción.

Es claro que la subálgebra $S[A_1, d_1]$ está contenida propiamente en la subálgebra $S[A_2, d_2]$ si y sólo si A_1 está contenida propiamente en A_2 o d_1 es un divisor propio de d_2. Si notamos $M[d]$ al conjunto de todos los divisores positivos maximales (con respecto a la relación divide) de d, entonces se tiene :

I.6.6. TEOREMA. Las subálgebras maximales de $S[A, d]$ son las subálgebras del tipo $S[A', d]$, donde A' es una subálgebra maximal de A, o del tipo $S[A, d']$, donde $d' \in M[d]$.

Demostración. Es claro que las subálgebras de esa forma son subálgebras maximales de $S[A, d]$. Recíprocamente, si $S[A_1, d_1]$ es una subálgebra maximal de $S[A, d]$, por el lema anterior debe ser $A_1 \subseteq A$ y $d_1 | d$, y las únicas posibilidades son $A_1 = A$ con d_1 divisor maximal de d, o A_1 subálgebra maximal de A con $d_1 = d$, pues en cualquier otro caso se puede construir una subálgebra propia de $S[A, d]$ que contiene propiamente a $S[A_1, d_1]$.

I.6.7. COROLARIO. El número de subálgebras maximales de $S[A, d]$ es igual al número de subálgebras maximales de A, más el número de divisores maximales de d.

I.6.8. TEOREMA. $\bigcap_{i=1}^{n} S[A_i, d_i] = S[\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \bigwedge_{i=1}^{n} d_i]$, donde $\bigwedge_{i=1}^{n} d_i$ indica el máximo común divisor de $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Demostración. Si $f \in S[\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \bigwedge_{i=1}^{n} d_i]$, entonces $f[j] \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ para todo j, $1 \leqslant j \leqslant k$, y $f[j] = f[j']$ si $j \equiv j'[\text{mód } d]$, donde $d = \bigwedge_{i=1}^{n} d_i$. Luego $f[j] \in A_i$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, y si $j \equiv j'[\text{mód } d_i]$ entonces $j \equiv j'[\text{mód } d]$, luego $f[j] = f[j']$, y por lo tanto $f \in \bigcap_{i=1}^{n} S[A_i, d_i]$.

Recíprocamente, sea $f \in \bigcap_{i=1}^{n} S[A_i, d_i]$. Entonces $f \in S[A_i, d_i]$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, luego $f[j] \in A_i$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Luego $f[j] \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ para todo j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Sea $d = \bigwedge_{i=1}^{n} d_i$ y veamos que $T^d f = f$. Sea t el menor entero positivo tal que $T^t f = f$ para todo $f \in \bigcap_{i=1}^{n} S[A_i, d_i]$. Entonces $t | d_i$ para todo i, y por lo tanto $t | d$. En particular, $T^d f = f$. Como ya vimos anteriormente, esto implica que si $j \equiv j'[\text{mód } d]$, entonces $f[j] = f[j']$ y por lo tanto $f \in S[\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \bigwedge_{i=1}^{n} d_i]$.

Para terminar esta sección, vamos a calcular el número de automorfismos del álgebra $C_{n,k}$. Más generalmente, vamos a determinar los automorfismos de cualquier subálgebra $S(A, d)$ de $C_{n,k}$. Convendremos en seguir notando T a la restricción del operador T a $S(A, d)$ y también a su restricción a $B(S(A, d)) = B_d$. Haremos la misma convención para las potencias de T.

Sabemos que B_d es un álgebra de Boole d-periódica (Observación I.6.1). A. Monteiro (34) probó que existen exactamente d automorfismos de B_d, que son las potencias de T : $T, T^2, \ldots, T^{d-1}, T^d = I$. Es claro que $S(A, d)$ tiene por lo menos esos d automorfismos. Veamos que son los únicos.

Sea α un automorfismo de $S(A, d)$. Entonces $\alpha|_{B_d}$ es un automorfismo de B_d y por lo tanto $\alpha|_{B_d} = T^i$ para algún i, $1 \leq i \leq d$.

Veamos que $\alpha = T^i$ sobre $S(A, d)$, esto es, que $\alpha f = T^i f$, para todo $f \in S(A, d)$. Para ello basta probar que $s_j \alpha f = s_j T^i f$, para todo j, $1 \leq j \leq n-1$. Pero $s_j \alpha f = \alpha(s_j f)$, y como $s_j f \in B(S(A, d)) = B_d$, entonces $\alpha(s_j f) = T^i(s_j f) = s_j T^i f$.

Luego $S(A, d)$ tiene exactamente d automorfismos.

Como $C_{n,k} = S(C_n, k)$, entonces el álgebra $C_{n,k}$ tiene k automorfismos. Estos son las potencias de T : T^i, $1 \leq i \leq k$.

Si $A \in L_{n,k}$ e indicamos $\mathrm{Aut}(A)$ al conjunto de todos los automorfismos de A, entonces $N[\mathrm{Aut}(C_{n,k})] = k$ y $N[\mathrm{Aut}(S(A, d))] = d$.

I.7. ALGEBRAS FINITAS

Se trata de probar que si $A \in L_{n,k}$ y A es finita, entonces A es isomorfa a un producto directo de álgebras simples.

Si $A \in L_{n,k}$ vale el siguiente resultado que se prueba sin dificultad:

I.7.1. LEMA. Para que un filtro principal $F(a) = \{ x \in A : a \leq x \}$ sea un núcleo es necesario y suficiente que $a \in K_1(A) \cap I(A)$.

Si el álgebra A es finita y N es un núcleo de A, N es en particular un filtro, luego $N = F(a)$, $a \in A$. Por lo anterior, $a \in K_1(A) \cap I(A)$. Es decir, los núcleos de A son principales y coinciden con los filtros $F(a)$, donde $a \in K_1(A) \cap I(A)$. Resulta entonces :

I.7.2. LEMA. Sea $A \in L_{n,k}$, A finita ; entonces $F(a)$, donde $a \in A$, es un núcleo maximal de A si y sólo si a es un átomo del álgebra de Boole $K_1(A) \cap I(A)$.

Vamos a probar ahora el resultado enunciado al comienzo de este párrafo. Sea A un álgebra finita y sean $b_1, b_2, \ldots, b_p$ los átomos de $K_1(A) \cap I(A)$. Entonces $\{ F(b_i) \}_{1 \leq i \leq p}$ es la familia de todos los núcleos maximales de A. Sabemos que A es isomorfa a una subálgebra del producto directo $\prod_{i=1}^{p} A/F(b_i)$. Este isomorfismo está dado por la aplicación h definida por $h(a) = (h_1(a), \ldots, h_p(a))$, donde $h_i : A \longrightarrow A/F(b_i)$ son los homomorfismos canónicos, $1 \leq i \leq p$.

Es suficiente probar entonces que h es sobre.

Sea $(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \prod_{i=1}^{p} A/F(b_i)$. Entonces para cada

$a_i \in A/F(b_i)$ existe $x_i \in A$ tal que $h_i(x_i) = a_i$.

Sea $a = \bigvee_{i=1}^{p} (x_i \wedge b_i)$. Como $b_i \in K_1(A) \cap I(A)$, es fácil ver que

$h_j(b_i) \in K_1(A/F(b_j)) \cap I(A/F(b_j)) = \{0, 1\}$ por ser $A/F(b_j)$ un

álgebra simple.

No puede ser $h_j(b_i) = 1$ si $i \neq j$, ya que si así fuese, tendríamos

que $b_i \in h_j^{-1}(\{1\}) = F(b_j)$, y entonces $b_j \leq b_i$. Luego $h_j(b_i) = 0$

para $j \neq i$, y $h_j(b_j) = 1$. Luego

$$h_j(a) = \bigvee_{i=1}^{p} (h_j(x_i) \wedge h_j(b_i)) = h_j(x_j) \wedge h_j(b_j) = h_j(x_j) \wedge 1 =$$

$= h_j(x_j) = a_j$. Por lo tanto $h(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

Tenemos entonces :

I.7.3. TEOREMA. <u>Sea</u> $A \in L_{n,k}$, A <u>finita no trivial. Entonces</u>

$A = \prod_{i=1}^{p} A/F(b_i)$, <u>donde</u> $\{F(b_i)\}_{1 \leq i \leq p}$ <u>son todos los núcleos</u>

<u>maximales de</u> A.

I.8. ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ n-VALENTES k-CICLICAS LIBRES

Nos proponemos en este párrafo determinar la estructura del álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica con un número finito de generadores libres.

I.8.1. DEFINICION. Se dice que una subálgebra A_1 de un álgebra A está generada por una parte $G \subseteq A$, si A_1 es la intersección de todas las subálgebras de A que contienen a G.

I.8.2. DEFINICION. Dado un número cardinal $\alpha > 0$, diremos que $\mathbf{L}[n,k,\alpha]$ es un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica libre con α generadores libres si

1) $\mathbf{L}[n,k,\alpha]$ contiene un subconjunto G de generadores de potencia α.

2) Si $A \in L_{n,k}$, toda aplicación $f: G \longrightarrow A$ puede prolongarse a un homomorfismo necesariamente único $h_f : \mathbf{L}[n,k,\alpha] \longrightarrow A$.

Observemos que como $L_{n,k}$ es una variedad, por un conocido teorema de G. Birkhoff [9, Cap. VI] se puede asegurar la existencia y unicidad, a menos de isomorfismo, de $\mathbf{L}[n,k,\alpha]$.

I.8.3. LEMA. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $F[G,C_{n,k}]$ de todas las funciones de G en $C_{n,k}$ y el conjunto $Hom[\mathbf{L}[n,k,\alpha],C_{n,k}]$ de todos los homomorfismos de $\mathbf{L}[n,k,\alpha]$ en $C_{n,k}$.

Demostración. Basta asociar a cada $f : G \longrightarrow C_{n,k}$ el homomorfismo extensión $h_f : \mathbf{L}[n,k,\alpha] \longrightarrow C_{n,k}$.

En lo que sigue supondremos que $N[G] = r > 0$ es un cardinal finito.

I.8.4. LEMA. <u>Si</u> $\mathbb{M}$ <u>es el conjunto de todos los núcleos maximales</u> <u>de</u> $\mathbb{L}(n,k,r)$, <u>entonces</u> $N[\mathbb{M}] \leq N[F(G,C_{n,k})]$.

<u>Demostración</u>. Consideremos la aplicación s que asocia a cada $f \in F(G,C_{n,k})$ el núcleo $N(h_f) = M_f$ del homomorfismo extensión h_f. Claramente $s : F(G,C_{n,k}) \longrightarrow \mathbb{M}$, ya que $\mathbb{L}(n,k,r)/M_f$ es isomorfa a la subálgebra de $C_{n,k}$ generada por $f(G)$, que es un álgebra simple, y por lo tanto M_f es un núcleo maximal.

s es suryectiva ; en efecto, si $M \in \mathbb{M}$, $h : \mathbb{L}(n,k,r) \longrightarrow \mathbb{L}(n,k,r)/M$ es el homomorfismo canónico y $f = h|_G$, entonces $s(f) = M$.
Por lo tanto, como $F(G,C_{n,k})$ es un conjunto finito, se tiene que $\mathbb{M}$ es finito y $N[\mathbb{M}] \leq N[F(G,C_{n,k})]$.

I.8.5. TEOREMA. $\mathbb{L} = \mathbb{L}(n,k,r)$ <u>es finita</u>.

<u>Demostración</u>. Como toda álgebra de $L_{n,k}$ es producto subdirecto de una familia de subálgebras de $C_{n,k}$, tantas como núcleos maximales tiene el álgebra, resulta del lema anterior que $\mathbb{L}$ es isomorfa a un producto subdirecto de una familia finita de subálgebras de $C_{n,k}$, y como cada subálgebra de $C_{n,k}$ es finita, resulta que $\mathbb{L}$ es finita.

El siguiente teorema es inmediato :

I.8.6. TEOREMA. <u>Sea</u> f <u>una función de</u> G <u>en</u> $C_{n,k}$ <u>y</u> $S(A,d)$ <u>una subál-</u>

gebra de $C_{n,k}$. Entonces la subálgebra generada por $f(G)$ es $S(A,d)$ si y sólo si $f(G) \subseteq S(A,d)$ y $f(G)$ no está contenido en ninguna subálgebra maximal de $S(A,d)$.

Recordemos en este momento algunas propiedades de las subálgebras de C_n [11]. En primer lugar, dos subálgebras de C_n distintas como subconjuntos de C_n no pueden ser isomorfas (aunque tengan el mismo número de elementos).

Si n es par, todas las subálgebras de C_n tienen un número par de elementos, y si $1 \leqslant t \leqslant \frac{n}{2}$, el número de subálgebras de C_n con $2t$ elementos es $\binom{\frac{n-2}{2}}{t-1}$. En este caso, el número de subálgebras de C_n es $2^{\frac{n-2}{2}}$.

Si n es impar y si $1 \leqslant t \leqslant \frac{n-1}{2}$, el número de subálgebras de C_n con $2t$ elementos es igual al número de subálgebras de C_n con $2t+1$ elementos e igual a $\binom{\frac{n-3}{2}}{t-1}$, y el número total de subálgebras es $2^{\frac{n-1}{2}}$.

De I.8.5 y I.7.3 se tiene que $\mathbb{L} = \prod_{M \in \mathbb{M}} \mathbb{L}/M$. (**)

Vamos a estudiar por separado los casos n par y n impar.

Primer caso : n par.

Si A_{ti} , $i = 1, 2, \ldots, s_t = \binom{\frac{n-2}{2}}{t-1}$, es una subálgebra de C_n con $2t$ elementos y d es un divisor de k, vamos a notar

$$\mathbf{M}(ti,d) = \left\{ M \in \mathbf{M} : \mathbf{L}/M = S(A_{ti},d) \right\} \text{ y } \alpha(ti,d) = N\left[\mathbf{M}(ti,d)\right] .$$

De (**) y I.5.9 podemos escribir

$$\mathbf{L} = \prod_{\substack{1 \leqslant t \leqslant \frac{n}{2} \\ 1 \leqslant i \leqslant s_t \\ d | k}} \left[S(A_{ti},d)\right]^{\alpha(ti,d)}$$

y se trata de determinar los números $\alpha(ti,d)$.

Claramente, la aplicación $s : \mathrm{Epi}(\mathbf{L},S(A_{ti},d)) \longrightarrow \mathbf{M}(ti,d)$ definida por $s(h) = N(h)$, es suryectiva, y si $s(h) = M$, entonces $s^{-1}(M) = \left\{ \alpha \circ h : \alpha \in \mathrm{Aut}(S(A_{ti},d)) \right\}$. Esto último es consecuencia de I.2.5. Como $N\left[\mathrm{Aut}(S(A_{ti},d))\right] = d$, se tendrá

$$\alpha(ti,d) = \frac{N\left[\mathrm{Epi}(\mathbf{L},S(A_{ti},d))\right]}{d}$$

Ahora bien, por I.8.6, existe una correspondencia biyectiva entre $\mathrm{Epi}(\mathbf{L},S(A_{ti},d))$ y el conjunto $F_{ti,d}$ de todas las funciones f de G en $S(A_{ti},d)$ tales que $f(G)$ no está contenido en ninguna subálgebra maximal de $S(A_{ti},d)$.

Calculemos entonces $N[F_{ti,d}]$.

Supongamos i fijo y eliminemos el subíndice i, escribiendo $S[A_t,d]$ en lugar de $S[A_{ti},d]$ y $N[F_{t,d}]$ en lugar de $N[F_{ti,d}]$. Como el número de subálgebras maximales de A_t es t-1 [11], de acuerdo al corolario I.6.6, el número de subálgebras maximales de $S[A_t,d]$ es $t - 1 + N[M(d)]$. Estas subálgebras son de la forma $S[A'_{tj},d]$, $j = 1, 2, \ldots, t-1$, donde A'_{tj} es una subálgebra maximal de A_t, o bien (teorema I.6.6) $S[A_t,d']$, con $d' \in M(d)$.

Notemos $G[t,d]$ el conjunto de todas las funciones de G en $S[A_t,d]$

y
$$G[tj,d] = \{ f \in G[t,d] : f(G) \subseteq S[A'_{tj},d] \}$$
$$G[t,d'] = \{ f \in G[t,d] : f(G) \subseteq S[A_t,d'] \}.$$

Entonces es claro que
$$F_{t,d} = G[t,d] - \left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G[tj,d] \cup \bigcup_{d' \in M(d)} G[t,d'] \right]$$

y
$$N[F_{t,d}] = N[G[t,d]] - N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G[tj,d] \cup \bigcup_{d' \in M(d)} G[t,d'] \right] =$$
$$= N[G[t,d]] - N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G[tj,d] \right] - N\left[\bigcup_{d' \in M(d)} G[t,d'] \right] +$$
$$+ N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G[tj,d] \cap \bigcup_{d' \in M(d)} G[t,d'] \right].$$

Sea $\mathcal{T} = \{ 1, 2, \ldots, t-1\}$. Es sabido que

$$N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G[tj,d]\right] = \sum_{\substack{X\subseteq \mathcal{T}\\ X\neq\emptyset}} [-1]^{N[X]-1}\, N\left[\bigcap_{j\in X} G[tj,d]\right].$$

Además sabemos que la intersección de h subálgebras A'_{tj},

$1 \leqslant h \leqslant t-1$, es una subálgebra de A_t con $2t - 2h$ elementos [11].

Ahora bien, $\bigcap_{j\in X} G[tj,d] = \left\{ f \in G[t,d] : f[G] \subseteq \bigcap_{j\in X} S[A'_{tj},d] \right\}$,

y por I.6.8, $\bigcap_{j\in X} S[A'_{tj},d] = S[\bigcap_{j\in X} A'_{tj},d]$, que tiene $[2t - 2N[X]]^{d}$

elementos, entonces $N\left[\bigcap_{j\in X} G[tj,d]\right] = [2t - 2N[X]]^{d.r}$, de donde

$$A = N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G[tj,d]\right] = \sum_{\substack{X\subseteq \mathcal{T}\\ X\neq\emptyset}} [-1]^{N[X]-1}\, [2t - 2N[X]]^{d.r}.$$

Observemos que la igualdad anterior puede ser expresada

$$A = N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G[tj,d]\right] = \sum_{i=1}^{t-1} [-1]^{i-1} \binom{t-1}{i} [2t - 2i]^{d.r}.$$

Por otro lado,

$$N\left[\bigcup_{d'\in M[d]} G[t,d']\right] = \sum_{\substack{Y\subseteq M[d]\\ Y\neq\emptyset}} [-1]^{N[Y]-1}\, N\left[\bigcap_{d'\in Y} G[t,d']\right].$$

Pero $\bigcap_{d'\in Y} G[t,d'] = \left\{ f \in G[t,d] : f[G] \subseteq \bigcap_{d'\in Y} S[A_t,d'] \right\} =$

$$= \left\{ f \in G(t,d) \ : \ f(G) \subseteq S(A_t, \bigwedge_{d'\in M(d)} d') \right\}$$

y como $S(A_t, \bigwedge_{d'\in Y} d')$ tiene $(2t)^{\bigwedge_{d'\in Y} d'}$ elementos, resulta :

$$N\left[\bigcap_{d'\in Y} G(t,d')\right] = (2t)^{r.\bigwedge_{d'\in Y} d'} \quad \text{, de donde}$$

$$B = N\left[\bigcup_{d'\in M(d)} G(t,d')\right] = \sum_{\substack{Y\subseteq M(d)\\ Y\neq\emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} (2t)^{r.\bigwedge_{d'\in Y} d'} .$$

Calculemos $N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,d) \cap \bigcup_{d'\in M(d)} G(t,d')\right]$.

Observemos que

$$\bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,d) \cap \bigcup_{d'\in M(d)} G(t,d') = \bigcup_{\substack{1\leqslant j\leqslant t-1\\ d'\in M(d)}} G(tj,d)\cap G(t,d')$$

y $G(tj,d) \cap G(t,d') = \left\{ f \in G(t,d) \ : \ f(G) \subseteq S(A'_{tj},d) \cap S(A_t,d')\right\} =$

$$= \left\{ f \in G(t,d) \ : \ f(G) \subseteq S(A'_{tj},d')\right\} .$$

Entonces $N\left[\bigcup_{\substack{1\leqslant j\leqslant t-1\\ d'\in M(d)}} G(tj,d) \cap G(t,d')\right] =$

$$= \sum_{\substack{Z\subseteq \mathcal{T}\times M(d)\\ Z\neq\emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} N\left[\bigcap_{(j,d')\in Z} G(tj,d) \cap G(t,d')\right] .$$

Para $Z \subseteq \mathcal{T} \times M(d)$ notemos $Z_1 = \left\{ j \in \mathcal{T} : (j,d') \in Z \text{ para algún } d' \in M(d) \right\}$

y $Z_2 = \left\{ d' \in M(d) : (j,d') \in Z \text{ para algún } j \in \mathcal{T} \right\}$. Entonces

$$\bigcap_{(j,d') \in Z} G(tj,d) \cap G(t,d') = \left\{ f \in G(t,d) : f(G) \subseteq \bigcap_{(j,d') \in Z} S(A'_{tj}, d') \right\} =$$

$$= \left\{ f \in G(t,d) : f(G) \subseteq S\left(\bigcap_{j \in Z_1} A'_{tj}, \bigwedge_{d' \in Z_2} d'\right) \right\}$$

y como $S\left(\bigcap_{j \in Z_1} A'_{tj}, \bigwedge_{d' \in Z_2} d'\right)$ tiene $(2t - 2N[Z_1])^{\bigwedge_{d' \in Z_2} d'}$ elementos

entonces $\bigcap_{(j,d') \in Z} G(tj,d) \cap G(t,d')$ tiene $(2t - 2N[Z_1])^{r.\bigwedge_{d' \in Z_2} d'}$

elementos. Luego

$$C = N\left[\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq t-1 \\ d' \in M(d)}} G(tj,d) \cap G(t,d') \right] =$$

$$= \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T} \times M(d) \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} (2t - 2N[Z_1])^{r.\bigwedge_{d' \in Z_2} d'} .$$

Luego $N[F_{t,d}] = (2t)^{r.d} - A - B + C$, esto es,

$$N[F_{t,d}] = (2t)^{r.d} - \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{T} \\ X \neq \emptyset}} (-1)^{N[X]-1} (2t - 2N[X])^{r.d} -$$

$$- \sum_{\substack{Y \subseteq M(d) \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} (2t)^{r.\bigwedge_{d' \in Y} d'} +$$

$$+ \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{G} \times M(d) \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} (2t - 2N[Z_1])^{r.\bigwedge_{d' \in Z_2} d'} = a(r,t,d).$$

Por lo tanto $\alpha(ti,d) = \dfrac{a(r,t,d)}{d}$ (fórmula que es independiente de i). Hemos probado así que :

I.8.7. TEOREMA. <u>Si</u> n <u>es par y</u> $S(A_{ti},d)$, $i = 1, 2, \ldots, \binom{\frac{n-2}{2}}{t-1}$, $d|k$, <u>son las subálgebras de</u> $C_{n,k}$ <u>con</u> $(2t)^d$ <u>elementos</u>, $t = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, <u>entonces</u>

$$\mathbf{L}(n,k,r) = \prod_{\substack{t=1 \\ d|k}}^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{\binom{\frac{n-2}{2}}{t-1}} S(A_{ti},d)^{\frac{a(r,t,d)}{d}}$$

Como $S(A_{ti},d)$ tiene $(2t)^d$ elementos, resulta :

I.8.8. TEOREMA. <u>Si</u> n <u>es par</u>

$$N[\mathbf{L}(n,k,r)] = \prod_{\substack{t=1 \\ d|k}}^{\frac{n}{2}} (2t)^{a(r,t,d) \binom{\frac{n-2}{2}}{t-1}} .$$

Segundo caso : n impar.

Sea $S(A_s,d)$ una subálgebra de $C_{n,k}$, donde A_s es una subálgebra de C_n con s elementos, $2 \leq s \leq n$, $d|k$. $F(s,d)$ indicará el conjunto de todas las funciones de G en $C_{n,k}$ tales que la subálgebra generada por $F(G)$ es $S(A_s,d)$.

Se trata de calcular $N[F(s,d)]$.

Para ello vamos a considerar separadamente los casos s par y s impar.

Caso a) : s par.

Supongamos entonces $s = 2t$, $1 \leq t \leq \frac{n-1}{2}$.

Razonando como antes se tendrá $N[F(2t,d)] = \frac{a(r,t,d)}{d}$.

Caso b) : s impar.

Supongamos $s = 2t + 1$, $1 \leq t \leq \frac{n-1}{2}$.

Como en C_n hay $\binom{\frac{n-3}{2}}{t-1}$ subálgebras con s elementos, que indicaremos A_{si}, $i = 1, 2, \ldots, h_s = \binom{\frac{n-3}{2}}{t-1}$, sean $S(A_{si},d)$, $1 \leq i \leq h_s$, $d|k$, las subálgebras de $C_{n,k}$ con s^d elementos.

Si $\mathbb{M}(si,d) = \{ M \in \mathbb{M} : L/M = S(A_{si},d) \}$, se trata de determinar

$\alpha(si,d) = N[\mathbb{M}(si,d)]$.

Como antes, $\alpha(si,d) = \dfrac{N[Epi(L,S(A_{si},d))]}{d} = \dfrac{N[F(si,d)]}{d}$, donde $F(si,d)$ es el conjunto de todas las funciones f de G en $S(A_{si},d)$ tales que la subálgebra generada por $f(G)$ es $S(A_{si},d)$.

Consideremos i fijo y escribamos $S(A_{si},d) = S(A_{2t+1,i},d) = S(A_t,d)$, y $F(s,d)$ en lugar de $F(si,d)$.

Sabemos que A_t contiene t subálgebras maximales, una con 2t elementos que se obtiene de A_t eliminando el único x tal que $x = \sim x$ y que notaremos A'_{to} , y el resto con 2t - 1 elementos y serán indicadas A'_{tj} $j = 1, 2, \ldots, t-1$.

Además, si $1 \leqslant j_1 < j_2 \quad \ldots < j_i \leqslant t-1$, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, entonces

$$N[A'_{tj_1} \cap A'_{tj_2} \cap \ldots \cap A'_{tj_i}] = 2t + 1 - 2i \qquad (\#)$$

$$\text{y} \quad N[A'_{to} \cap A'_{tj_1} \cap \ldots \cap A'_{tj_i}] = 2t - 2i. \qquad (\#\#)$$

El número de subálgebras maximales de $S(A_t,d)$ es entonces $t + N[M(d)]$. Estas subálgebras son de la forma $S(A'_{tj},d), 0 \leqslant j \leqslant t-1$, donde A'_{tj} es una subálgebra maximal de A_t, o bien (teorema I.6.6) de la forma $S(A_t,d')$, $d' \in M(d)$.

Sea $G(t,d)$ el conjunto de todas las funciones de G en $S(A_t,d)$, y

$$G(tj,d) = \{ f \in G(t,d) : f(G) \subseteq S(A'_{tj},d) \} \ , \ j = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$G(t,d') = \{ f \in G(t,d) : f(G) \subseteq S(A_t,d') \} \ , \ d' \in M(d).$$

Entonces $F(s,d) = G(t,d) - \left[\bigcup_{j=0}^{t-1} G(tj,d) \cup \bigcup_{d'\in M(d)} G(t,d')\right]$,

y por lo tanto

$$N[F(s,d)] = N[G(t,d)] - N\left[G(to,d) \cup \bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,d) \cup \bigcup_{d'\in M(d)} G(t,d')\right] =$$

$$= N[G(t,d)] - N[G(to,d)] - N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,d) \cup \bigcup_{d'\in M(d)} G(t,d')\right] +$$

$$+ N\left[G(to,d) \cap \bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,d) \cup G(to,d) \cap \bigcup_{d'\in M(d)} G(t,d')\right].$$

Ahora bien, $N[G(t,d)] = (2t+1)^{d.r}$ y $N[G(to,d)] = (2t)^{d.r}$.

Con un desarrollo similar al realizado para el caso n par (ver página 54 y siguientes) y teniendo en cuenta (#), se tendrá que :

$$N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,d) \cup \bigcup_{d'\in M(d)} G(t,d')\right] = \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{T} \\ X \neq}} (-1)^{N[X]-1}(2t+1-2N[X])^{d.r} +$$

$$+ \sum_{\substack{Y\subseteq M(d) \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1}(2t+1)^{r.\bigwedge_{d'\in M(d)} d'} -$$

$$- \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T} \times M(d) \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} (2t+1-2N[Z_1])^{r.\bigwedge_{d'\in Z_2} d'} .$$

Además, $N\left[G(to,d) \cap \bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,d) \cup G(to,d) \cap \bigcup_{d'\in M(d)} G(t,d')\right] =$

$$= N\left[\bigsqcup_{j=1}^{t-1} G(to,d) \cap G(tj,d)\right] + N\left[\bigsqcup_{d'\in M(d)} G(to,d) \cap G(t,d')\right] -$$

$$- N\left[\bigsqcup_{(j,d')\in \mathcal{T}\times M(d)} G(to,d) \cap G(tj,d) \cap G(t,d')\right] .$$

$$N\left[\bigsqcup_{j=1}^{t-1} G(to,d) \cap G(tj,d)\right] = \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{T} \\ X \neq \emptyset}} (-1)^{N[X]-1}(2t - 2N[X])^{d.r}, \text{ usando } (\#\#).$$

$$N\left[\bigsqcup_{d'\in M(d)} G(to,d) \cap G(t,d')\right] =$$

$$= \sum_{\substack{Y \subseteq M(d) \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} N\left[\bigsqcap_{d'\in Y} G(to,d) \cap G(t,d')\right] =$$

$$= \sum_{\substack{Y \subseteq M(d) \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} (2t)^{r.\bigwedge_{d'\in Y} d'}$$

Por último, $G(to,d) \cap G(tj,d) \cap G(t,d') =$

$= \{ f \in G(t,d) \ : \ f(G) \subseteq S(A_{to},d) \cap S(A_{tj},d) \cap S(A_t,d') \} =$

$= \{ f \in G(t,d) \ : \ f(G) \subseteq S(A_{to} \cap A_{tj},d') \}$, y usando (##) :

$$N\left[\bigsqcup_{(j,d')\in \mathcal{T}\times M(d)} G(to,d) \cap G(tj,d) \cap G(t,d')\right] =$$

$$= \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T}\times M(d) \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} N\left[\bigsqcap_{(j,d')\in Z} G(to,d) \cap G(tj,d) \cap G(t,d')\right] =$$

$$= \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T} \times M(d) \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} (2t - 2N[Z_1])^{r.\bigwedge_{d' \in Z_2} d'} .$$

Sea $b(r,t,d) = N[F(s,d)]$, con $s = 2t + 1$. Entonces

$\alpha(si,d) = \frac{b(r,t,d)}{d}$, y se tiene:

I.8.9. TEOREMA. <u>Si n es impar y</u> $S(A_{2t,j},d)$ <u>y</u> $S(A_{2t+1,j},d)$,

$j = 1, 2, \ldots, \binom{\frac{n-3}{2}}{t-1}$, $d|k$, <u>son las subálgebras de</u> $C_{n,k}$ <u>con</u> $(2t)^d$ <u>y</u> $(2t + 1)^d$ <u>elementos respectivamente, entonces</u>

$$\mathbf{L}(n,k,r) = \prod_{\substack{t=1 \\ d|k}}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{\binom{\frac{n-3}{2}}{t-1}} \left[S(A_{2t,j},d)^{\frac{a(r,t,d)}{d}} \times S(A_{2t+1,j},d)^{\frac{b(r,t,d)}{d}} \right].$$

I.8.10. COROLARIO. <u>Si n es impar</u>

$$N[\mathbf{L}(n,k,r)] = \prod_{\substack{t=1 \\ d|k}}^{\frac{n-1}{2}} (2t)^{\binom{\frac{n-3}{2}}{t-1} a(r,t,d)} \times (2t + 1)^{\binom{\frac{n-3}{2}}{t-1} b(r,t,d)} .$$

Si $n = 2$, la única subálgebra de $C_2 = \{0, 1\}$ es $A_2 = \{0, 1\}$.

Entonces $a[r,1,d] = 2^{r.d} - \sum_{\substack{Y \subseteq M[d] \\ Y \neq \emptyset}} [-1]^{N[Y]-1} \; 2^{r.\bigwedge_{d' \in M[d]} d'}$

y $\mathbb{L}[2,k,r] = \prod_{d|k} A_2^{a[r,1,d]}$ es el álgebra de Boole cíclica con r generadores libres determinada por A. Monteiro en [34].

Si $n = 3$ y $k = 1$, entonces $C_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$; la única subálgebra de C_3 con 2t elementos [t = 1] es $A_{2t} = A_2 = \{0, 1\}$, y la única subálgebra de C_3 con 2t + 1 elementos [t = 1] es $A_{2t+1} = A_3 =$ $= \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Se tiene:

$$a[r,1,1] = 2^r \quad y \quad b[r,1,1] = 3^r - 2^r.$$

Luego $\mathbb{L}[3,1,r] = A_2^{2^r} \times A_3^{3^r - 2^r}$, que es el álgebra de Lukasiewicz trivalente con un conjunto de r generadores libres [35].

CAPITULO II

ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ n-VALENTES MONADICAS

II.1. ALGEBRAS DE LUKASIEWICZ n-VALENTES FUNCIONALES MONADICAS.

En este párrafo vamos a hacer un estudio de la cuantificación en las álgebras de Lukasiewicz n-valentes.

Si X es un conjunto no vacío y $A \in L_n$, el conjunto A^X de todas las funciones de X en A, con las operaciones definidas puntualmente, es un álgebra de Lukasiewicz n-valente (39, 17).

Si $f \in A^X$ y existen el supremo y el ínfimo del conjunto

$R(f) = \{ f(x) : x \in X \} = f(X)$, que notaremos $\bigvee R(f)$ y $\bigwedge R(f)$ respectivamente, podemos considerar las siguientes funciones :

$$(\exists f)(x) = \bigvee R(f) \ , \quad (\forall f)(x) = \bigwedge R(f) \ , \text{ para todo } x \in X.$$

Toda subálgebra S del álgebra de Lukasiewicz A^X que verifique las condiciones :

S1) Si $f \in S$, existen los elementos $\bigvee R(f)$ y $\bigwedge R(f)$,

S2) Si $f \in S$, las funciones $\exists f$ y $\forall f$ pertenecen a S,

recibe el nombre de álgebra de Lukasiewicz n-valente funcional monádica (A-valuada con dominio X)

El ejemplo típico es el álgebra C_n^X que notaremos $(C_n^X, \exists)$, o simplemente $C^*_{n,X}$. Esta álgebra será importante más adelante.

Si consideramos, por ejemplo, el álgebra C_n^N , donde N es el conjunto de los números naturales, y S es el conjunto de las aplicaciones de N en C_n que toman el valor $\frac{1}{n-1}$ sobre una parte finita F (eventualmente vacía) de N, entonces si f $\in$ S, existe $\bigvee R(f)$, pero en general no es cierto que $\exists$ f $\in$ S.

Como es usual, el operador $\exists$ se denomina cuantificador existencial, y el operador $\forall$, cuantificador universal.

Nos interesa en estos momentos poner de manifiesto ciertas propiedades del operador $\exists$ definido precedentemente sobre un álgebra de Lukasiewicz n-valente funcional monádica S. Para ello necesitamos los siguientes lemas :

II.1.1. LEMA. <u>En toda álgebra de Lukasiewicz n-valente vale la siguiente propiedad : Si existe</u> $\bigvee_{i\in I} y_i$, <u>entonces existe</u> $\bigvee_{i\in I} (x \wedge y_i)$, <u>y además</u> $\bigvee_{i\in I} (x \wedge y_i) = x \wedge (\bigvee_{i\in I} y_i)$.

En efecto, la propiedad anterior vale en toda álgebra de Heyting (44, p. 135) y como las álgebras de Lukasiewicz son álgebras de Heyting (17), vale el lema anterior. L. Monteiro (39) dio para el caso de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes, una demostración independiente de la teoría de las álgebras de Heyting.

Recordemos que toda álgebra de Lukasiewicz n-valente A es isomorfa a una subálgebra de C_n^X, para algún conjunto X. Además, si $\{g_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de C_n^X, $(\bigvee_{i\in I} g_i)(x) = \bigvee_{i\in I} g_i(x)$. También si $h : A \longrightarrow A' \subseteq C_n^X$ es el isomorfismo, y existe el supremo de una familia $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq A$, entonces $h(\bigvee_{i\in I} a_i) = \bigvee_{i\in I} h(a_i)$ en A'.

II.1.2. LEMA. <u>En un álgebra de Lukasiewicz n-valente</u> A, <u>si</u> $a = \bigvee_{i\in I} a_i$ <u>y si</u> $s_j a_i = 0$ <u>para todo</u> $i \in I$, <u>entonces</u> $s_j a = 0$.

<u>Demostración</u>. Sea $h : A \longrightarrow A' \subseteq C_n^X$ un isomorfismo. Sean $g = h(a)$, $g_i = h(a_i)$, $i \in I$. Entonces $s_j g_i = 0$ para todo $i \in I$ y tenemos que probar que $s_j g = 0$.

De $s_j g_i = 0$ para todo $i \in I$ resulta $(s_j g_i)(x) = 0$ para todo $i \in I$ y para todo $x \in X$, de donde $s_j(g_i(x)) = 0$ para todo $i \in I$, $x \in X$. De aquí resulta que $g_i(x) \leqslant \frac{n-j-1}{n-1}$ para todo $i \in I$, $x \in X$, luego $\bigvee_{i\in I} g_i(x) \leqslant \frac{n-j-1}{n-1}$, esto es, $(\bigvee_{i\in I} g_i)(x) \leqslant \frac{n-j-1}{n-1}$, o sea, $g(x) \leqslant \frac{n-j-1}{n-1}$ para todo $x \in X$. Se tiene entonces $s_j(g(x)) = 0$ para todo x, y por lo tanto $s_j g = 0$.

II.1.3. LEMA. <u>En un álgebra de Lukasiewicz n-valente, si existe</u>

$a = \bigvee_{i\in I} a_i$, <u>entonces también existe</u> $\bigvee_{i\in I} s_j a_i$, <u>y además</u> $s_j a = \bigvee_{i\in I} s_j a_i$.

<u>Demostración</u>. a) De $a_i \leqslant a$ para todo $i \in I$, resulta $s_j a_i \leqslant s_j a$ para todo $i \in I$.

b) Sea $t \in A$ tal que $s_j a_i \leqslant t$ para todo $i \in I$; veamos que $s_j a \leqslant t$.

De $s_j a_i \leqslant t$ resulta $s_1 s_j a_i \leqslant s_1 t$, esto es, $s_j a_i \leqslant s_1 t$ para todo $i \in I$. Sea $a_i' = a_i \wedge \sim s_1 t$.

Entonces $s_j a_i' = s_j a_i \wedge \sim s_1 t \leqslant s_1 t \wedge \sim s_1 t = 0$, y por lo tanto

$\bigvee_{i\in I} a_i' = \bigvee_{i\in I} (a_i \wedge \sim s_1 t) = a \wedge \sim s_1 t$, de donde resulta por el

lema anterior $s_j(\bigvee_{i\in I} a_i') = 0$. Luego $s_j(a \wedge \sim s_1 t) = 0$, esto es,

$s_j a \wedge \sim s_1 t = 0$, y en consecuencia $s_j a \leqslant s_1 t \leqslant t$.

Estamos en condiciones de probar el siguiente lema :

II.1.4. LEMA. <u>Si</u> $(S, \exists)$ <u>es un álgebra de Lukasiewicz n-valente funcional monádica, entonces el operador</u> $\exists$ <u>tiene las siguientes propiedades</u> :

E0) $\exists\, 0 = 0$

E1) $f \leqslant \exists f$

E2) $\exists\,(f \wedge \exists\, g) = \exists f \wedge \exists\, g$

E3) $\exists\,(s_i f) = s_i(\exists\, f)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

<u>Demostración</u>. Claramente E0 y E1 son consecuencias inmediatas de la definición de $\exists$.

E2) $\exists\,(f \wedge \exists g)(x) = \bigvee_{x\in X} (f \wedge \exists g)(x) = \bigvee_{x\in X} (f(x) \wedge \bigvee_{x\in X} g(x)) =$

$= $ (lema II.1.1) $\bigvee_{x\in X} g(x) \wedge (\bigvee_{x\in X} f(x)) = \exists\, g(x) \wedge \exists\, f(x) =$

$= (\exists\, f \wedge \exists\, g)(x).$

E3) $\exists\,(s_i f)(x) = \bigvee_{x\in X} (s_i f)(x) = \bigvee_{x\in X} s_i f(x) =$ (lema II.1.3)

$= s_i \bigvee_{x\in X} f(x) = s_i(\exists\, f)(x).$

La siguiente definición surge en forma natural :

II.1.5. DEFINICION. <u>Un álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica es un par</u> $(A, \exists)$ <u>formado por un álgebra de Lukasiewicz n-valente</u> A <u>y un operador unario $\exists$ definido sobre</u> A (<u>cuantificador existencial</u>) <u>que verifica</u>:

E0) $\exists\, 0 = 0$

E1) $x \leq \exists\, x$

E2) $\exists\,(x \wedge \exists\, y) = \exists\, x \wedge \exists\, y$

E3) $\exists\, s_i x = s_i \exists\, x$, $1 \leq i \leq n-1$.

Claramente, las álgebras de Lukasiewicz n-valentes funcionales monádicas son ejemplos de álgebras de Lukasiewicz n-valentes monádicas.

Denotaremos con $L_n M$ la clase ecuacional de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes monádicas.

Algunas consecuencias de la definición están contenidas en el siguiente lema :

II.1.6. LEMA. <u>Si</u> $(A, \exists) \in L_nM$, <u>se tiene</u> :

E4) $\exists\ 1 = 1$

E5) $\exists\ \exists\ x = \exists\ x$

E6) <u>Si</u> $x \leqslant y$ <u>entonces</u> $\exists\ x \leqslant \exists\ y$

E7) $\sim x \vee s_{n-1} \exists x = 1$

E8) $\exists\ x \vee s_{n-1} \sim x = 1$

<u>Demostración</u>. E4 resulta haciendo $x = 1$ en E1. Si hacemos $x = 1$ en E2 y usamos E4 resulta $\exists(1 \wedge \exists y) = \exists\ 1 \wedge \exists\ y$, luego $\exists\ \exists\ y = \exists\ y$, y se tiene E5.

De $x \leqslant y$, como $y \leqslant \exists\ y$ tenemos $x \leqslant \exists\ y$, luego $x \wedge \exists\ y = x$, y por E2, $\exists\ (x \wedge \exists\ y) = \exists\ x \wedge \exists\ y = \exists x$, luego se tiene E6.

Para E7, utilizando L13, L9 y E1, tenemos $1 = \sim x \vee s_{n-1}x \leqslant$

$\leqslant \sim x \vee s_{n-1} \exists x$. Por último, como $x \leqslant \exists\ x$, por L13,

$1 = x \vee s_{n-1} \sim x \leqslant \exists\ x \vee s_{n-1} \sim x$, y se tiene E8.

II.1.7. DEFINICION. <u>Un elemento</u> k <u>de un álgebra de Lukasiewicz monádica</u> A <u>se dice una constante o un invariante de</u> A <u>si</u> $\exists\ k = k$.

Notaremos $K(A) = \{ k \in A : \exists\ k = k \}$.

II.1.8. LEMA. K(A) <u>es cerrado con respecto a las operaciones</u> $\wedge$,

$\sim$ y s_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
[K[A] es una L-subálgebra de A, esto es, es una subálgebra de A como álgebra de Lukasiewicz n-valente].

Demostración. Si $x, y \in K[A]$, entonces $x = \exists x$, $y = \exists y$. Luego $x \wedge y = \exists x \wedge \exists y = \exists (x \wedge \exists y) = \exists (x \wedge y)$. Luego $x \wedge y \in K[A]$.
Sea $x \in K[A]$, esto es, $\exists x = x$. Aplicando sucesivamente E0, L8, L4, la hipótesis, E3, E2 y E3, tenemos :

$0 = \exists 0 = \exists (s_i x \wedge \sim s_i x) = \exists (s_i x \wedge s_{n-i} \sim x) =$

$= \exists (s_i \exists x \wedge s_{n-i} \sim x) = \exists (\exists s_i x \wedge s_{n-i} \sim x) = \exists s_i x \wedge \exists s_{n-i} \sim x =$

$= \exists s_i x \wedge s_{n-i} \exists \sim x.$

Luego $s_{n-i} \exists \sim x \leqslant \sim \exists s_i x = \sim s_i \exists x = \sim s_i x = s_{n-i} \sim x \leqslant \exists s_{n-i} \sim x =$

$= s_{n-i} \exists \sim x$. Luego $s_{n-i} \exists \sim x = s_{n-i} \sim x$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Por L6 resulta que $\exists \sim x = \sim x$, y por lo tanto $\sim x \in K[A]$.
Por último, si $x \in K[A]$, esto es, $\exists x = x$, entonces $s_i \exists x = s_i x$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, y por E3, $\exists s_i x = s_i x$, esto es, $s_i x \in K[A]$.

II.1.9. COROLARIO. Si $x, y \in K[A]$, entonces $x \vee y \in K[A]$.

En toda álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica, valen las dos reglas de cálculo siguientes. Reproducimos la demostración dada en [39, p. 26] :

E9) $\exists (x \vee y) = \exists x \vee \exists y$

E10) $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$.

En efecto, como $x \leqslant x \vee y$ e $y \leqslant x \vee y$, entonces por E6,

$\exists x \leq \exists(x \vee y)$ y $\exists y \leq \exists(x \vee y)$.

Luego $\exists x \vee \exists y \leq \exists(x \vee y)$. (i)

De E1, resulta : $x \vee y \leq \exists x \vee \exists y$, luego por E6,

$\exists (x \vee y) \leq \exists(\exists x \vee \exists y)$. Pero de E5 y II.1.9, tenemos que

$\exists(\exists x \vee \exists y) = \exists x \vee \exists y$. Luego $\exists(x \vee y) \leq \exists x \vee \exists y$. (ii)

De (i) e (ii) resulta : $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$ y se tiene E9.

Por otro lado, como $\exists x \in K(A)$, sabemos que $\sim\exists x \in K(A)$, luego

$\exists \sim \exists x = \sim \exists x$, lo que prueba E10.

Los siguientes lemas fueron también probados en (39) para $n = 3$.

II.1.10. LEMA. <u>Si</u> $s_i x \in K(A)$ <u>para</u> $i = 1, 2, \ldots, n-1$, <u>entonces</u> $x \in K(A)$.

<u>Demostración</u>. Si $s_i x \in K(A)$, $1 \leq i \leq n-1$, entonces $\exists s_i x = s_i x$, $1 \leq i \leq n-1$. Por E3, $s_i \exists x = s_i x$, $1 \leq i \leq n-1$, y por L6, $\exists x = x$, luego $x \in K(A)$.

II.1.11. LEMA. <u>Si</u> $x \in B = B(A)$, <u>entonces</u> $\exists x \in B$.

<u>Demostración</u>. Si $x \in B$, entonces $s_i x = x$ cualquiera que sea i. Entonces $\exists s_i x = \exists x$, y por E3, $s_i \exists x = \exists x$, o sea $\exists x \in B$.

II.1.12. COROLARIO. <u>El sistema</u> $(B(A), \exists)$ <u>es un álgebra de Boole monádica</u>.

II.1.13. LEMA. <u>Si</u> $B(A) \subseteq K(A)$, <u>entonces</u> $\exists x = x$ <u>para todo</u> $x \in A$.

<u>Demostración</u>. Si $x \in A$, $s_i x \in B(A)$, $1 \leq i \leq n-1$. Luego como

$B(A) \subseteq K(A)$, $s_i x \in K(A)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, y por II.1.10, $x \in K(A)$.

Luego $\exists x = x$ para todo $x \in A$.

En particular, el lema anterior implica que en C_n el único cuantificador existencial que se puede definir es el trivial.

Se define el cuantificador universal en la forma usual, es decir, $\forall x = \sim \exists \sim x$.

Se tiene : $\exists x = \sim \forall \sim x$. Además $\exists \forall x = \forall x$ y $\forall \exists x = \exists x$; en efecto, sabemos por E10 que $\exists \sim \exists x = \sim \exists x$, luego $\exists \forall x = \exists \sim \exists \sim x =$ $= \sim \exists \sim x = \forall x$ y $\forall \exists x = \sim \exists \sim \exists x = \exists x$. También se prueba fácilmente que $\exists x = x$ si y sólo si $\forall x = x$, lo cual resulta del hecho que K es cerrado con respecto a $\sim$.

Señalemos por último las siguientes dos propiedades que, entre otras, tiene el cuantificador universal :

$$\forall x \leqslant x \quad \text{y} \quad \exists(x \wedge \forall y) = \exists x \wedge \forall y.$$

La primera de ellas resulta de la correspondiente propiedad del operador $\exists$: $x \leqslant \exists x$. Aplicando sucesivamente E10, E2 y E10 se tiene : $\exists(x \wedge \forall y) = \exists(x \wedge \sim \exists \sim y) = \exists(x \wedge \exists \sim \exists \sim y) =$ $= \exists x \wedge \exists \sim \exists \sim y = \exists x \wedge \sim \exists \sim y = \exists x \wedge \forall y$. Estas propiedades se usarán más adelante.

II.2. SISTEMAS DEDUCTIVOS MONADICOS.

Recordemos que en un álgebra de Lukasiewicz se tiene definida una operación binaria $\longrightarrow$, llamada implicación débil, mediante la fórmula $x \longrightarrow y = s_{n-1} \sim x \vee y$. Esta operación fue introducida por A. Monteiro para el caso trivalente [29, 32] y generalizada por R. Cignoli [11] para n arbitrario.

II.2.1. DEFINICION. <u>Si</u> $A \in L_n M$, <u>un subconjunto</u> D <u>de</u> A <u>se dice un sistema deductivo monádico si satisface las siguientes condiciones</u>:

D1) $1 \in D$

D2) <u>Si</u> $x \in D$ <u>y</u> $x \longrightarrow y \in D$ <u>entonces</u> $y \in D$

D3) <u>Si</u> $x \in D$, <u>entonces</u> $\forall x \in D$.

Esto es, D es un sistema deductivo del álgebra de Lukasiewicz A, que verifica además la condición D_3.

En un reticulado distributivo L con primer y último elemento, se define la noción de filtro de Stone como un filtro F tal que para todo $x \in F$ existe $b \in F \cap B(L)$ tal que $b \leq x$ [33, 9].

R. Cignoli [11] probó que en un álgebra de Lukasiewicz n-valente A, la noción de filtro de Stone es equivalente a la noción de filtro con la propiedad : $x \in F$ implica $s_1 x \in F$ (Ver párrafo I.1). Esta equivalencia es consecuencia de que $B(A) = s_1(A)$.

Además, en las álgebras de Lukasiewicz n-valentes, las nociones de sistema deductivo y filtro de Stone son equivalentes [11, p. 17], luego los sistemas deductivos monádicos son los filtros de Stone que verifican la condición D3, o sea, aquellas partes de A que verifican : D es un filtro, $s_1 D \subseteq D$ y $\forall D \subseteq D$.

II.2.2. DEFINICION. El sistema deductivo monádico $DM(H)$ generado por una parte H de $A \in L_n M$ es la intersección de todos los sistemas deductivos monádicos de A que contienen a H. De la misma forma $F(H)$ es el filtro generado por H y $D(H)$ es el sistema deductivo generado por H.

II.2.3. LEMA. Si H es una parte de un álgebra $A \in L_n M$, entonces $D(H) = F(s_1 H)$.

Demostración. Veamos que $F(s_1 H)$ es el menor sistema deductivo que contiene a H. Sea $h \in H$, como $s_1 h \leqslant h$ y $s_1 h \in F(s_1 H)$, entonces $h \in F(s_1 H)$, luego $H \subseteq F(s_1 H)$.

Sea $x \in F(s_1 H)$, entonces existen $h_1, \ldots, h_n \in H$ tales que $s_1 h_1 \wedge s_1 h_2 \wedge \ldots \wedge s_1 h_n \leqslant x$, luego por L9, $s_1(s_1 h_1 \wedge s_1 h_2 \wedge \ldots \wedge s_1 h_n) \leqslant s_1 x$. Como $s_1 h_1 \wedge \ldots \wedge s_1 h_n \in B(A)$, entonces $s_1 h_1 \wedge s_1 h_2 \wedge \ldots \wedge s_1 h_n \leqslant s_1 x$, luego $s_1 x \in F(s_1 H)$.

Sea D' un sistema deductivo tal que $H \subseteq D'$, entonces claramente $s_1 H \subseteq D'$, y como D' es un filtro, $F(s_1 H) \subseteq D'$. Luego $D(H) = F(s_1 H)$.

En particular, si $H = \{a\}$, $D(a) = F(s_1 a)$, esto es,

$D(a) = \{ y \in A : s_1 a \leqslant y \}$.

En forma similar se prueba el siguiente lema, que L. Monteiro demostró para $n = 3$ [39].

II.2.4. LEMA. <u>Si</u> H <u>es una parte de un álgebra</u> $A \in L_nM$, <u>entonces</u> $DM(H) = D(\forall H)$.

Se tiene entonces que en el caso $H = \{a\}$, $DM(a) = D(\forall a) =$ $= F(s_1 \forall a) = F(\forall s_1 a)$.

II.2.5. LEMA. <u>Si</u> $A \in L_nM$ <u>y</u> $a \in A$, <u>entonces</u> $F(a)$ <u>es un sistema deductivo monádico si y sólo si</u> $a \in K(A) \cap B(A)$.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $F(a)$ es un sistema deductivo monádico. Entonces $s_1 a \in F(a)$ y $\forall a \in F(a)$, esto es, $a \leq s_1 a$ y $a \leq \forall a$, de donde $a = s_1 a$ y $a = \forall a$, luego $a \in K(A) \cap B(A)$.

Recíprocamente, si $a \in K(A) \cap B(A)$ entonces $a = s_1 a$ y $a = \forall a$, luego $a = s_1 \forall a$. Por lo tanto, $F(a) = F(s_1 \forall a) = DM(a)$ y en consecuencia $F(a)$ es un sistema deductivo monádico.

De la misma manera que en el caso trivalente [39], en un álgebra de Lukasiewicz n-valente A podemos considerar las siguientes álgebras: el álgebra de Lukasiewicz n-valente de los invariantes o constantes $K = K(A) = \{k \in A : \exists k = k\}$, el álgebra de Boole monádica $B = B(A)$ de los elementos complementados de A, y por último el álgebra de Boole $B(A) \cap K(A)$.

En consecuencia, podemos considerar el conjunto $\mathbb{M}$ de todos los sistemas deductivos monádicos de A, el conjunto $\mathbb{D}$ de todos los sistemas deductivos (o filtros de Stone) de K(A), el conjunto $\mathbb{U}$ de todos los filtros monádicos de B(A) y el conjunto $\mathbb{F}$ de todos los filtros de $B(A) \cap K(A)$. Y las siguientes aplicaciones :

$$\varphi_1 : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{D}, \quad \varphi_1(D) = D \cap K(A) = \exists D$$

$$\varphi_2 : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{U}, \quad \varphi_2(D) = D \cap B(A) = s_1 D$$

$$\varphi_3 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{F}, \quad \varphi_3(D') = D' \cap B(K) = s_1 D'$$

$$\varphi_4 : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{F}, \quad \varphi_4(F) = F \cap K(B) = \exists F.$$

Resulta así que :

II.2.6. LEMA. *Si ordenamos los conjuntos* $\mathbb{M}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{U}$ y $\mathbb{F}$ *por la relación de inclusión, entonces las aplicaciones* φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 *son isomorfismos de orden, siendo el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "\varphi_3"] \\
\mathbb{U} \arrow[r, "\varphi_4"'] & \mathbb{F}
\end{tikzcd}$$

conmutativo.

Demostración. Que φ_3 es un isomorfismo es un resultado de la teoría de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes (11), y que φ_4 es un isomorfismo es consecuencia de un resultado de la teoría de las álgebras de Boole monádicas.

Si $D \in \mathbb{M}$, entonces es claro que $\varphi_1(D) = D \cap K(A) \in \mathbb{D}$, y D es el filtro generado por $D \cap K(A)$. Recíprocamente, si $D' \in \mathbb{D}$, entonces $D = F(D') \in \mathbb{M}$ es tal que $D' = D \cap K(A)$. Por II.2.3 y II.2.4, $DM(D') = F(s_1 \forall D') = F(D')$.

Análogamente, si $D \in \mathbb{M}$, entonces $\varphi_2(D) = D \cap B(A) \in \mathbb{U}$, y D es el filtro generado por $D \cap B(A)$. También, si $D' \in \mathbb{U}$, entonces $D = F(D') \in \mathbb{M}$ y $D' = D \cap B(A)$. Por II.2.3 y II.2.4, $DM(D') = F(D')$.

Por último, $(\varphi_3 \circ \varphi_1)(D) = D \cap K(A) \cap B(K)$ y $(\varphi_4 \circ \varphi_2)(D) = D \cap B(A) \cap K(B)$, y se verifica la igualdad como consecuencia de que $B(K(A)) = K(B(A)) = B(A) \cap K(A)$.

Del lema anterior resulta que las nociones de sistema deductivo monádico maximal, sistema deductivo monádico irreducible y sistema deductivo monádico completamente irreducible, cuyas definiciones son las usuales, coinciden en las álgebras de Lukasiewicz n-valentes monádicas, dado que ellas coinciden en las álgebras de Boole, y la transformación $\varphi_3 \circ \varphi_1$ (ó $\varphi_4 \circ \varphi_2$) respeta estos conceptos.

Resulta también en forma inmediata del lema anterior que todo sistema deductivo monádico propio es intersección de sistemas deductivos monádicos maximales, y también que la intersección de todos los sistemas deductivos monádicos maximales de un álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica es el conjunto $\{1\}$.

El lema anterior proporciona también una importante caracterización de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes monádicas simples, como veremos a continuación.

II.3. CONGRUENCIAS Y ALGEBRAS SIMPLES.

La noción de homomorfismo entre álgebras de Lukasiewicz n-valentes monádicas tiene el significado usual en álgebra universal. Como en I.2, llamaremos L-homomorfismos a las aplicaciones que preservan la estructura de álgebra de Lukasiewicz n-valente subyacente.
Las nociones de epimorfismo, monomorfismo, etc, son también las usuales.

Asociado a cada homomorfismo f está su núcleo N(f), el cual verifica :

II.3.1. LEMA. <u>El núcleo de un homomorfismo es un sistema deductivo monádico</u>.

<u>Demostración</u>. Sea $h : A \longrightarrow A'$ un homomorfismo, $A, A' \in L_nM$, y sea $D = N(h)$. Como h es un L-homomorfismo, entonces D es un sistema deductivo. Si $x \in D$, entonces $h(\forall x) = \forall h(x) = \forall 1 = 1$, luego $\forall x \in D$, por lo tanto D es un sistema deductivo monádico.

Sea $A \in L_nM$, D un sistema deductivo monádico de A y f el L-homomorfismo natural de A en A/D. Entonces, si x_1 y x_2 son elementos de A y $f(x_1) = f(x_2)$, existe un elemento $d \in D$ tal que $x_1 \wedge d = x_2 \wedge d$, y en consecuencia $x_1 \wedge d \wedge \forall d = x_2 \wedge d \wedge \forall d$, de donde $x_1 \wedge \forall d = x_2 \wedge \forall d$. De aquí se tiene $\exists(x_1 \wedge \forall d) = \exists(x_2 \wedge \forall d)$, y por lo tanto $\exists x_1 \wedge \forall d = \exists x_2 \wedge \forall d$, y como D es un sistema deductivo monádico, $\forall d \in D$, luego $f(\exists x_1) = f(\exists x_2)$. Por lo tanto, D determina una congruencia sobre el álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica A. Esto significa que podemos transformar el álgebra de Lukasiewicz n-valente A/D en forma natural en un álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica definiendo $\exists|x| = |\exists x|$, donde $|x| = f(x)$ indica la clase de congruencia módulo D determinada por x [9,c.VI]. Por otro lado, si $\equiv$ es una congruencia sobre A, el conjunto $D = \{ x \in A : x \equiv 1 \}$ es un sistema deductivo monádico, y se verifica que el conjunto ordenado de todas las congruencias sobre A es isomorfo al conjunto de todos los sistemas deductivos monádicos ordenado por inclusión.

Los teoremas de homomorfismos son válidos por resultados de álgebra universal.

II.3.2. DEFINICION. <u>Un álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica</u> A <u>se dice simple si</u> : 1) A <u>tiene más de un elemento y</u> 2) <u>las únicas imágenes homomórficas de</u> A <u>son</u> A <u>y el álgebra con un solo elemento</u>.

Como consecuencia de un teorema de Birkhoff [9, p. 137], un álgebra $A \in L_nM$ es simple si y sólo si $\{1\}$ es el único sistema deductivo monádico propio de A, y como consecuencia se tiene que un sistema deductivo monádico D es maximal si y sólo si A/D es simple.

Esto, juntamente con el lema II.2.6, proporciona una caracterización de las álgebras de Lukasiewicz n-valentes monádicas simples. En efecto, decir que A es un álgebra simple es equivalente a decir que A tiene un único sistema deductivo monádico propio, y esto es lo mismo que decir que $K(A)$ tiene un único sistema deductivo propio, esto es, $K(A)$ es un álgebra de Lukasiewicz simple. Esto también equivale a afirmar que $B(A)$ tiene un único filtro monádico propio, o sea, $B(A)$ es un álgebra de Boole monádica simple. Por último, esto es equivalente a decir que $B(A) \cap K(A)$ tiene un único filtro propio, o lo que es lo mismo, que $B(A) \cap K(A)$ es un álgebra de Boole simple.

Observemos que del lema II.2.5 también se deduce una caracterización de la simplicidad para el caso finito.

Observemos en este momento que el álgebra funcional monádica $(C_n^X, \exists) = C^*_{n,X}$ es simple. En efecto, por el lema II.2.5, es suficiente probar que $B(C^*_{n,X}) \cap K(C^*_{n,X}) = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Pero si $f \in C^*_{n,X}$, entonces $f \in B(C^*_{n,X})$ si y sólo si $f(X) \subseteq \{0, 1\} \subseteq C_n$, y $f \in K(C^*_{n,X})$ si y sólo si f es una función constante.

Luego si consideramos las funciones e_j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, tales que $e_j(x) = \frac{j}{n-1}$ para todo x, entonces $K(C^*_{n,X}) = \{e_j\}_{j = 0, 1, \ldots, n-1}$.
Luego $B(C^*_{n,X}) \cap K(C^*_{n,X}) = \{e_0, e_{n-1}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Observemos además que toda subálgebra de un álgebra simple es simple, luego las álgebras funcionales monádicas C_n-valuadas, esto es, las subálgebras de $C^*_{n,X}$, son todas álgebras simples.

El hecho más importante es que estas álgebras son esencialmente las únicas álgebras simples de la variedad L_nM. Esto es una consecuencia del siguiente lema :

II.3.3. LEMA. Sean A y C álgebras simples de la variedad L_nM. Si $h : A \longrightarrow C$ es un L-homomorfismo inyectivo, entonces $h(\exists a) = \exists h(a)$ para todo $a \in A$.

Demostración. Por el principio de determinación de Moisil, es suficiente probar que $s_i h(\exists a) = s_i \exists h(a)$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$,

$a \in A$. Ahora bien, $s_i h(\exists a) = h(s_i \exists a)$; pero

$s_i \exists a = \exists s_i a \in B(A) \cap K(A)$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y $a \in A$. Como A es simple, $s_i \exists a \in \{0, 1\}$, luego $h(s_i \exists a) = s_i h(\exists a) \in \{0, 1\}$.

Por otro lado, también $s_i \exists h(a) \in B(C) \cap K(C)$, y como C es simple, $s_i \exists h(a) \in \{0, 1\}$, para todo i y para $a \in A$. Tenemos entonces

$s_i h(\exists a) \in \{0, 1\}$ y $s_i \exists h(a) \in \{0, 1\}$.

Es suficiente probar entonces que $s_i \exists h(a) = 0$ si y sólo si $s_i h(\exists a) = 0$.

Si $s_i \exists h(a) = 0$, como $h(a) \leq \exists h(a)$, $s_i h(a) = 0$, esto es, $h(s_i a) = 0$, y como h es inyectiva, $s_i a = 0$, luego $\exists s_i a = 0$, de donde $h(\exists s_i a) = 0$ o sea, $s_i h(\exists a) = 0$.

Análogamente, si $s_i h(\exists a) = 0$, entonces $h(s_i \exists a) = 0$, y como h es un isomorfismo, $s_i \exists a = 0$, de donde $\exists s_i a = 0$. De aquí se tiene $s_i a = 0$ y por lo tanto $h(s_i a) = s_i h(a) = 0$. Luego $\exists s_i h(a) = s_i \exists h(a) = 0$.

Como consecuencia de este lema se tiene :

II.3.4. TEOREMA. <u>Si</u> A <u>es simple,</u> A <u>es isomorfa a una subálgebra de</u> $C^*_{n,X}$.

<u>Demostración</u>. Por el teorema de representación de Moisil [11, 25 p. 134], A es isomorfa, como álgebra de Lukasiewicz n-valente, a una subálgebra de un producto directo de álgebras C_n , digamos C_n^X. Sea $h : A \longrightarrow C_n^X$ el L-homomorfismo inyectivo y consideremos el álgebra $C^*_{n,X}$. Como A y $C^*_{n,X}$ son álgebras simples de la variedad L_nM, por II.3.3, h es monádico y por lo tanto A es isomorfa a una subálgebra de $C^*_{n,X}$.

II.3.5. TEOREMA. <u>Un álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica</u> A <u>es producto subdirecto de una familia</u> $\{A_i\}_{i \in I}$ <u>de álgebras similares si y sólo si existe una familia</u> $\{D_i\}_{i \in I}$ <u>de sistemas deductivos monádicos de</u> A <u>tal que</u> 1) $\bigcap_{i \in I} D_i = \{1\}$ <u>y</u> 2) $A_i = A/D_i$ <u>para todo</u> $i \in I$.

Resulta del teorema de Birkhoff [9, p. 140] y de la correspondencia entre relaciones de congruencia y sistemas deductivos monádicos. Se tiene entonces el siguiente teorema :

II.3.6. TEOREMA. Si $A \in L_nM$ y A es no trivial, A es semisimple, esto es, A es producto subdirecto de una familia de álgebras simples.

Demostración. Basta considerar la familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de todos los sistemas deductivos monádicos maximales de A. Sabemos que $\bigcap_{i \in I} M_i = \{1\}$, luego si $S_i = A/M_i$, por el teorema anterior, A es producto subdirecto de la familia $\{S_i\}_{i \in I}$. Además, las álgebras S_i son simples.

II.3.7. TEOREMA. Toda álgebra de L_nM no trivial, es producto subdirecto de una familia de subálgebras de $C^*_{n,X}$.

Demostración. Es una consecuencia del teorema II.3.5 y del teorema II.3.3.

II.4. SUBALGEBRAS Y AUTOMORFISMOS DEL ALGEBRA $C^*_{n,X}$.

Los resultados anteriores nos inducen a caracterizar las subálgebras de $C^*_{n,X}$, esto es, las álgebras de Lukasiewicz funcionales monádicas C_n-valuadas.

Para cada $\alpha \in X$, vamos a considerar la aplicación $\Pi_\alpha : C^*_{n,X} \longrightarrow C_n$ definida por $\Pi_\alpha(f) = f(\alpha)$, $f \in C_n^X$.

Es claro que Π_α no es un homomorfismo, sino sólo un L-homomorfismo. En efecto, $\Pi_\alpha(\exists f) = (\exists f)(\alpha) = \bigvee R(f)$, y $\exists \Pi_\alpha(f) = \exists f(\alpha) = f(\alpha)$ pues en C_n el cuantificador es trivial.

Ahora bien, en general $f(\alpha) \neq \bigvee R(f)$, pues si, por ejemplo, $X = N$ y f está definida por $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es par} \\ 0 \text{ si } x \text{ es impar} \end{cases}$

entonces $\Pi_1(\exists f) = (\exists f)(1) = \bigvee R(f) = 1$

y $\exists \Pi_1(f) = \exists f(1) = \exists 0 = 0$. Luego $\Pi_\alpha(\exists f) \neq \exists \Pi_\alpha(f)$.

II.4.1. LEMA. <u>Si</u> S <u>es una subálgebra de</u> $C^*_{n,X}$, <u>entonces</u> $\Pi_\alpha(S) = \Pi_\alpha(S \cap K(C^*_{n,X}))$, <u>para todo</u> $\alpha \in X$.

<u>Demostración</u>. Claramente $\Pi_\alpha(S \cap K(C^*_{n,X})) \subseteq \Pi_\alpha(S)$.

Sea $a = \frac{j}{n-1} \in \Pi_\alpha(S)$; entonces existe $f \in S$ tal que $\Pi_\alpha(f) = f(\alpha) = a$.

Consideremos el elemento $g = \exists\,(f \wedge \sim s_{n-j-1}f)$.

Es claro que $g \in S \cap K(C^*_{n,X})$. Veamos que $\pi_\alpha(g) = a$.

$$\pi_\alpha(g) = g(\alpha) = \exists\,(f \wedge \sim s_{n-j-1}f)(\alpha) = \bigvee_{x\in X} (f \wedge \sim s_{n-j-1}f)(x) =$$

$$= \bigvee_{x\in X} f(x) \wedge \sim s_{n-j-1}f(x).$$

Ahora bien, $s_{n-j-1}f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } f(x) = \dfrac{i}{n-1} & \text{con } i \leqslant j \\ 1 \text{ si } f(x) = \dfrac{i}{n-1} & \text{con } i > j \end{cases}$.

Luego $s_{n-j-1}f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } f(x) \leqslant a \\ 1 \text{ si } f(x) > a \end{cases}$,

entonces $\sim s_{n-j-1}f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } f(x) \leqslant a \\ 0 \text{ si } f(x) > a \end{cases}$

y por lo tanto $f(x) \wedge \sim s_{n-j-1}f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \leqslant a \\ 0 \text{ si } f(x) > a \end{cases}$

Como por hipótesis existe un elemento $\alpha \in X$ tal que $f(\alpha) = a$, entonces $\bigvee_{x\in X} (f \wedge \sim s_{n-j-1}f)(x) = a$, luego $g(\alpha) = a$, esto es, $\pi_\alpha(g) = a$.

II.4.2. COROLARIO. <u>Si</u> S <u>es una subálgebra de</u> $C^*_{n,X}$, <u>entonces</u> $\pi_\alpha(S) = \pi_\beta(S)$, <u>para todo</u> $\alpha, \beta \in X$.

Demostración. En efecto, observemos en primer lugar que si $f \in K(C^*_{n,X})$, entonces $f(\alpha) = f(\beta)$ para todo $\alpha, \beta \in X$, y por lo tanto $\pi_\alpha(f) = \pi_\beta(f)$, $\alpha, \beta \in X$. Luego $\pi_\alpha(S \cap K(C^*_{n,X})) =$ $= \pi_\beta(S \cap K(C^*_{n,X}))$, y por II.4.1, $\pi_\alpha(S) = \pi_\beta(S)$, para todo $\alpha, \beta \in X$, como se quería probar.

Observemos que la restricción de π_α a $K(C^*_{n,X})$ es un L-isomorfismo sobre C_n. En efecto, si $f, g \in K(C^*_{n,X})$ y $\pi_\alpha(f) = \pi_\alpha(g)$, entonces $f(\alpha) = g(\alpha)$, y como f y g son funciones constantes, $f = g$.
Además, dado $a \in C_n$, la función $f : X \longrightarrow C_n$ definida por $f(x) = a$ para todo $x \in X$, es tal que $\pi_\alpha(f) = a$.
También, $S \cap K(C^*_{n,X})$ es isomorfa a una subálgebra de C_n.

Nos interesa particularmente, para cálculos posteriores, el caso en que $C^*_{n,X}$ es finita. Supongamos entonces que el conjunto X es finito de cardinal m, $X = \{1, 2, \ldots, m\}$, y notemos $C^*_{n,m}$ en vez de $C^*_{n,X}$.

Sea A una L-subálgebra de C_n y sea B una subálgebra (Booleana) de $B(C^*_{n,m})$.
Observemos que $B(C^*_{n,X}) \cong 2^X$, donde 2 es el álgebra de Boole con dos elementos. Esto resulta del hecho que $f \in B(C^*_{n,X})$ si y sólo si

$f(x) \in \{0, 1\} \subseteq C_n$, para todo $x \in X$.

En particular, $B(C^{*}_{n,m}) \cong 2^m$, y es por lo tanto, un álgebra de Boole con m átomos.

Sabemos que existe una correspondencia biunívoca entre la familia de las subálgebras de 2^m y las particiones del conjunto de sus átomos. Además, cada partición del conjunto de átomos de 2^m se corresponde en forma natural con una partición del conjunto $X = \{1, \ldots, m\}$. Existe entonces una correspondencia biunívoca entre subálgebras de 2^m y particiones de X.

Sea $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ la partición del conjunto X determinada por la subálgebra B. Es sabido que los elementos de B están caracterizados como los elementos $f \in C^{*}_{n,m}$ tales que $f(x) \in \{0, 1\}$ para todo $x \in X$ y tales que $f(i) = f(j)$ si $i, j \in P_t$.

Consideremos entonces el siguiente conjunto :

$$S(A,B) = \{ f \in C^{*}_{n,m} : f(i) \in A \text{ y } f(i) = f(j) \text{ si } i,j \in P_t \},$$

que notaremos indistintamente $S(A,B)$ o $S(A, \mathbb{P})$, según que queramos destacar la subálgebra booleana B o la partición $\mathbb{P}$ asociada.

Entonces $S(A,B)$ es una subálgebra de $C^{*}_{n,m}$.

Veamos que estas son las únicas subálgebras de $C^{*}_{n,m}$.

Sea S una subálgebra de $C^*_{n,m}$.

Sea $A = \pi_1(S)$. (Recordemos que $\pi_i(S) = \pi_j(S)$, para todo $i, j \in X$)

Sea $B = S \cap B(C^*_{n,m})$, ($= B(S)$) y $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ la partición asociada a B.

Vamos a probar que $S = S(A,B)$.

i) $S \subseteq S(A,B)$.

Si $f \in S$, entonces $f(i) = \pi_i(f) \in \pi_i(S) = \pi_1(S) = A$

Veamos que $f(i) = f(j)$ si $i, j \in P_t$. Supongamos que $i, j \in P_t$ con $f(i) \neq f(j)$. Sea $f(i) = \frac{t}{n-1} < \frac{k}{n-1} = f(j)$. Entonces

$s_{n-k}f \in S \cap B(C^*_{n,m}) = B$, y por lo tanto $(s_{n-k}f)(i) = (s_{n-k}f)(j)$, pero la componente i-ésima de $s_{n-k}f$ es cero, es decir, $(s_{n-k}f)(i) = 0$, mientras que $(s_{n-k}f)(j) = 1$, lo que es una contradicción.

ii) $S(A,B) \subseteq S$.

Sea $f \in S(A,B)$, esto es, $f(i) \in A$ para todo $i \in X$, y $f(i) = f(j)$ si $i, j \in P_t$. Sean $h_1, h_2, \ldots, h_r$ definidos por :

$$h_j(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \in P_j \\ \\ 0 \text{ si } i \notin P_j \end{cases}, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Claramente $h_1, h_2, \ldots, h_r$ son los átomos de B y, en particular, $h_j \in S$, $1 \leq j \leq r$.

Para $i \in P_1$, sea $f(i) = x_{i_1}$. De $x_{i_1} \in A$. existe $g \in S$ tal que

$\pi_1(g) = x_{i_1}$. Sabemos que (ver demostración de II.4.1) existe un

elemento $g_{i_1} = \exists (g \wedge \sim s_j g)$, para algún j, tal que $\pi_1(g_{i_1}) = x_{i_1}$,

y $g_{i_1} \in S \cap K(C^*_{n,m})$. Luego $g_{i_1}(j) = x_{i_1}$ para todo $j \in X$.

En forma análoga existen elementos $g_{i_2}, \ldots, g_{i_r} \in S \cap K(C^*_{n,m})$

y tales que $\pi_\alpha(g_{i_\alpha}) = f(\alpha)$.

Entonces $f = (g_{i_1} \wedge h_1) \vee (g_{i_2} \wedge h_2) \vee \ldots \vee (g_{i_r} \wedge h_r)$,

luego $f \in S$.

Se tiene entonces :

II.4.3. TEOREMA. S <u>es una subálgebra del álgebra</u> $C^*_{n,m}$ <u>si y sólo si</u> $S = S(A,B)$, <u>donde</u> A <u>es una subálgebra de</u> C_n <u>y</u> B <u>es una subálgebra</u> <u>de</u> $B(C^*_{n,m})$.

Sea S(A,B) una subálgebra de $C^*_{n,m}$, donde A es una subálgebra de C_n, B es una subálgebra de $B(C^*_{n,m})$; sea $\mathbb{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ la partición de X determinada por B, e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ un conjunto de cardinal r. Se tiene entonces :

II.4.4. LEMA. <u>El álgebra</u> S(A,B) <u>es isomorfa al álgebra funcional</u> A-<u>valuada con dominio</u> Y : $(A^Y, \exists)$.

Demostración. En efecto, si $g \in [A^Y, \exists]$, definimos

$\varphi : [A^Y, \exists] \longrightarrow S[A,B]$ por medio de $\varphi[g] = f$, donde, si $i \in X$ con $i \in P_j$, entonces $f[i] = g[y_j]$. Claramente $\varphi[g] \in S[A,B]$ y φ es biyectiva. Como $R[g] = R[\varphi[g]]$, y $[\exists g][x] = \bigvee R[g] = t$, entonces $\varphi[\exists g] = t$ y $\exists[\varphi[g]] = t$.

Se prueba fácilmente que φ es un L-homomorfismo.

II.4.5. OBSERVACION. Con las notaciones anteriores, si A tiene s elementos, $N[S[A,B]] = s^r$. Es claro también que el número de subálgebras de $C^*_{n,m}$ es igual al producto del número de subálgebras de C_n por el número de subálgebras de $B[C^*_{n,m}]$. Además, si B_1 y B_2 son isomorfas, entonces $S[A,B_1]$ y $S[A,B_2]$ son isomorfas.

II.4.6. LEMA. Para que $S[A',B'] \subseteq S[A,B]$ es necesario y suficiente que $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$.

Demostración. La condición necesaria es inmediata. Veamos la condición suficiente. Si $B' \subseteq B$, la partición $\mathbb{P}$ asociada a B es una subpartición de la partición $\mathbb{P}'$ asociada a B' [todo elemento de $\mathbb{P}'$ es unión de elementos de $\mathbb{P}$, esto es, $\mathbb{P}$ es más fina que $\mathbb{P}'$]. Luego si $f \in S[A',B']$, $f[i] \in A'$ para todo i y $f[i] = f[j]$ si $i, j \in P'_t$, con $P'_t \in \mathbb{P}'$. Entonces, $f[i] \in A$, y si $i, j \in P_h \in \mathbb{P}$, como $P_h \subseteq P'_t$ para algún t, tendremos $f[i] = f[j]$.

II.4.7. COROLARIO. Las subálgebras maximales de $S[A,B]$ son las subálgebras del tipo $S[A',B]$, donde A' es una subálgebra maximal de A, o del tipo $S[A,B']$, donde B' es una subálgebra maximal de B.

II.4.8. LEMA. Si $\{S[A_i,B_i]\}_{i \in I}$ es una familia de subálgebras, entonces $\bigcap_{i\in I} S[A_i,B_i] = S[\bigcap_{i\in I} A_i, \bigcap_{i\in I} B_i]$.

Demostración. Es claro que : a) $S[\bigcap_{i\in I} A_i, \bigcap_{i\in I} B_i] \subseteq S[A_i,B_i]$ para todo $i \in I$. Veamos que : b) Si $S[A,B] \subseteq S[A_i,B_i]$ para todo $i \in I$, entonces $S[A,B] \subseteq S[\bigcap_{i\in I} A_i, \bigcap_{i\in I} B_i]$.

De $S[A,B] \subseteq S[A_i,B_i]$ para todo $i \in I$, por II.4.6, $A \subseteq A_i$ y $B \subseteq B_i$ para todo $i \in I$, luego $A \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ y $B \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$, y de nuevo por II.4.6, $S[A,B] \subseteq S[\bigcap_{i\in I} A_i, \bigcap_{i\in I} B_i]$.

De a) y b), $S[\bigcap_{i\in I} A_i, \bigcap_{i\in I} B_i] = \bigcap_{i\in I} S[A_i, B_i]$.

Nos interesa en este momento conocer los automorfismos de $C^*_{n,X}$ y de sus subálgebras. En general, si $C \in L_nM$, indicaremos con $Aut(C)$ el conjunto de todos los automorfismos de C y con $Aut_L(C)$ el conjunto de los L-automorfismos de C.

II.4.9. LEMA. Sea C un álgebra simple de la variedad L_nM. Si H es un L-homomorfismo de C en sí misma, y si $k \in K(C)$, entonces $H(k) = k$.

Demostración. Si fuese $H(k) \neq k$ existiría j_o , $1 \leqslant j_o \leqslant n-1$, tal que $s_{j_o} H(k) \neq s_{j_o} k$. Luego $H(s_{j_o} k) \neq s_{j_o} k$. Pero $s_{j_o} k \in B(C) \cap K(C) = \{0, 1\}$; entonces tendríamos $H(0) \neq 0$ ó $H(1) \neq 1$. Esto es una contradicción porque H es un L-homomorfismo.

En el lema siguiente, usaremos el resultado de Monteiro-Ribeiro (36) que damos a continuación : Si P es un operador unario definido sobre un conjunto parcialmente ordenado X, $K = \{ x \in X : Px = x \}$ y si P verifica : 1) $x \leqslant Px$, 2) si $x \leqslant y$ entonces $Px \leqslant Py$, 3) $PPx = Px$, entonces K es condicionalmente completo, esto es, si $x \in X$, existe $\bar{x} = \text{mín}\{ k \in K : x \leqslant k \}$, y $\bar{x} \in K$. Además $\bar{x} = Px$. (Ver 39, 36). Vale también la recíproca.

Si $A \in L_nM$, el operador $\exists$ definido sobre A es un operador unario que verifica las condiciones anteriores. Luego si K es el conjunto de las constantes de A, se tiene que para todo $x \in A$, $\exists x = \text{mín}\{ k \in K : x \leqslant k \}$.

II.4.10. LEMA. Si C es un álgebra simple, entonces $\text{Aut}(C) = \text{Aut}_L(C)$.

Demostración. Es claro que $\text{Aut}(C) \subseteq \text{Aut}_L(C)$.

Sea $H \in \text{Aut}_L(C)$. Sea $a \in C$ y probemos que $H(\exists a) = \exists H(a)$.

De $a \leqslant \exists a$, resulta $H(a) \leqslant H(\exists a)$, que es una constante, por II.4.9. Veamos que $H(\exists a)$ es la menor constante que sigue a $H(a)$. Sea $a' \in K(C)$ tal que $H(a) \leqslant a'$. Como $H(a') = a'$, entonces $H(a) \leqslant H(a')$, y como H es un L-automorfismo, $a \leqslant a'$.

Luego $H(\exists a) \leqslant H(\exists a') = H(a') = a'$.

Entonces, por la observación anterior, $\exists H(a) = H(\exists a)$.

En particular, $\mathrm{Aut}(C^*_{n,X}) = \mathrm{Aut}_L(C^*_{n,X})$.

Supongamos ahora que X es finito, $X = \{1, 2, \ldots, m\}$.

II.4.11. LEMA. $N\left[\mathrm{Aut}_L(C^*_{n,m})\right] = m!$

Demostración. Sea $\mathbb{B}(X)$ el conjunto de todas las biyeciones de X.
Si $\sigma \in \mathbb{B}(X)$ y definimos $\bar{\sigma} : C^*_{n,m} \longrightarrow C^*_{n,m}$ por $\bar{\sigma}(f) = f \circ \sigma$

entonces $\bar{\sigma}$ es un L-automorfismo de $C^*_{n,m}$.

Veamos que la correspondencia $\sigma \longrightarrow \bar{\sigma}$ es inyectiva.

Sea $\sigma \neq \sigma_1$ y veamos que $\bar{\sigma} \neq \bar{\sigma}_1$, esto es, que existe $f \in C^*_{n,m}$ tal que $\bar{\sigma}(f) \neq \bar{\sigma}_1(f)$. De $\sigma \neq \sigma_1$ existe $x_0 \in X$ tal que $\sigma(x_0) \neq \sigma_1(x_0)$.

Sea f la función definida por $f(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \sigma(x_0) \\ \\ 0 \text{ si } i \neq \sigma(x_0) \end{cases}$, $i \in X$.

Veamos que $\bar{\sigma}(f) \neq \bar{\sigma}_1(f)$, esto es, que $f \circ \sigma \neq f \circ \sigma_1$.

En efecto, $(f \circ \sigma)(x_0) = f(\sigma(x_0)) = 1$, y $(f \circ \sigma_1)(x_0) = f(\sigma_1(x_0)) =$
$= 0$, ya que $\sigma_1(x_0) \neq \sigma(x_0)$.

Como $N\left[\mathbb{B}(X)\right] = m!$, entonces $N\left[\mathrm{Aut}_L(C^*_{n,m})\right] \geqslant m!$.

Por otro lado, si α y β son L-automorfismos de $C^*_{n,m}$ tales que

$\alpha\big|_{B(C^*_{n,m})} = \beta\big|_{B(C^*_{n,m})}$, entonces $\alpha = \beta$.

Luego $N[Aut_L(C^*_{n,m})] \leqslant N[Aut(B(C^*_{n,m}))] = m!$, y por lo tanto $N[Aut_L(C^*_{n,m})] = m!$, como se quería probar.

De II.4.10 y II.4.11 resulta que $N[Aut(C^*_{n,m})] = m!$.

Si consideramos ahora una subálgebra $S(A,B)$ de $C^*_{n,m}$ con partición asociada $\mathbb{P} = \{ P_1, P_2, \ldots, P_r \}$, entonces, por II.4.4, $S(A,B)$ es isomorfa al álgebra funcional $(A^Y, \exists)$, donde Y es un conjunto con r elementos, y por lo tanto $N[Aut(S(A,B))] = r!$.

II.5. ALGEBRAS FINITAS.

Supondremos ahora que A es un álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica finita, y deduciremos algunas propiedades que nos serán de utilidad más adelante.

En primer lugar, todos los sistemas deductivos monádicos son filtros principales, más precisamente, por II.2.5, los sistemas deductivos monádicos de A son los filtros generados por los elementos $a \in B(A) \cap K(A)$.

En consecuencia, $F(a)$ es un sistema deductivo monádico maximal si y sólo si a es un átomo del álgebra de Boole $B(A) \cap K(A)$.

Si notamos $[0, x]$ el conjunto de elementos $y \in A$ tales que $y \leq x$, $[0, x]$ es un reticulado con primer elemento 0 y último elemento x. Si $x \in B(A) \cap K(A)$, entonces $[0, x]$ es cerrado con respecto a los operadores $s_1, \dots, s_{n-1}$ y con respecto al cuantificador $\exists$; si $a \in [0, x]$ y escribimos $\approx a = \sim a \wedge x$, entonces $[0, x]$ es también cerrado con respecto a $\approx$. Además, la aplicación $h : A \longrightarrow [0, x]$ definida por $h(a) = a \wedge x$, respeta las operaciones de álgebra de Lukasiewicz monádica, y como $L_n M$ es una variedad, entonces $[0, x]$ es un álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica. Es inmediato que $N(h) = F(x)$, y por lo tanto, el segmento $[0, x]$ es isomorfo al álgebra cociente $A/F(x)$.

Por otro lado, si $\{x_i\}_{1 \leq i \leq r}$ es una familia de elementos de $B(A) \cap K(A)$ tales que $\bigvee_{i=1}^{r} x_i = 1$ y $x_i \wedge x_j = 0$ si $i \neq j$, la aplicación h de A en $\prod_{i=1}^{r} [0, x_i]$ que a cada $a \in A$ le asocia la función h_a definida por $h_a(i) = a \wedge x_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, es un isomorfismo de álgebras de Lukasiewicz n-valentes, y es inmediato que también es monádico.

En particular, se tiene el siguiente resultado que mejora el teorema II.3.6 en el caso que A es finita.

II.5.1. TEOREMA. Toda álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica finita A no trivial es isomorfa al producto directo $\prod_{i=1}^{r} A/M_i$, donde $\{M_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ es la familia de todos los sistemas deductivos monádicos maximales de A.

Demostración. Resulta de lo anterior, ya que los sistemas deductivos monádicos maximales son los filtros generados por los átomos de $B(A) \cap K(A)$.

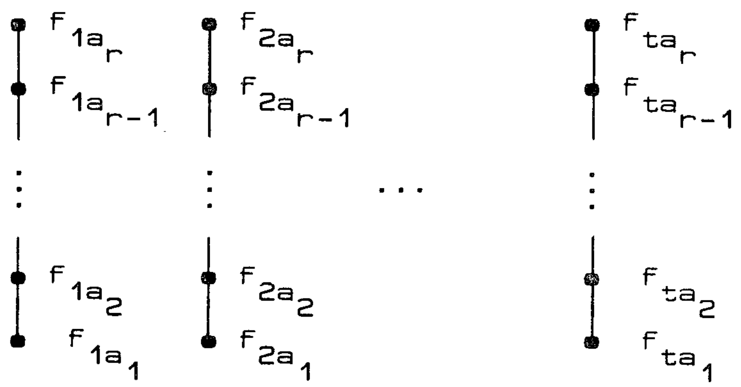
Nos interesa estudiar con mayor detalle la estructura de los segmentos $[0, a_i]$, donde a_i es un átomo de $B(A) \cap K(A)$.

Como $[0, a_i]$ es isomorfa a $A/F(a_i)$ y $F(a_i)$ es maximal, $A/F(a_i)$ es simple, por lo tanto $[0, a_i]$ es simple. Luego por II.3.4, II.4.3 y II.4.4, $[0, a_i]$ es isomorfa a un álgebra funcional monádica $(S^X, \exists)$, donde S es una subálgebra de C_n y X es un conjunto finito.

Como $S = \{a_0=0, a_1, a_2, \ldots, a_r=1\}$ es una cadena, es bien conocido que el conjunto de los elementos primos del reticulado S^X es el conjunto

$$\Pi = \left\{ f_{ia_j} : X \longrightarrow S \ : \ f(i) = a_j \neq 0 \text{ y } f(i') = 0 \text{ para todo } i \neq i', \ i, i' \in X \right\} .$$

Luego si t es el cardinal de X, Π es una suma cardinal de t cadenas de longitud r ; cada cadena está en correspondencia con los elementos no nulos de S:



(*)

Observemos que como los operadores modales están definidos puntualmente, entonces

$$s_\alpha(f_{ia_j}) = s_\alpha(f_{i'a_j}) \ , \ i, \ i' \in X, \ a_j \in S.$$

También es claro que $\exists f_{ia_j} = \bigvee_{i=1}^{t} f_{ia_j}$.

En cuanto a la transformación φ de Birula-Rasiowa definida sobre el conjunto de los elementos primos del álgebra $(S^X, \exists)$ se tiene que $\varphi(f_{ia_j}) = f_{ia_{j'}}$ si y sólo si $\varphi(f_{i'a_j}) = f_{i'a_{j'}}$, ya que S^X es un álgebra de Kleene y φ es un antiisomorfismo de período 2. En consecuencia φ invierte cada cadena de (*).

Como el segmento $[0, a_i]$ es isomorfo al álgebra $(S^X, \exists)$, el conjunto P_i de los elementos primos de $[0, a_i]$, esto es, el conjunto de los elementos primos de A que preceden a a_i, tiene la forma (*) con los operadores $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ y $\exists$, y con la transformación φ, definidos en la forma indicada. Estas observaciones se utilizarán en la sección II.7.

II.6. ALGEBRAS LIBRES.

Vamos a ver en primer lugar que el álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica libre $\mathbb{M} = \mathbb{M}(r)$ sobre un conjunto G de generadores de cardinal r finito, es finita.

Si $A \in L_nM$ y $X \subseteq A$, indicaremos con $S[X]$ la subálgebra generada por X, y con $SL[X]$ la subálgebra de Lukasiewicz generada por X

II.6.1. LEMA. *Si* $A \in L_nM$ y $G \subseteq A$ *es un conjunto de generadores de* A, *entonces* $A = SL[G \cup K[A]]$.

Demostración. Si $x \in SL[G \cup K[A]]$ entonces $\exists x \in SL[G \cup K[A]]$. Luego $SL[G \cup K[A]]$ es una subálgebra de A que contiene a G. Por lo tanto $S[G] \subseteq SL[G \cup K[A]]$, y de $S[G] = A$ resulta el lema.

II.6.2. COROLARIO. *Si* G *es un conjunto de generadores de* $C^*_{n,X}$ *y* G *es finito, entonces* $C^*_{n,X}$ *es finita*.

Demostración. Sabemos que $K[C^*_{n,X}] \cong C_n$ [Ver p. 88]. Luego $G \cup K[C^*_{n,X}]$ es un conjunto finito. Como $S[G] = C^*_{n,X}$, por el lema anterior, $SL[G \cup K[C^*_{n,X}]] = C^*_{n,X}$, que es finita porque toda álgebra de Lukasiewicz n-valente finitamente generada es finita.

II.6.3. COROLARIO. *Toda álgebra simple y finitamente generada es finita*.

Demostración. Inmediata, por lo anterior, ya que las álgebras simples son las álgebras funcionales A-valuadas, donde A es una subálgebra de C_n.

Observemos que $C^*_{n,X}$ es un álgebra de Post, donde las operaciones 0-arias de esta estructura son las constantes e_j, $j = 0,1,\ldots,n-1$ (pág. 82). Luego, si $SL(G \cup K(C^*_{n,X})) = C^*_{n,X}$ entonces $C^*_{n,X}$ puede ser generada por G como álgebra de Post. Esto proporciona una acotación del número de elementos de $C^*_{n,X}$. En efecto, si $N[G] = r$, entonces $N[C^*_{n,X}] \leq n^{n^r}$.

Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de todos los sistemas deductivos monádicos maximales de $\mathbb{M}$ y si $M \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{M}/M$ es simple y tiene un número de generadores menor o igual que r, luego por II.6.3, $\mathbb{M}/M$ es finita. Además, por II.3.4 y la observación anterior, existe un número $m = n^r$ tal que todos los cocientes $\mathbb{M}/M$ son isomorfos a subálgebras de $(C_{n,m}, \exists) = C^*_{n,m} = C^*_{n,n^r}$.

Como $\mathbb{M}$ es isomorfa a una subálgebra de $\prod_{M \in \mathbb{N}} \mathbb{M}/M$, para ver que $\mathbb{M}$ es finita es suficiente entonces probar que $\mathbb{N}$ es finito.

Es inmediato verificar que el conjunto $F(G, C^*_{n,n^r})$ de todas las funciones de G en C^*_{n,n^r} tiene la misma cardinalidad que el conjunto

$\mathrm{Hom}(\mathbb{M}, C^{*}_{n,n^r})$ de todos los homomorfismos de $\mathbb{M}$ en C^{*}_{n,n^r} (Ver I.9.3).

Por otro lado, la aplicación que asocia a cada $f \in F(G, C^{*}_{n,n^r})$ el núcleo M_f del homomorfismo extensión h_f es suryectiva, y por lo tanto, $N[\mathbb{N}] \leqslant N[F(G, C^{*}_{n,n^r})]$.

Luego $\mathbb{N}$ es finito y en consecuencia $\mathbb{M}$ es finita.

Por lo tanto
$$\mathbb{M} = \prod_{M \in \mathbb{N}} \mathbb{M}/M \quad .$$

Vamos a analizar por separado los casos n par y n impar.

<u>Primer caso : n par</u>.

Sea A_{ti} , $i = 1, 2, \ldots, s_t = \binom{\frac{n-2}{2}}{t-1}$, una subálgebra de C_n con 2t elementos, y sea B_k , $k = 1, 2, \ldots, n^r$, una subálgebra de $B(C^{*}_{n,m})$ con k átomos. Sabemos que $S(A_{ti}, B_k)$ es isomorfa a $(A^k_{ti}, \exists) = A^{*}_{ti,k}$.

Consideremos $\mathbb{N}(ti,k) = \{ M \in \mathbb{N} : \mathbb{M}/M \cong A^{*}_{ti,k} \}$

y sea $\alpha(ti,k) = N[\mathbb{N}(ti,k)]$.

Entonces
$$\mathbb{M}(r) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n^r \\ 1 \leqslant t \leqslant \frac{n}{2} \\ 1 \leqslant i \leqslant s_t}} (A^{*}_{ti,k})^{\alpha(ti,k)}$$

Queremos calcular los números $\alpha(ti,k)$.

La aplicación s que lleva cada epimorfismo h de $\mathbf{M}$ en $A^*_{ti,k}$ en su núcleo M_h es una suryección de $Epi(\mathbf{M},A^*_{ti,k})$ en $\mathbf{N}(ti,k)$; además, si $M \in \mathbf{N}(ti,k)$ y $s(h) = M$, entonces $s^{-1}(M) = \{\alpha \circ h : \alpha \in Aut(A^*_{ti,k})\}$, y por lo tanto

$$\alpha(ti,k) = \frac{N\left[Epi(\mathbf{M},A^*_{ti,k})\right]}{N\left[Aut(A^*_{ti,k})\right]} \quad .$$

Por otro lado es claro que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto $Epi(\mathbf{M},A^*_{ti,k})$ y el conjunto $F(ti,k)$ de todas las funciones f de G en $A^*_{ti,k}$ tales que $f(G)$ no está contenido en ninguna subálgebra maximal de $A^*_{ti,k}$.

Entonces $N\left[Epi(\mathbf{M},A^*_{ti,k})\right] = N\left[F(ti,k)\right]$.

Vamos a fijar el álgebra $A^*_{ti,k}$ y vamos a suprimir el índice i, escribiendo $A^*_{t,k}$ en lugar de $A^*_{ti,k}$, y $F(t,k)$ en lugar de $F(ti,k)$.

Las subálgebras maximales de $A^*_{t,k}$ son de la forma $S(A'_{tj},B_k)$, donde A'_{tj} es una subálgebra maximal de A_t, $1 \leq j \leq t-1$, o bien de la forma $S(A_t,B'_{kh})$ donde B'_{kh} es una subálgebra maximal de B_k, $1 \leq h \leq \binom{k}{2}$.
Si notamos con $G(t,k)$ el conjunto de todas las funciones de G en $A^*_{t,k}$, $G(tj,k) = \{ f \in G(t,k) : f(G) \subseteq S(A'_{tj},B_k) \}$ y

$G(t,kh) = \{ f \in G(t,k) : f(G) \subseteq S(A_t,B'_{kh}) \}$ entonces

$$F(t,k) = G(t,k) - \left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,k) \cup \bigcup_{h=1}^{\binom{k}{2}} G(t,kh) \right] .$$

Sea $\mathcal{T} = \{ 1,2,\ldots,t-1 \}$, entonces

$$N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,k) \right] = \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{T} \\ X \neq \emptyset}} (-1)^{N[X]-1} \, N\left[\bigcap_{j\in X} G(tj,k) \right] .$$

Pero

$$\bigcap_{j\in X} G(tj,k) = \left\{ f \in G(t,k) \ : \ f(G) \subseteq \bigcap_{j\in X} S(A'_{tj},B_k) = S(\bigcap_{j\in X} A'_{tj},B_k)\right\}.$$

Luego $N\left[\bigcap_{j\in X} G(tj,k)\right] = (2t - 2N[X])^{k.r}$. De donde

$$N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,k) \right] = \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{T} \\ X \neq \emptyset}} (-1)^{N[X]-1} \, (2t - 2N[X])^{k.r} =$$

$$= \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^{i} \binom{t-1}{i} (2t - 2i)^{k.r} .$$

Sea $\Delta = \left\{ 1,2,\ldots,\binom{k}{2} \right\}$, entonces

$$N\left[\bigcup_{h=1}^{\binom{k}{2}} G(t,kh) \right] = \sum_{\substack{Y \subseteq \Delta \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} \, N\left[\bigcap_{h\in Y} G(t,kh) \right] .$$

Pero $\bigcap_{h\in Y} G(t,kh) = \left\{ f \in G(t,k) \ : \ f(G) \subseteq \bigcap_{h\in Y} S(A_t,B'_{kh}) \right\} =$

$$= \{ f \in G[t,k] : f[G] \subseteq S[A_t, \bigcap_{h\in Y} B'_{kh}] \} .$$

Si con $\mu[Y]$ indicamos el número de átomos de la subálgebra $\bigcap_{h\in Y} B'_{kh}$,

entonces $S[A_t, \bigcap_{h\in Y} B'_{kh}]$ tiene $[2t]^{\mu[Y]}$ elementos, y por lo tanto

$$N\left[\bigcap_{h\in Y} G[t,kh]\right] = [2t]^{r.\mu[Y]} \quad , \; Y \neq \emptyset .$$

Luego, $$N\left[\bigcup_{h=1}^{\binom{k}{2}} G[t,kh]\right] = \sum_{\substack{Y \subseteq \Lambda \\ Y \neq \emptyset}} [-1]^{N[Y]-1} [2t]^{r.\mu[Y]} .$$

Por último,

$$N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G[tj,k] \cap \bigcup_{h=1}^{\binom{k}{2}} G[t,kh]\right] = N\left[\bigcup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant t-1 \\ 1 \leqslant h \leqslant \binom{k}{2}}} G[tj,k] \cap G[t,kh]\right] =$$

$$= \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T} \times \Lambda \\ Z \neq \emptyset}} [-1]^{N[Z]-1} N\left[\bigcap_{[j,h]\in Z} G[tj,k] \cap G[t,kh]\right] .$$

Pero $G[tj,k] \cap G[t,kh] = \{ f \in G[t,k] : f[G] \subseteq S[A'_{tj}, B_k] \cap S[A_t, B'_{kh}] \} =$

$$= \{ f \in G[t,k] : f[G] \subseteq S[A'_{tj}, B'_{kh}] \} .$$

Si Z_1 y Z_2 son las proyecciones de Z sobre $\mathcal{T}$ y Λ respectivamente, entonces

$$\bigcap_{(j,h)\in Z} G(tj,k) \cap G(t,kh) = \left\{ f \in G(t,k) \;:\; f(G) \subseteq \bigcap_{(j,h)\in Z} S(A'_{tj}, B'_{kh}) \right\} =$$

$$= \left\{ f \in G(t,k) \;:\; f(G) \subseteq S(\bigcap_{j\in Z_1} A'_{tj}, \bigcap_{h\in Z_2} B'_{kh}) \right\}$$

$$\text{y} \quad N\left[\bigcap_{(j,h)\in Z} G(tj,k) \cap G(t,kh) \right] = (2t - 2N[Z_1])^{r.\mu(Z_2)} .$$

$$\text{Luego} \quad N\left[\bigcup_{j=1}^{t-1} G(tj,k) \cap \bigcup_{h=1}^{\binom{k}{2}} G(t,kh) \right] =$$

$$= \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T}\times\Lambda \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} (2t - 2N[Z_1])^{r.\mu(Z_2)} ,$$

y por lo tanto : $N[F(t,k)] = (2t)^{r.k} -$

$$- \sum_{\substack{X \subseteq \mathcal{T} \\ X \neq \emptyset}} (-1)^{N[X]-1} (2t - 2N[X])^{r.k} - \sum_{\substack{Y \subseteq \Lambda \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} (2t)^{r.\mu(Y)} +$$

$$+ \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T}\times\Lambda \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} (2t - 2N[Z_1])^{r.\mu(Z_2)} = a(r,t,k).$$

Este número es independiente de i; luego $\alpha(ti,k) = \dfrac{a(r,t,k)}{k!}$.

Acabamos de probar que :

II.6.4. TEOREMA. <u>Si</u> n <u>es un número par, entonces</u> :

$$M(r) = \prod_{\substack{1 \leq t \leq \frac{n}{2} \\ 1 \leq k \leq n^r}} \prod_{i=1}^{\binom{\frac{n-2}{2}}{t-1}} (A^*_{ti,k})^{\frac{a(r,t,k)}{k!}}$$

En particular, se tiene :

II.6.5. COROLARIO. <u>Si</u> n <u>es par</u>

$$N\left[M(r)\right] = \prod_{\substack{1 \leq t \leq \frac{n}{2} \\ 1 \leq k \leq n^r}} \left((2t)^k\right)^{\binom{\frac{n-2}{2}}{t-1}\frac{a(r,t,k)}{k!}}$$

<u>Segundo caso : n impar</u>.

Sea A_s una subálgebra de C_n con s elementos, $2 \leq s \leq n$, y k tal que $1 \leq k \leq n^r$.

Sea $F(s,k)$ el conjunto de todas las funciones de G en $C^*_{n,m}$ tales que la subálgebra generada por f(G) es $S(A_s,B_k) = A^*_{s,k}$; se trata de calcular $\alpha(s,k) = N\left[F(s,k)\right]$.

Para ello vamos a considerar por separado los casos s par y s impar.

<u>Caso a) : s par</u>.

Si $s = 2t$, $1 \leqslant t \leqslant \frac{n-1}{2}$, con un razonamiento similar al anterior se tendrá : $N[F(2t,k)] = a(r,t,k)$.

Caso b) : s impar.

Sea $s = 2t + 1$, $1 \leqslant t \leqslant \frac{n-1}{2}$. Sabemos que hay $\binom{\frac{n-3}{2}}{t-1}$ subálgebras de C_n con s elementos, que indicaremos $A_{si} = A_{(2t+1)i} = A_{ti}$.

Para cada k, $1 \leqslant k \leqslant n^r$, sea $S(A_{ti},k) = A^*_{ti,k}$ la correspondiente subálgebra de C^*_{n,n^r} .

Si $\mathbb{N}(ti,k) = \{ M \in \mathbb{N} : \mathbb{M}/M = A^*_{ti,k} \}$, se trata de determinar $\alpha(ti,k) = N[\mathbb{N}(ti,k)]$.

Supondremos i fijo y escribiremos $A^*_{t,k}$ y $\alpha(t,k)$.

Sea F(t,k) el conjunto de todas las funciones f de G en $A^*_{t,k}$ tales que la subálgebra generada por f(G) es $A^*_{t,k}$.

Sabemos que A_t contiene t subálgebras maximales, una con 2t elementos, que notaremos A'_{to} , y el resto con 2t - 1 elementos, que notaremos A'_{tj} , $j = 1,2,\ldots,t-1$.

Recordemos también que si $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leqslant t-1$, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, entonces $N[A'_{tj_1} \cap A'_{tj_2} \cap \ldots \cap A'_{tj_i}] = 2t + 1 - 2i$, y

$$N[A'_{to} \cap A'_{tj_1} \cap \ldots \cap A'_{tj_i}] = 2t - 2i \quad \text{(Ver p. 60).}$$

Sean $S(A'_{tj},B_k)$, $0 \leqslant j \leqslant t-1$, y $S(A_t,B'_{kh})$, $1 \leqslant h \leqslant \binom{k}{2}$ las subálgebras maximales de $A^*_{t,k}$.

Si $G(t,k)$ es el conjunto de todas las funciones de G en $A^*_{t,k}$ y $G(tj,k)$ y $G(t,kh)$ los conjuntos definidos como en la página 104,

$$\text{entonces} \quad F(t,k) = G(t,k) - \left[\bigcup_{j=0}^{t-1} G(tj,k) \cup \bigcup_{h=1}^{\binom{k}{2}} G(t,kh) \right] .$$

Razonando como en casos anteriores se obtiene :

$$N^*_1 = N\left[\bigcup_{j=0}^{t-1} G(tj,k) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{t-1} (-1)^{i-1} \binom{t-1}{i} (2t+1-2i)^{r.k} + \sum_{1=0}^{t-1} (-1)^i \binom{t-1}{i} (2t-2i)^{r.k}$$

$$\text{y } N^*_2 = N\left[\bigcup_{h=1}^{\binom{k}{2}} G(t,kh) \right] = \sum_{\substack{Y \subseteq \Lambda \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} \, N\left[\bigcap_{h \in Y} G(t,kh) \right] =$$

$$= \sum_{\substack{Y \subseteq \Lambda \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} (2t+1)^{r.\mu(Y)} .$$

Sea $\mathcal{T}_o = \{0,1,\ldots,t-1\} = \{0\} \cup \mathcal{T}$, entonces :

$$N^*_3 = N\left[\bigcup_{j=0}^{t-1} G(tj,k) \cap \bigcup_{h=1}^{\binom{k}{2}} G(t,kh) \right] = N\left[\bigcup_{(j,h) \in \mathcal{T}_o \times \Lambda} G(tj,k) \cap G(t,kh) \right] =$$

$$= N\left[\bigcup_{h \in \Lambda} G(to,k) \cap G(t,kh) \cup \bigcup_{(j,h) \in \mathcal{T} \times \Lambda} G(tj,k) \cap G(t,kh) \right] =$$

$$= N\left[\bigcup_{h\in\Lambda} G(to,k) \cap G(t,kh)\right] + N\left[\bigcup_{(j,h)\in \mathcal{T}\times\Lambda} G(tj,k) \cap G(t,kh)\right] -$$

$$- N\left[\bigcup_{h\in\Lambda} G(to,k) \cap G(t,kh) \cap \bigcup_{(j,h)\in \mathcal{T}\times\Lambda} G(tj,k) \cap G(t,kh)\right] =$$

$$= \sum_{\substack{Y \subseteq \Lambda \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} N\left[\bigcap_{h\in Y} G(to,k) \cap G(t,kh)\right] +$$

$$+ \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T}\times\Lambda \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} N\left[\bigcap_{(j,h)\in Z} G(tj,k) \cap G(t,kh)\right] -$$

$$- N\left[\bigcup_{(j,h)\in \mathcal{T}\times\Lambda} G(to,k) \cap G(tj,k) \cap G(t,kh)\right] =$$

$$= \sum_{\substack{Y \subseteq \Lambda \\ Y \neq \emptyset}} (-1)^{N[Y]-1} (2t)^{r.\mu(Y)} +$$

$$+ \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T}\times\Lambda \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} (2t + 1 - 2N[Z_1])^{r.\mu(Z_2)} -$$

$$- \sum_{\substack{Z \subseteq \mathcal{T}\times\Lambda \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{N[Z]-1} (2t - 2N[Z_1])^{r.\mu(Z_2)} .$$

Entonces, si $b(r,t,k) = (2t + 1)^{r.k} - N_1^* - N_2^* + N_3^*$, se tiene que

$\alpha(t,k) = \dfrac{b(r,t,k)}{k!}$ que es independiente de i.

Luego :

II.6.6. TEOREMA. Si n es impar

$$\mathbf{M}(r) = \prod_{\substack{1 \leq t \leq \frac{n-1}{2} \\ 1 \leq k \leq n^r}} \prod_{i=1}^{\binom{\frac{n-3}{2}}{t-1}} (A^{*}_{(2t)i,k})^{\frac{a(r,t,k)}{k!}} \times (A^{*}_{(2t+1)i,k})^{\frac{b(r,t,k)}{k!}} .$$

Se puede calcular fácilmente el número de elementos del álgebra $\mathbf{M}(r)$ para n impar, a partir del resultado anterior.

II.6.7. EJEMPLO. Calculemos el álgebra de Lukasiewicz trivalente monádica con un generador libre, esto es, $n = 3$ y $r = 1$.

Entonces $C_3 = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$. La única subálgebra de C_3 con un número par de elementos es $A_2 = \left\{ 0, 1 \right\}$, ($A_{2t}$, con $t = 1$).

Por lo tanto se tienen las siguientes subálgebras de $C^{*}_{n,n^r} = C^{*}_{3,3}$:

$S(A_2,B_1) = A^{*}_{2,1}$; $S(A_2,B_2) = A^{*}_{2,2}$; $S(A_2,B_3) = A^{*}_{2,3}$.

Calculemos los correspondientes números $a(r,t,k)$:

Para $A^{*}_{2,1}$: $a(1,1,1) = 2$ $\qquad$ ($\mathcal{T} = \emptyset$, $\Lambda = \emptyset$).

Para $A^{*}_{2,2}$: $a(1,1,2) = 2^2 - 2 = 2$ $\qquad$ ($\mathcal{T} = \emptyset$, $\Lambda = \{1\}$)

Para $A^{*}_{2,3}$: $a(1,1,3) = 2^3 - 3.2^2 + 3.2^1 - 2^1 = 0$ ($\mathcal{T} = \emptyset$, $\Lambda = \{1,2,3\}$)

La única subálgebra de C_3 con un número impar de elementos es

$A_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ (A_{2t+1} , con $t = 1$).

Para $k = 1,2,3$ se tienen las siguientes subálgebras de $C^*_{3,3}$:
$S(A_3,B_k) = A^*_{3,k}$. Los correspondientes números $b(r,t,k)$ son :

Para $A^*_{3,1}$: $b(1,1,1) = 3 - 2 = 1$ $\quad$ ($\mathcal{T}' = \{0\}$, $\Lambda = \{1\}$).

Para $A^*_{3,2}$: $b(1,1,2) = 3^2 - 2^2 - 3 + 2 = 4$ $\quad$ ($\mathcal{T}' = \{0\}$, $\Lambda = \{1\}$).

Para $A^*_{3,3}$: $b(1,1,3) = 3^3 - 2^3 - 3.3^2 + 3.3^1 - 3^1 + 3.2^2 - 3.2^1 +$
$+ 2^1 = 6$ $\quad$ ($\mathcal{T}' = \{0\}$, $\Lambda = \{1,2,3\}$).

Entonces $\quad M(1) = (A^*_{2,1})^2 \times A^*_{2,2} \times A^*_{3,1} \times (A^*_{3,2})^2 \times A^*_{3,3}$ $\quad$ (#)

En (39), L. Monteiro , con la notación $B = \{0,1\}$, $T = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$,

obtuvo : $\quad M(1) = (B^1)^{\binom{2}{1}} \times (B^2)^{\binom{2}{2}} \times (T^1)^{\binom{3}{1} - \binom{2}{1}} \times (T^2)^{\binom{3}{2} - \binom{2}{2}} \times (T^3)^{\binom{3}{3}} =$

$$= B^2 \times (B^2)^1 \times T \times (T^2)^2 \times (T^3)^1$$

lo que coincide con (#).

II.7. RELACION ENTRE LAS ESTRUCTURAS CICLICA Y MONADICA DE UN ALGEBRA DE LUKASIEWICZ n-VALENTE.

Vamos a probar en este párrafo que en toda álgebra de Lukasiewicz cíclica es posible definir una estructura de álgebra de Lukasiewicz monádica. Veremos también que las álgebras de Lukasiewicz monádicas finitas pueden ser transformadas en álgebras de Lukasiewicz cíclicas.

Sea (A,T) un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica, y para $x \in A$, definamos

$$\exists x = x \vee Tx \vee \ldots \vee T^{k-1}x.$$

II.7.1. TEOREMA. <u>El sistema</u> $(A, \exists)$ <u>es un álgebra de Lukasiewicz monádica</u>.

<u>Demostración</u>. E0 y E1 resultan en forma inmediata. Probemos que se verifican E2 y E3. Como $T\exists x = \exists x$, entonces

$$\exists(x \wedge \exists y) = (x \wedge \exists y) \vee T(x \wedge \exists y) \vee \ldots \vee T^{k-1}(x \wedge \exists y) =$$

$$= (x \wedge \exists y) \vee (Tx \wedge \exists y) \vee \ldots \vee (T^{k-1}x \wedge \exists y) =$$

$$= (x \vee Tx \vee \ldots \vee T^{k-1}x) \wedge \exists y = \exists x \wedge \exists y.$$

Finalmente, $\exists s_i x = s_i x \vee Ts_i x \vee \ldots \vee T^{k-1}s_i x =$

$$= s_i(x \vee Tx \vee \ldots \vee T^{k-1}x) = s_i\exists x.$$

Recíprocamente, supongamos que $(A, \exists)$ es un álgebra de Lukasiewicz n-valente monádica finita, y consideremos el álgebra de Boole

$B[A] \cap K[A]$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_r$ los átomos de $B[A] \cap K[A]$. Para cada i, $1 \leqslant i \leqslant r$, sea P_i el conjunto de los elementos primos de A que preceden a a_i.

II.7.2. LEMA. <u>Los conjuntos</u> $P_1, P_2, \ldots, P_r$ <u>determinan una partición del conjunto</u> X <u>de los elementos primos de</u> A.

<u>Demostración</u>. Es claro que $P_i \neq \emptyset$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant r$, y que los conjuntos $P_1, P_2, \ldots, P_r$ son disjuntos dos a dos. Además $X = \bigcup_{i=1}^{r} P_i$.

En efecto, basta ver que si $p \in X$, existe un átomo a del álgebra de Boole $B[A] \cap K[A]$ tal que $p \leqslant a$. Pero de $0 \neq p \leqslant \exists p \leqslant s_{n-1}\exists p$ resulta $s_{n-1}\exists p \neq 0$, y además $s_{n-1}\exists p \in B[A] \cap K[A]$. Luego existen átomos $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ de $B[A] \cap K[A]$ tales que $s_{n-1}\exists p = \bigvee_{j=1}^{t} a_{i_j}$.

Luego $p \leqslant \bigvee_{j=1}^{t} a_{i_j}$, y como p es primo, $p \leqslant a_{i_j}$ para algún j.

Como consecuencia de lo observado en II.5, se tiene que para cada i, $1 \leqslant i \leqslant r$, P_i es una suma cardinal de cadenas $\{C_t^i\}_{1 \leqslant t \leqslant \alpha_i}$, todas de la misma longitud $s = s(i)$: $P_i = \sum_{t=1}^{\alpha_i} C_t^i$.

Si $C_t^i = \{p_{t1}^i, p_{t2}^i, \ldots, p_{ts(i)}^i\}$ con $p_{t1}^i < p_{t2}^i < \ldots < p_{ts(i)}^i$, definiendo $h_i : P_i \longrightarrow P_i$ por $h_i(p^i_{tj}) = \begin{cases} p^i_{t+1,j} & \text{si } 1 \leqslant t < \alpha_i \\ p^i_{1j} & \text{si } t = \alpha_i \end{cases}$,

es claro que h_i es un isomorfismo de orden.

Además h_i conmuta con los operadores s_j y con la transformación φ.

Sobre el conjunto $X = P_1 + P_2 + \ldots + P_r$ podemos definir una aplicación $h : X \longrightarrow X$ del siguiente modo : $h(p) = h_i(p)$, si $p \in P_i$.

Entonces h es claramente un isomorfismo de orden del conjunto ordenado X, que respeta los operadores s_j y la transformación φ.

Si $x \in A$, y $x = \bigvee \{ p : p \leqslant x, p \in X \}$, vamos a definir

$$Tx = \bigvee \{ h(p) : p \leqslant x, p \in X \} .$$

II.7.3. TEOREMA. <u>El sistema</u> (A,T) <u>es un álgebra de Lukasiewicz k-cíclica</u>.

<u>Demostración</u>. Es sabido que T es un automorfismo de reticulados tal que $Tp = h(p)$ si $p \in X$. Además $T(\sim x) = \sim T(x)$. Esto resulta del teorema 3.4 de (42), cuya demostración adaptamos a nuestro caso.

En efecto, sabemos que $\sim x = \bigvee \{ p : p \in X, \varphi(p) \nleqslant x \}$. Entonces

$$T(\sim x) = T(\bigvee \{ p : p \in X, \varphi(p) \nleqslant x \}) = \bigvee \{ T(p) : p \in X, \varphi(p) \nleqslant x \} =$$
$$= \bigvee \{ h(p) : p \in X, \varphi(p) \nleqslant x \} .$$

Por otro lado, $\sim T(x) = \bigvee \{ p : p \in X, \varphi(p) \nleqslant Tx \}$. Para probar entonces que $T[\sim x] = \sim T[x]$ necesitamos probar que los conjuntos

$\Pi_1 = \{ h[p] : p \in X, \varphi[p] \not\leq x \}$ y $\Pi_2 = \{ p : p \in X, \varphi[p] \not\leq T[x] \}$

son iguales.

Sea $\alpha \in \Pi_1$, esto es, $\alpha = h[p]$, $p \in X, \varphi[p] \not\leq x$.

De $\varphi[p] \not\leq x$ resulta que $\varphi[p]$ no precede a ninguno de los elementos primos que preceden a x, esto es, $\varphi[p] \not\leq q$ si $q \leq x$, $q \in X$ [*], luego $h[\varphi[p]] \not\leq h[q]$, o sea, $\varphi[h[p]] \not\leq h[q]$, si $q \leq x$.

$T[x] = T[\bigvee \{ q : q \in X, q \leq x\}] = \bigvee \{T[q] : q \in X, q \leq x \} =$

$= \bigvee \{ h[q] : q \in X, q \leq x \}$ y entonces si $\varphi[h[p]] \leq T[x]$, como $\varphi[h[p]]$ es primo, existe q_o tal que $\varphi[h[p]] \leq h[q_o]$, $q_o \in X$, $q_o \leq x$. Luego $h[\varphi[p]] \leq h[q_o]$ y por consiguiente $\varphi[p] \leq q_o$, lo que contradice [*].

Luego $\varphi[\alpha] = \varphi[h[p]] \not\leq T[x]$. Por lo tanto $\alpha \in \Pi_2$.

Recíprocamente, sea $p \in \Pi_2$, esto es, $p \in X$ y $\varphi[p] \not\leq T[x]$.

Como h es un isomorfismo, existe $q \in X$ tal que $h[q] = p$, de donde $\varphi[h[q]] \not\leq T[x]$, esto es, $h[\varphi[q]] \not\leq T[x]$. Si fuese $\varphi[p] \leq x$, entonces $T[\varphi[p]] \leq T[x]$ y como $\varphi[p] \in X$ entonces $h[\varphi[p]] \leq T[x]$, lo que es una contradicción.

Por último, $T[s_i x] = s_i T[x]$. En efecto, esto resulta porque T coincide con h sobre el conjunto de los elementos primos y teniendo en cuenta que los s_i y T respetan el supremo.

Es claro que $h_i^{\alpha_i} = Id.$, $1 \leq i \leq r$, y por lo tanto, $T^k = Id.$, donde

$k = \bigvee_{i=1}^{r} \alpha_i$ y $\bigvee$ indica el mínimo común múltiplo de los α_i. Luego (A,T) es un álgebra de Lukasiewicz n-valente k-cíclica.

A partir de esta álgebra (A,T) es posible recuperar la estructura monádica original, esto es, si sobre (A,T) definimos ahora

$$\tilde{\exists} x = x \vee Tx \vee \ldots \vee T^{k-1}x$$

entonces $\tilde{\exists} x = \exists x$.

En efecto, si $P_i = C_1^i + C_2^i + \ldots + C_{\alpha_i}^i$, donde $C_t^i = \{ p_{t1}^i, \ldots, p_{ts(i)}^i \}$ con $p_{t1}^i < p_{t2}^i < \ldots < p_{ts(i)}^i$, sabemos que $\exists p_{tj}^i = \bigvee_{t=1}^{\alpha_i} p_{tj}^i$.

Ahora bien, para cada t, $\{ p_{tj}^i , Tp_{tj}^i , T^2 p_{tj}^i , \ldots , T^{k-1} p_{tj}^i \}$ es una permutación de $\{ p_{1j}^i , p_{2j}^i , \ldots , p_{\alpha_i j}^i$, luego resulta claro que $\tilde{\exists} p_{tj}^i = p_{tj}^i \vee Tp_{tj}^i \vee \ldots \vee T^{k-1} p_{tj}^i = p_{1j}^i \vee p_{2j}^i \vee \ldots \vee p_{\alpha_i j}^i =$

$= \exists p_{tj}^i$.

Por consiguiente, como los operadores $\tilde{\exists}$ y $\exists$ coinciden sobre el conjunto de elementos primos de A, resulta que $\tilde{\exists} x = \exists x$, cualquiera que sea x perteneciente a A.

Sin embargo, si partimos de un álgebra de Lukasiewicz k-cíclica (A,T) y construímos el álgebra de Lukasiewicz monádica $(A, \exists)$, y a partir de ésta construímos el álgebra de Lukasiewicz k-cíclica

[A,T'], en general $T \neq T'$. Pero se puede ver fácilmente que existe $\alpha \in Aut[A]$ tal que $T' = \alpha \circ T$, siendo α una adecuada permutación de las cadenas de cada P_i.

REFERENCIAS

[1] ABAD,M., Cyclic Post algebras of order n, An. Acad. brasil. Ciênc., [1981], 53[2], 243-246.

[2] ABAD,M., Three-valued Lukasiewicz algebras with an additional operation, Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol.32 [1985], 107-117.

[3] ABAD,M. and MONTEIRO,L., Free symmetric Boolean algebras, Revista de Unión Matemática Argentina, Vol.27[1976], 207-215.

[4] BALBES,R. and DWINGER,P., Distributive lattices, University of Missouri Press, Columbia, Mo.,[1974].

[5] BASS,H., Finite monadic algebras, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.9[1958], 258-268.

[6] BIALINICKI-BIRULA,A., Remarks on Quasi-Boolean algebras, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl.III, 5[1957], 615-619.

[7] BIALINICKI-BIRULA,A. and RASIOWA,H., On the representation of Quasi-Boolean algebras, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl.III, 5[1957], 259-261.

[8] BIALINICKI-BIRULA,A. and RASIOWA,H., On constructible falsity in the constructive logic with strong negation, Colloq. Math., 6[1958], 287-310.

[9] BIRKHOFF,G., Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., 25, 3rd ed., Providence, [1967].

[10] CIGNOLI,R., Boolean multiplicative closures, I & II, Proc. Japan Acad., 42[1965], 1168-1174.

[11] CIGNOLI,R., Moisil algebras, Notas de Lógica Matemática 27, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, [1970].

[12] CIGNOLI,R., Stone filters and ideals in distributive lattices, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie, 15 [1971], 131-137.

[13] CIGNOLI,R. and MONTEIRO,A., Boolean elements in Lukasiewicz algebras, II, Proc. Japan Acad., 41[1965], 676-680.

[14] EPSTEIN,G., The lattice theory of Post algebras, Trans.Amer. Math.Soc., 95[1960], 300-317.

[15] HALMOS,P., Algebraic logic I. Monadic Boolean algebras. Compositio Mathematica, Vol.12[1955], 217-249.

[16] HALMOS,P., The representation of monadic Boolean algebras, Duke Mathematical Journal, 26[1959], 447-454.

[17] HALMOS,P., Algebraic logic, Chelsea, New York [1962].

[18] ITURRIOZ,L., Lukasiewicz and symmetrical Heyting algebras, Z.Math.Logik Grundlagen Math., 23[1977], 131-136.

[19] KALMAN,J.A., Lattices with involution, Trans.Am.Math.Soc., 87[1958], 485-491.

[20] LEE,S.C. and KEREN-ZVI,Y., A generalized Boolean algebra and its application to logic design, Proceedings of the 1975 International Symposium on Multiple-Valued Logic, Indiana University, Bloomington.

[21] MOISIL,Gr.C., Recherches sur l'algèbre de la logique, Ann. Sci.Univ.Jassy, 22[1935], 1-117.

[22] MOISIL,Gr.C., Recherches sur les logiques non-chrysippiennes,

Ann.Sci.Univ.Jassy, 26(1940), 431-436.

[23] MOISIL,Gr.C., Notes sur les logiques non-chrysippiennes, Ann.Sci.Univ.Jassy, 27(1941), 86-98.

[24] MOISIL,Gr.C., Algebra schemelor cu elemente ventil, Revista Universităţii "C.I.Parhon" şi a Politehnicii Bucareşti,4-5, 9(1954). Una traducción de una parte de este artículo figura en [27], páginas 143-147 y 694-696.

[25] MOISIL,Gr.C., Le algebre di Lukasiewicz, Acta Logica, Bucharest, 6(1963), 97-135.

[26] MOISIL,Gr.C., Sur les logiques de Lukasiewicz a un nombre fini de valeurs, Rev.Roum.Math.Pures et Appl., 9(1964), 905-920.

[27] MOISIL,Gr.C., Essais sur les logiques non-chrysippiennes, Ed. Academici Bucarest, (1972).

[28] MONTEIRO,A., Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositional classique, An.Acad.brasil.Ciênc. 32 (1960), 1-7.

[29] MONTEIRO,A., Algebras de Lukasiewicz trivalentes, curso dictado en la Univ.Nac. del Sur, Bahía Blanca,(1963).

[30] MONTEIRO,A., Algebras de Boole involutivas, Rev.de la Unión Mat. Arg., Vol.XXIII,1(1966), p.39.

[31] MONTEIRO,A., Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques, Math. Japon. 12(1967), 1-23.

[32] MONTEIRO,A., La semi-simplicité des algèbres de Boole Topolo-

giques, Rev. de la Unión Mat. Arg., 25(1971), 417-448.

[33] MONTEIRO,A., L'Arithmetique des filtres et les espaces topologiques I-II, Notas de Lógica Matemática 30, Univ.Nac.del Sur, Bahía Blanca (1974).

[34] MONTEIRO,A., Algèbres de Boole Cycliques, Rev.Roum.Math. Pures et Appl., Tome XXIII, 1(1978), 71-76.

[35] MONTEIRO,A., Sur les algèbres de Heyting simétriques, Portugaliae Math.,Vol.39, 1-4(1980), 1-237.

[36] MONTEIRO,A. et RIBEIRO,H., L'Opération de fermeture et ses invariants dans les systèmes partiellement ordonnés, Portugaliae Math., 3(1942), 171-184.

[37] MONTEIRO,L., Sur les algèbres de Heyting trivalentes, Notas de Lógica Matemática 19, Univ.Nac.del Sur, Bahía Blanca(1964).

[38] MONTEIRO,L., Algebras de Lukasiewicz monádicas, Rev. de la Unión Mat. Argentina 23, 4(1968), p.200.

[39] MONTEIRO,L., Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas, Notas de Lógica Matemática 32, Univ.Nac.del Sur, Bahía Blanca (1974).

[40] MONTEIRO,L., Algèbres de Post et de Moisil trivalentes monadiques libres, Logique et Analyse, 79(1977),329-337.

[41] MONTEIRO,L., Algèbres de Boole monadiques libres, Algebra Universalis, 8(1978), 374-380.

[42] MONTEIRO,L., M-algèbres de Kleene, An.Acad.brasil.Ciênc., (1981), 53(4), 665-672.

[43] RASIOWA,H., An algebraic approach to non-classical logics, North-Holland, Amsterdam,(1974).

[44] RASIOWA,H. and SIKORSKI,R., The Mathematics of Metamathematics, Monografie Matematyzne, Tom 41, Warszawa [1963].

[45] SICOE,C.O., Sur les idéaux des algebres Lukasiewicziennes polivalentes, Rev.Roum.Math.Pures et Appl.,12[1967],391-401.

[46] SICOE,C.O., On many-valued Lukasiewicz algebras, Proc.Japan Acad., 43[1967], 725-728.

[47] SICOE,C.O., Sur la définition des algèbres Lukasiewicziennes polyvalentes, Rev.Roum.Math.Pures et Appl.,13[1968],1027-1030.

[48] TRACZYK,T., Axioms and some properties of Post algebras, Colloquium Mathematicum, 10[1963], 193-209.

[49] TRACZYK,T., Post algebras through P_0 and P_1 lattices, Computer science and multiple-valued logic. Edited by David C.Rine, North-Holland, Amsterdam, [1977], 115-136.

[50] VARSAVSKY,O., Quantifiers and equivalence relations, Revista Matemática Cuyana 2[1956], 29-51.

[51] VARLET,J.C., Algèbres de Lukasiewicz trivalentes, Bull.Soc. Roy.Sc.Liège, 9-10[1968], 281-290.