ISSN 0078 - 2017

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

40

UNPUBLISHED PAPERS, I

A. Monteiro

1996
INMABB - CONICET
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA (*)

N^o 40

UNPUBLISHED PAPERS, I

A. MONTEIRO

INMABB - CONICET
1996
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) *La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.*

Hace 40 años, en febrero de 1956, fue creado el Departamento de Matemática en la Universidad Nacional del Sur.

Un año después, en julio de 1957, fue contratado el Dr. Antonio A. R. Monteiro (1907-1980) para organizar y dirigir el Instituto de Matemática que ese año había sido incorporado a la estructura académica de la Universidad Nacional del Sur.

Este instituto fue creado con el propósito de desarrollar la investigación matemática y formar investigadores en esta universidad. Por estas razones uno de los mayores esfuerzos del Dr. A. Monteiro se concentró en formar una biblioteca especializada en el ámbito de este Instituto. Para concretar estos fines el Dr. A. Monteiro comienza a editar las Publicaciones del Instituto de Matemática: Notas de Lógica Matemática, Notas de Álgebra y Análisis, Monografías de Matemática. Estas publicaciones permitieron establecer un sistema de canje con instituciones nacionales y extranjeras afines. Con los años este sistema ha permitido mantener actualizada, en parte, una de las bibliotecas más importantes del país en su especialidad.

El Dr. Antonio Monteiro fue exonerado, injustificadamente, en 1975 cuando ocupaba el cargo de Profesor Emérito. Las autoridades que en aquel entonces dirigían la Universidad le prohibieron la entrada a esta casa.

El Dr. A. Monteiro falleció el 29 de octubre de 1980, en Bahía Blanca, sin haber podido reingresar a la biblioteca que él había creado.

Tres años después, en 1983, el Dr. Rafael Panzone, Director del INMABB, le impuso a la biblioteca del instituto el nombre de su fundador.

En el año 1994, el entonces Director del INMABB, Dr. Luiz F. Monteiro, se propuso redactar y publicar en una colección de difusión interna todos los trabajos inéditos de su querido padre y maestro. Para lograr este objetivo contó con la colaboración de algunos de los ex discípulos del Dr. Antonio Monteiro y de jóvenes graduados que actualmente trabajan en esa línea de investigación.

Hasta el momento se han redactado siete trabajos que son los presentados en este volumen de Notas de Lógica matemática. Más adelante se publicará otro volumen.

Mg. Aurora V. Germani
Vice-Directora a cargo Dirección
INMABB - CONICET - UNS
Marzo, 1996

1) *Les algèbres de Tarski avec un nombre fini de générateurs libres*, A. Monteiro et L. Iturrioz, Informes Técnicos Internos 37, (1994), 1-7.

2) *Construction des algèbres de Boole libres dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes libres*, A. Monteiro, Informes Técnicos Internos 42, (1995), 1-9.

3) *Représentation d'une algèbre de Łukasiewicz trivalente par une algèbre de Łukasiewicz trivalente d'ensembles. Caractère universel de la construction $\mathcal{L}$ des algèbres de Łukasiewicz trivalentes libres*, A. Monteiro, Informes Técnicos Internos 45, (1955), 1-29.

4) *Axiomes indépendants pour les algèbre de Nelson, de Łukasiewicz trivalentes, de De Morgan et de Kleene*, A. Monteiro et L. Monteiro, Informes Técnicos Internos 47, (1995), 1-11.

5) *Algèbres de Stone libres*, A. Monteiro et L. Monteiro, Informes Técnicos Internos 49, (1995), 1-17.

6) *Les algèbres de Nelson semi-simples*, A. Monteiro, Informes Técnicos Internos 50 (1995), 1-16.

7) *Algèbres de Hilbert linéaires*, A. Monteiro, Informes Técnicos Internos 52, (1996), 1-14.

Les Algèbres de Tarski avec un nombre fini de générateurs libres

A. MONTEIRO et L. ITURRIOZ

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1994

El Dr. Antonio A. R. Monteiro (1907-1980) fué el fundador y organizador del Institúto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.
En el mismo inició las Notas de Lógica Matemática, Notas de Algebra y Análisis, Monografías de Matemática, y fundó y organizó su Biblioteca, que desde 1983, lleva su nombre.
El Dr. A. Monteiro fue dejado cesante, en 1975, sin ningún tipo de cargo, por las entonces autoridades de la Universidad Nacional del Sur, cuando ocupaba el cargo de Profesor Emérito, y le prohibieron la entrada a la Biblioteca que había formado y a la que tantos esfuerzos personales había dedicado.
El Dr. A. Monteiro falleció el 29 de octubre de 1980, en Bahía Blanca, Argentina, con la inmensa amargura de no haber podido reingresar a la Biblioteca que había creado.

Como dijera el Dr. Roberto Cignoli, en un acto de homenaje al Dr. A. Monteiro *"Usually, he just published short summaries or abstracts of his main results. The details as well the underlying ideas of his work were given in his courses and seminars, and they are dispersed in the notes taken by his students."*, Fifth Latin American Symposium on Mathematical Logic, Colombia 1981, (Revista Colombiana de Matemática, Vol. XIX, nros. 1-2, 1985, páginas 1 a 8).

Es nuestra intención redactar y publicar todos los trabajos que se encuentran en notas escritas de su puño y letra, algunos incompletos, como un homenaje a nuestro querido Maestro.

A medida que vayamos redactando sus trabajos, los publicaremos en esta colección, y cuando terminemos con esta tarea, trataremos de editar un volumen de las Notas de Lógica Matemática, que contenga todos sus trabajos que no fueron publicados.

En la redacción, dactilografiado, revisión y corrección, del siguiente trabajo, han colaborado los siguientes ex-díscipulos: Dres. Manuel Abad, Roberto Cignoli, Luiz F. Monteiro, y además la Lic. Sonia Savini y el Lic. Julio Sewald.

Dr. Luiz F. Monteiro
Director
INMABB-UNS-CONICET
Octubre, 1994

Les Algèbres de Tarski avec un nombre fini de générateurs libres

Antonio Monteiro et Luisa Iturrioz

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1965

Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Soit $A = 2^E$ la famille de toutes les parties d'un ensemble donné E et considérons l'opération binaire $\rightarrow$ définie sur A au moyen de la formule :

$$X \rightarrow Y = \mathcal{C}X \cup Y$$

(où $\mathcal{C}$ représente le complément de X par rapport à E et $\cup$ l'opération de réunion d'ensembles). Dans ces conditions le système $(A, \rightarrow)$ est une *algèbre*. Une *sous-algèbre* de A est une partie non-vide, A' de A telle que: si $X, Y \in A'$ alors $X \rightarrow Y \in A'$. Si $\mathcal{G}$ est une partie de A, la *sous-algèbre engendreé* par $\mathcal{G}$ est l'intersection $S(\mathcal{G})$ de toutes les sous-algèbres de A qui contient $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est une partie finie de A:

$$\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$$

il est bien connu que $S_n = S(\mathcal{G})$ est un ensemble fini et que le nombre de ses éléments $N(S_n)$ vérifie la condition:

$$N(S_n) < 2^{2^n}.$$

Nous nous proposons dans cette note, de déterminer le nombre maximun N, d'éléments qui peut avoir l'algèbre engendré par un nombre fini de sous-ensembles $G_1, G_2, \ldots, G_n$, d'un ensemble arbitraire E.

Nous voulons démontrer ici, que:

$$N = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}.$$

Un problème complètement analogue est celui qu'on obtient en remplaçant l'opération d'implication par celle de différence, définie au moyen de la formule:

$$X - Y = X \cap \mathcal{C}Y.$$

Nous montrerons que N est le nombre de formules logiquement distincts qu'on peut obtenir dans le calcul propositionnel implicatif classique, avec n variables propositionnelles, ou ce qui est équivalent, que N est le nombre d'éléments de l'algèbre de Tarski avec n générateurs libres [4].

2 Les algèbres de Tarski

Nous allons reproduire dans ce paragraphe un certain nombre de notions et de résultats qui ont été exposés par A. Monteiro, pendant le premier semestre de 1960, [5] et qui ont un rapport direct avec le problème que nous étudions ici.

Définition 2.1 *Soit $(A, \rightarrow, 1)$ un système formé par un ensemble non vide A, une opération binaire $\rightarrow$ définie sur A, et $1 \in A$, qui vérifie les axiomes suivants:*

T1) $1 \rightarrow a = a$.

T2) $a \rightarrow a = 1$.

T3) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$.

T4) $(a \rightarrow b) \rightarrow b = (b \rightarrow a) \rightarrow a$.

Nous dirons alors que A est une algèbre de Tarski [1], [2], [6].

Parmi les règles de calcul valables, nous pouvons indiquer les suivants:

H1) $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$.

H2) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$.

H3) $a \rightarrow 1 = 1$.

H4) Si $a \rightarrow b = 1$ et $b \rightarrow a = 1$, alors $a = b$.

Nous pouvons donc affirmer que A est un modèle implicatif au sens de L. Henkin, [3].

Définition 2.2 *Nous écrirons $a \leq b$, pour indiquer que $a \rightarrow b = 1$.* [3].

Théorème 2.1 *La relation $\leq$ est une relation d'ordre, et $x \leq 1$, pour tout $x \in A$.* [3].

Théorème 2.2 *Une algèbre de Tarski A est un ensemble réticulé superiéurement. Plus précisement, si $a, b \in A$, alors:*

$$a \vee b = (a \rightarrow b) \rightarrow b.$$

Théorème 2.3 *Si A est une algèbre de Tarski avec un premier élément 0, alors A est une algèbre de Boole, par rapport à la relation d'ordre $\leq$ indiqué dans le théorème 2.1. Le complément de $a \in A$ est donné par la formule $-a = a \to 0$.*

Corollaire 2.1 *Si A est une algèbre de Tarski, et $a \in A$, alors l'ensemble $D(a) = \{x \in A : a \leq x\}$ est une algèbre de Boole.*

D'autres règles de calcul valables dans une algèbre de Tarski, sont:

T5) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$. (loi de commutation)

T6) $b \leq a \to b$.

T7) $a \vee (b \to c) = (a \vee b) \to (a \vee c)$.

En effet, soit

$$z = (a \vee b) \to (a \vee c).$$

D'après le théorème 2.2,

$$z = ((b \to a) \to a) \to ((c \to a) \to a).$$

D'après T5,

$$z = (c \to a) \to (((b \to a) \to a) \to a) = (c \to a) \to ((b \to a) \vee a).$$

En vertu de T6,

$$z = (c \to a) \to (b \to a),$$

et d'après T5,

$$z = b \to ((c \to a) \to a),$$

et selon T3,

$$z = (b \to (c \to a)) \to (b \to a) = ((b \to c) \to (b \to a)) \to (b \to a),$$

et d'après le théorème 2.2 et T3,

$$z = (b \to c) \vee (b \to a) = (b \to a) \vee (b \to c) =$$
$$((b \to a) \to (b \to c)) \to (b \to c) = (b \to (a \to c)) \to (b \to c),$$

et par T5 :

$$z = (a \to (b \to c)) \to (b \to c) = a \vee (b \to c).$$

3 Les algèbres de Tarski avec un nombre fini de générateurs libres

Soit A une algèbre de Tarski et $X \subseteq A$, nous noterons par $ST(X)$ la sous-algèbre de Tarski de A engendrée par X, et si A est une algèbre de Boole, par $SB(X)$ la sous-algèbre de Boole de A engendrée par X.

Il est bien connu que si A est une algèbre de Boole et nous posons $x \to y = -x \vee y$, où $-x$ est le complément de $x \in A$, alors $(A, \to, 1)$ est une algèbre de Tarski, où 1 est le dernier élément de A.

Lemme 3.1 *Si A est une algèbre de Boole, et $X \subseteq A$ alors $SB(X) = ST(\{0\} \cup X)$, où 0 est le premier élément de A.*

Lemme 3.2 *Soient A et A' des algèbres de Tarski, h un homomorphisme de A dans A', et $X \subseteq A$, alors: $h(ST(X)) = ST(h(X))$.*

La notion d'algèbre de Tarski ayant n générateurs libres (où n est un nombre naturel) est définie de la manière habituelle. Son existence et son unicité résultent d'un théorème d'algèbre universelle, du a Birkhoff.

Soit $T(n)$ l'algèbre de Tarski avec un ensemble fini de n générateurs libres, $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, k un nombre naturel tel que $1 \leq k \leq n$, s_k la borne supérieure de k générateurs différents deux à deux, et $B_{n-k} = \{x \in T(n) : s_k \leq x\}$, alors :

Théorème 3.1 *B_{n-k} est l'algèbre de Boole ayant $(n-k)$ générateurs libres.*

Dem. Nous pouvons supposer, sans perdre de généralité (il suffit de changer la notation) que:

$$s_k = g_1 \vee g_2 \vee \cdots \vee g_k.$$

Prenons:

$$g'_i = s_k \vee g_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq n-k,$$

et considérons la transformation h défine sur $T(n)$, par:

$$h(x) = s_k \vee x.$$

Alors:

1) h est un homomorphisme de $T(n)$ dans $T(n)$.
   En effet: $h(x \to y) = s_k \vee (x \to y) = (s_k \vee x) \to (s_k \vee y) = h(x) \to h(y)$.

2) h est un homomorphisme de $T(n)$ sur B_{n-k}.
   En effet: $s_k \leq s_k \vee x = h(x)$, donc $h(x) \in B_{n-k}$, pour tout $x \in T(n)$.
   Si $x \in B_{n-k}$, c'est-à-dire, si $s_k \leq x$, alors $h(x) = s_k \vee x = x$, et alors $h(T(n)) = B_{n-k}$.

Soient $G_k = \{s_k, g'_1, g'_2, \ldots, g'_{n-k}\} \subseteq B_{n-k}$ et $G' = \{g'_1, g'_2, \ldots, g'_{n-k}\}$.

3) $ST(G_k) = B_{n-k}$.

h est un homomorphisme de $T(n)$ sur B_{n-k}, alors d'après lemme 3.2 on a:

$$B_{n-k} = h(T(n)) = h(ST(G)) = ST(h(G)),$$

et comme

$$h(g_1) = h(g_2) = \cdots = h(g_k) = s_k$$
$$h(g_{k+1}) = g'_1, h(g_{k+2}) = g'_2, \ldots, h(g_n) = g'_{n-k}$$

alors $h(G) = G_k$, donc $B_{n-k} = ST(G_k)$.

4) Les éléments $g'_1, g'_2, \ldots, g'_{n-k}$, engendrent l'algèbre de Boole B_{n-k}.

B_{n-k} est une algèbre de Tarski, qui possède s_k comme premier élément, alors B_{n-k} est une algèbre de Boole, donc en tenant compte du lemme 3.1 et 3) on a:

$$B_{n-k} = ST(G_k) = ST(\{s_k\} \cup G') = SB(G').$$

Soit L_{n-k} l'algèbre de Boole avec un ensemble $G^* = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-k}\}$ de générateurs libres.

Considérons la transformation de $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq T(n)$, dans L_{n-k} définie par:

$$\alpha(g_1) = \alpha(g_2) = \cdots = \alpha(g_k) = 0,$$

$$\alpha(g_{k+1}) = b_1, \alpha(g_{k+2}) = b_2, \ldots, \alpha(g_n) = b_{n-k}.$$

Alors α peut se prolonger a un homomorphisme β de $T(n)$ dans l'algèbre de Tarski $(L_{n-k}, \rightarrow)$.

Par lemme 3.2 et 3) nous avons

$$\beta(B_{n-k}) = \beta(ST(G_k)) = ST(\beta(G_k)).$$

Mais:

$$\beta(s_k) = \beta(\bigvee_{i=1}^{k} g_i) = \bigvee_{i=1}^{k} \beta(g_i) = \bigvee_{i=1}^{k} \alpha(g_i) = 0,$$

$$(i) \quad \begin{cases} \beta(g'_1) = \beta(s_k \vee g_{k+1}) = \beta(s_k) \vee \beta(g_{k+1}) = \alpha(s_k) \vee \alpha(g_{k+1}) = 0 \vee b_1 = b_1, \\ \beta(g'_2) = \beta(s_k \vee g_{k+2}) = \beta(s_k) \vee \beta(g_{k+2}) = \alpha(s_k) \vee \alpha(g_{k+2}) = 0 \vee b_2 = b_2, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta(g'_{n-k}) = \beta(s_k \vee g_n) = \beta(s_k) \vee \beta(g_n) = \alpha(s_k) \vee \alpha(g_n) = 0 \vee b_{n-k} = b_{n-k}, \end{cases}$$

donc en tenant compte du lemme 3.1

$$\beta(B_{n-k}) = ST(\beta(G_k)) = ST(\{0\} \cup G^*) = SB(G^*) = L_{n-k}.$$

De (i) on déduit que: $g'_1, g'_2, \ldots, g'_{n-k}$ sont distincts deux á deux. Alors, on peut dire que B_{n-k} est une algèbre de Boole ayant $(n-k)$ générateurs distincts et que L_{n-k} est une image homomorphique de B_{n-k}, et par conséquant B_{n-k} est isomorphe à L_{n-k}. □

Nous pouvons maintenant démontrer que:

Théorème 3.2

$$N = \mathbf{N}(T(n)) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}.$$

Dem. Soit $A_i = \{x \in T(n) : g_i \leq x\}$. Comme $T(n)$ est l'algèbre de Tarski engendrée par G, alors d'après T6 on a : pour chaque $x \in T(n)$, il existe, au moins, un indice i, $1 \leq i \leq n$, tel que $g_i \leq x$. Donc il est clair que $T(n) = \bigcup_{k=1}^{n} A_i$, et alors $\mathbf{N}(T(n)) = \mathbf{N}(\bigcup_{k=1}^{n} A_i)$.

Mais par théorème 3.1 : $\mathbf{N}(A_1) = \mathbf{N}(A_2) = \cdots = \mathbf{N}(A_n) = 2^{2^{n-1}} = \mathbf{N}(B_1)$.

Remarquons que si $i \neq j$,

$$A_i \cap A_j = \{x \in T(n) : g_i \vee g_j \leq x\} = B_{n-2},$$

et

$$\mathbf{N}(A_i \cap A_j) = \mathbf{N}(B_{n-2}) = 2^{2^{n-2}}.$$

D'une manière analogue:

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \{x \in T(n) : \bigvee_{i=1}^{k} g_i \leq x\} = B_{n-k}.$$

Alors

$$\mathbf{N}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = 2^{2^{n-k}}.$$

In particulier, pour $n = k$,

$$\mathbf{N}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 2^{2^0} = 2.$$

D'après un théorème *d'Analyse Combinatoire*, qui est une generalization du ce que dit : $\mathbf{N}(A \cup B) = \mathbf{N}(A) + \mathbf{N}(B) - \mathbf{N}(A \cap B)$, nous avons:

$$\mathbf{N}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \mathbf{N}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i).$$

Alors

$$N = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}},$$

ce qui achève la démonstration. □

Bibliographie

[1] Abbott J.C., *Semi-boolean algebras*, Mat. Vesnik, 4 (19), (1967), 177-198.

[2] Abbott J.C., *Implicational algebras*, Bull. Math, R.S. Roumaine, 11 (1967), 3-23.

[3] Henkin L., *An algebraic characteriztion of quantifiers*, Fund. Math., 37 (1950), 63-74.

[4] Iturrioz L. y Monteiro A., *Cálculo proposicional implicativo clásico con n variables proposicionales*, Rev. Un. Mat. Argentina, XXII, 3 (1965), 146.

[5] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Hilbert et de Tarski*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[6] Rasiowa H., *An algebraic approach to non-classical logics*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

Construction des algèbres de Boole libres dans les algèbres de Lukasiewicz trivalentes libres

A. MONTEIRO

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1995

El siguiente trabajo fue expuesto por el Dr. Antonio Monteiro en un Seminario realizado en 1966 en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Han colaborado en la redacción y dactilografiado del mismo los ex-discípulos del autor Dres. Manuel Abad y Luiz F. Monteiro y además la Lic. Sonia Savini y el Lic. Julio Sewald.

Dr. Luiz F. Monteiro
Director
INMABB-UNS-CONICET
Agosto, 1995

Construction des algèbres de Boole libres dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes libres

Antonio Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1966 [1]

Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

L'algèbre de Lindenbaum du calcul propositionnel classique dont l'alphabet contient un nombre cardinal $\alpha > 0$ de variables propositionnelles est l'algèbre de Boole libre $\mathbf{B}(\alpha)$ ayant α générateurs libres et d'une façon analogue, on peut montrer que l'algèbre de Lindenbaum du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz dont l'alphabet contient α de variables propositionnelles est l'algèbre de Łukasiewicz trivalente libre $\mathbf{L}(\alpha)$ ayant α générateurs libres. Nous nous proposons d'indiquer dans cette note une construction permetant d'obtenir $\mathbf{B}(\alpha)$ a partir de $\mathbf{L}(\alpha)$. Pour cela nous avons besoin de rappeler un certain nombre de résultats sur la théorie des homomorphismes dans les algèbres de Łukasiewicz trivalentes dont les démonstrations ont eté indiquées dans [4], [5], et que le lecteur pourra, sans dificulté, retrouver par lui même.

2 Les algèbres de Łukasiewicz trivalentes

La notion d'algèbre de Łukasiewicz trivalente, a été introduite et leur théorie développée par Gr. Moisil [1], [2], [3].
Ces algèbres jouent dans le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique.
La définition suivante (voir [4], [5]) est équivalente à celles qui on été indiquées par Moisil.

Définition 2.1 *Une algèbre de Łukasiewicz trivalente est un système* $(L, 1, \sim, \nabla, \vee, \wedge)$ *formé par 1) un ensemble non vide L; 2) un élément* $1 \in L$*; 3) deux fonctions de L dans L représentées par* $\sim$ *et* ∇*; 4) deux fonctions de* $L \times L$ *dans L représentées par* $\vee$ *et* $\wedge$ *, de telle manière que les conditions suivantes soient vérifiées:*

[1] *Note des rédacteurs: Ces résultats ont été exposées dans un Seminaire due à l'Instituto de Matemática de l'Universidad Nacional del Sur.*

Axiome L1) L est un réticulé distributif par rapport aux opérations $\vee$ et $\wedge$, et 1 est le dernier élément de L.

Axiome L2) L'opération $\sim$ vérifie les conditions:

2.1) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.

2.2) $\sim\sim x = x$.

Axiome L3) L'opération ∇ vérifie les conditions:

3.1) $\sim x \vee \nabla x = 1$.

3.2) $\sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x$.

3.3) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Nous dirons aussi que L est une algèbre de Łukasiewicz.

Pour identifier cette définition avec celles qui on été indiquées par Moisil on doit poser $\sim x = Nx$ et $\nabla x = \mu x$.
Nous supposerons connues les régles de calcul valables dans ces algèbres, pour la démonstration desquelles nous renvoyons aux travaux de Moisil.
Si nous posons $0 = \sim 1$ alors on peut montrer que 0 est le premier élément du réticulé L. L'opération de *nécéssité* ($\triangle$) est définie par: $\triangle x = \sim \nabla \sim x, \ \ x \in L$.

Soit $T = \{0, 1/2, 1\}$ l'ensemble ordonné où $0 < 1/2 < 1$. Donc T est un réticulé distributif avec premier et dernier éléments 0 et 1 respectivement. Si nous posons $\sim 0 = 1$, $\sim (1/2) = 1/2$, $\sim 1 = 0$ et $\nabla 0 = 0$, $\nabla(1/2) = \nabla 1 = 1$, alors T est une algèbre de Łukasiewicz trivalente. Observons que $\triangle 0 = \triangle(1/2) = 0$, $\triangle 1 = 1$ et que le sous-ensemble $B = \{0, 1\}$ de T est une sous-algèbre de T.

L'example précedent est le plus important car:

Théorème 2.1 *Toute algèbre de Łukasiewicz trivalente, avec plus qu'un élément, est produit subdirect d'algèbres B et T.* [Gr.C. Moisil]

Si L est une algèbre de Łukasiewicz, nous noterons par $B(L)$ l'ensemble de touts les éléments booléens de L, c'est-à-dire:

$$B(L) = \{x \in L : \nabla x = x\} = \{x \in L : \triangle x = x\}.$$

Lemme 2.1 *Si R est un réticulé distributif avec premier et dernier élément et $X \subseteq R$ alors le filtre engendré par X dans R est l'ensemble:*

$$F(X) = \{y \in R : \text{il existent des éléments } x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \text{ tels que } \bigwedge_{i=1}^{n} x_i \leq y\}.$$

Définition 2.2 *Une application h d'une algèbre de Łukasiewicz A dans une algèbre de Łukasiewicz A′ sera dite un L-homomorphisme de A dans A′, si les conditions suivantes sont vérifiées* [4]*:*

H1) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$,

H2) $h(\sim x) = \sim h(x)$,

H3) $h(\nabla x) = \nabla h(x)$.

Définition 2.3 *Une partie F d'une algèbre de Łukasiewicz L sera dite un $\triangle$-filtre si:*

F1) F est un filtre du réticulé distributif L,

F2) Si $a \in F$ alors $\triangle a \in F$.

Lemme 2.2 *Si L et L' sont des algèbres de Łukasiewicz et h un L-homomorphisme de L dans L', alors: $h(B(L)) \subseteq B(L')$, et la restriction h' de h a l'ensemble $B(L)$ est un homomorphisme booléen de $B(L)$ dans $B(L')$.*

Il est bien connue que:

Lemme 2.3 *Si h est un homomorphisme booléen de l'algèbre de Boole A sur l'algèbre de Boole A' et X un sous-ensemble de générateurs de A, c'est-à-dire $SB(X) = A$, alors $A' = SB(h(X))$.*

Lemme 2.4 *Si L est une algèbre de Łukasiewicz, $G \subseteq L$, et $L' = SL(G)$ la sous-algèbre de Łukasiewicz de L engendrée par l'ensemble G, alors le sous-ensemble $\triangle G \cup \nabla G$ de $B(L)$ vérifie: $SB(\triangle G \cup \nabla G) = B(L')$,* [4]. [2]

Corollaire 2.1 *Si G est un ensemble de générateurs de L, c'est-à-dire $SL(G) = L$, alors $B(L) = SB(\triangle G \cup \nabla G)$.*

Observation 2.1 *Si L est une algèbre de Łukasiewicz, $X \subseteq B(L)$, nous noterons par $F_B(X)$ le filtre de $B(L)$ engendrée par l'ensemble X et par $F(X)$ le filtre de L engendrée par l'ensemble X. Il est facile a voir que $F_B(X) = F(X) \cap B(L)$.*

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha)$ l'algèbre de Łukasiewicz avec un ensemble $G = \{g_i : i \in I\}$ de générateurs libres de puissance α ; $\nabla G = \{\nabla g_i : i \in I\}$, et $F = F_B(\nabla G)$. Considérons l'algèbre de Boole quotient $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$ et représentons par la notation $|b|$ la classe d'équivalence correspondante que contient l'élément $b \in B(\mathcal{L})$. Dans ces conditions nous pouvons afirmer que:

Théorème 2.2 *$\mathcal{B}$ est l'algèbre de Boole ayant pour générateurs libres les éléments $|\triangle g_i|$, $i \in I$, et la puissance de l'ensemble $G^* = \{|\triangle g_i| : i \in I\}$ est égale à α.*

[2] L.Monteiro (1994), a indiquée une démonstration plus simple que celle de A. Monteiro, voir leur démonstration à la fin de cette note.

Dém. Démontrons tout d'abord que:

(I) F est un filtre propre de $B(\mathcal{L})$.

Si $F = B(\mathcal{L})$, alors $0 \in F$, et d'après le lemme 2.1 on déduit qu'il existent des éléments $\nabla g_{i_1}, \nabla g_{i_2}, \ldots, \nabla g_{i_n} \in \nabla G$ tels que:

$$0 = \bigwedge_{k=1}^{n} \nabla g_{i_k} = \nabla(\bigwedge_{k=1}^{n} g_{i_k}), \text{ et par conséquent on aurait : } \bigwedge_{k=1}^{n} g_{i_k} = 0.$$

Montrons que cela est impossible. Soit f la transformation de G dans l'algèbre T, définie par:

$$f(g_i) = 1, \text{ pour tout } i \in I$$

alors il existe un L-homomorphisme h de $\mathcal{L}$ dans T que prolonge f et par conséquant :

$$0 = h(0) = h(\bigwedge_{k=1}^{n} g_{i_k}) = \bigwedge_{k=1}^{n} h(g_{i_k}) = \bigwedge_{k=1}^{n} f(g_{i_k}) = 1,$$

cette contradiction montre que F est un filtre propre de $B(\mathcal{L})$.

Montrons que:

(II) Si $j, k \in I$, et $j \neq k$ alors les classes $|\triangle g_j|$, $|\triangle g_k|$, sont distincts.[3]

En effet supposons que $|\triangle g_j| = |\triangle g_k|$, alors nous aurons:

$$(1) \quad \triangle g_j \wedge t = \triangle g_k \wedge t, \text{ où } t \in F.$$

Considérons la transformation f de G dans l'algèbre T définie par:

$$f(g_i) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } i = k \\ 1 & \text{si } i \neq k \end{cases}, \quad i \in I\ .$$

Cette transformation f peut se prolonger à un L-homomorphisme h de $\mathcal{L}$ dans T, pour lequel nous aurons:

$$(2) \qquad h(\nabla g_i) = \nabla h(g_i) = \nabla f(g_i) = 1, \text{ pour tout } i \in I.$$

Soit $D = h^{-1}(1)$ le noyau du L-homomorphisme h, donc $\nabla g_i \in D$, pour tout $i \in I$, et alors d'aprés le lemme 2.1, nous aurons (3) $F \subseteq D$.
Comme $j \neq k$, d'après la définition de f nous aurons $f(g_k) = 1/2$ et $f(g_j) = 1$, donc (4) $h(\triangle g_j) = \triangle h(g_j) = \triangle f(g_j) = \triangle 1 = 1$, et (5) $h(\triangle g_k) = \triangle h(g_k) = \triangle f(g_k) = \triangle(1/2) = 0$.

De la condition (1) on déduit, que:

$$\triangle h(g_j) \wedge h(t) = h(\triangle g_j \wedge t) = h(\triangle g_k \wedge t) = \triangle h(g_k) \wedge h(t).$$

[3]*Note des rédacteurs: A partir de cette point, L. Monteiro a changée les démonstrations pour autres plus simples.*

Donc d'aprés (3), (4) et (5):

$$1 = h(t) = 1 \wedge h(t) = 0 \wedge h(t) = 0.$$

Cette contradiction montre que (II) est valable, et nous pouvons donc afirmer que:

$$\text{L'ensemble } G^* = \{|\triangle g_i| : i \in I\} \text{ à la puissance } \alpha.$$

Soit φ l'homomorphisme booléen naturel de $B(\mathcal{L})$ sur $B(\mathcal{L})/F$, c'est-à-dire $\varphi(b) = |b|$, $b \in B(\mathcal{L})$. D'après le lemme 2.3 l'homomorphisme φ transforme chaque ensemble de générateurs de $B(\mathcal{L})$ dans un ensemble de générateurs de $\mathcal{B}$. D'après le corollaire 2.1 nous savons que $B(\mathcal{L}) = SB(\triangle G \cup \nabla G)$, alors:

$$\{|\triangle g_i| : \ i \in I\} \ \cup \ \{|\nabla g_i| : \ i \in I\}$$

est un ensemble de générateurs de $\mathcal{B} = B(\mathcal{L})/F$. Mais comme, pour tout $i \in I$, la classe $|\nabla g_i| = |1| = F$ est le dernier élément de $\mathcal{B}$, on n'a pas besoin de la considerer un générateur, et nous pouvons donc affirmer que G^* est un ensemble de générateurs de $\mathcal{B}$.

(III) Toute application f' de l'ensemble $G^* \subseteq \mathcal{B}$ dans l'algèbre de Boole $B = \{0, 1\} \subseteq T$, peut être etendue a un homomorphisme booléen h' de $\mathcal{B}$ dans B.

Considérons l'application f de G dans T définie par les conditions suivantes:

$$f(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ f'(|\triangle g_i|) = 1 \qquad (1) \\ 1/2 & \text{si } \ f'(|\triangle g_i|) = 0 \qquad (2) \end{cases}.$$

Par conséquent nous aurons:

$$(3) \quad \nabla f(g_i) = 1 \ \text{ pour tout } \ i \in I,$$

$$\triangle f(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ f'(|\triangle g_i|) = 1 \\ 0 & \text{si } \ f'(|\triangle g_i|) = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire: (4) $\triangle f(g_i) = f'(|\triangle g_i|)$, pour tout $i \in I$.

L'application f de G dans T, peut se prolonger à un L-homomorphisme H de $\mathcal{L}$ dans T, et nous aurons d'après (3) que:

$$(5) \qquad H(\nabla g_i) = \nabla H(g_i) = \nabla f(g_i) = 1.$$

Le noyau $N = H^{-1}(1)$ de cet L-homomorphisme est un $\triangle$-filtre de $\mathcal{L}$, et d'après (5) nous avons $\nabla G \subseteq N$, donc $F(\nabla G) \subseteq N$, et alors, voir observation 2.1,

$$F = F_B(\nabla G) = F(\nabla G) \cap B(\mathcal{L}) \subseteq N \cap B(\mathcal{L}) \subseteq N,$$

d'où (6) $H(F) = \{1\}$.

Comme le L-homomorphisme H transforme des éléments booléens de $\mathcal{L}$ dans des éléments booléens de T, [voir lemme 2.2], et $B(T) = \{0,1\}$, alors nous avons $H(B(\mathcal{L})) = \{0,1\}$.

Soit h la restriction de H a l'ensemble $B(\mathcal{L})$, nous pouvons donc afirmer que h est un homomorphisme booléen de $B(\mathcal{L})$ sur $B = \{0,1\}$, et par (6) nous avons (7) $h(F) = \{1\}$. Remarquons que

$$(8) \text{ “Si } x,y \in B(\mathcal{L}),\ \ x \in |y|, \text{ alors } h(x) = h(y)\text{”}.$$

En effet, comme $x \in |y|$ on a: $x \wedge d = y \wedge d$, où $d \in F$, donc

$$h(x) = h(x) \wedge 1 = h(x \wedge d) = h(y \wedge d) = h(y) \wedge 1 = h(y).$$

D'après le résultat précedent si nous posons $h'(|x|) = h(x)$, $x \in B(\mathcal{L})$, h' est une fonction de $B(\mathcal{L})/F$ sur B. Il est facile a voir que h' est un homomorphisme booléen. Nous allons montrer que h' prolonge f', c'est-à-dire que:

$$h'(|\triangle g_i|) = f'(|\triangle g_i|), \text{ pour tout } i \in I.$$

En utilisant (4) on a:

$$h'(|\triangle g_i|) = h(\triangle g_i) = H(\triangle g_i) = \triangle H(g_i) = \triangle f(g_i) = f'(|\triangle g_i|).$$

Montrons maintenant que G^* est un ensemble de générateurs libres de $\mathcal{B}$.

(IV) Toute application f de l'ensemble G^* dans une algèbre de Boole A, peut être prolonger a un homomorphisme booléen de $\mathcal{B}$ dans A. *(la demonstration de cet point n'est pas contenue dans les notes de A. Monteiro.)*
Si A à un seule élément, il est évident que (IV) est verifiée. Si l'algèbre de Boole A est isomorphe a l'algèbre de Boole $\{0,1\}$ alors d'après (III) la condition (IV) est verifiée.
Supposons maintenat que A à plus qu'un élément et que A n'est pas simple, alors il est bien connue que A est isomorphe á une sous-algèbre de Boole A' de l'algèbre de Boole $P = \prod_{j \in J}\{A_j = A/M_j\}$, où $\{M_j : j \in J\}$ est l'ensemble de touts les filtres maximales de A, nous savons encore que $A_j \cong \{0,1\}$ pour tout $j \in J$. Nous notérons les éléments de P par $\sqsubset x_j \sqsupset_{j \in J}$ y par p_t la t-projection de P sur A_t, $t \in J$, c'est-à-dire $p_t(\sqsubset x_j \sqsupset_{j\in J}) = x_t$.
On peut supposer que A est une sous-algèbre de P. Alors $f : G^* \to A$, $f(g^*) = g' = \sqsubset g'_j \sqsupset_{j\in J}$, $g^* \in G^*$.
Soit $f_j = p_j \circ f$, $j \in J$. Alors $f_j : G^* \to A_j \simeq \{0,1\}$ et par (III) chaque f_j peut être etendue a un homomorphisme booléen h_j de $\mathcal{B}$ sur A_j.
Soit h la fonction de $\mathcal{B}$ dans P définie par $h(x) = \sqsubset h_j(x) \sqsupset_{j\in J}$. Il est évident que h est un homomorphisme booléen. Voyons que h prolonge f.
En effet $h(g^*) = \sqsubset h_j(g^*) \sqsupset_{j\in J} = \sqsubset f_j(g^*) \sqsupset_{j\in J} = \sqsubset p_j(f(g^*)) \sqsupset_{j\in J} = \sqsubset p_j(\sqsubset g'_j \sqsupset_{j\in J}) \sqsupset_{j\in J} = \sqsubset g'_j \sqsupset_{j\in J} = g' = f(g^*)$, quelque soit $g^* \in G^*$.
Par hypothesis $f(G^*) \subseteq A$, et comme $f(G^*) = h(G^*)$, nous aurons $h(G^*) \subseteq A$. $\square$

Note des rédacteurs: Si X est un ensemble finie, nous noterons par $N[X]$ le nombre d'eléménts de X. Dans le cas où G est fini et $N[G] = n$, n nombre naturel, nous savons que $N[\mathcal{L}] = 2^{2^n} \times 3^{3^n-2^n}$ et que $N[B(\mathcal{L})] = 2^{3^n}$. D'après les résultats précedants $N[B(\mathcal{L})/F_B(\nabla G)] = 2^{2^n}$.
D'autre coté nous savons que toutes les classes d'équivalence (module $F_B(\nabla G)$) de $B(\mathcal{L})$ ont le même nombre d'éléments, donc:

$$2^{2^n} = N[B(\mathcal{L})/F_B(\nabla G)] = \frac{N[B(\mathcal{L})]}{N[F_B(\nabla G)]} = \frac{2^{3^n}}{N[F_B(\nabla G)]}.$$

Cela montre que le nombre d'éléments de chaque classe d'équivalence est: $2^{3^n-2^n}$.

Démonstration du lemme 2.4. *L.Monteiro (1995).*
Nous savons que si $b \in B(L)$ alors $\sim b$ est le complèment booléen de b. Si $b \in B(L)$, nous noterons par b^*, b or $\sim b$.

Lemme 2.5 *Si L est une algèbre de Lukasiewicz, $X \subseteq B(L)$, X finie alors $SB(X) = SL(X)$.*

Dém. Si $X = \emptyset$, alors $SB(\emptyset) = \{0, 1\} = SL(\emptyset)$. Supposons que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Comme $SB(X)$ est une L-sous-algèbre de L telle que $X \subseteq SB(X)$ alors $SL(X) \subseteq SB(X)$. Soit $b \in SB(X)$, si $b = 0$ il est évident que $b \in SL(X)$. Si Si $b \neq 0$ alors il est bien connue que $b = \bigvee_{k=1}^{r} m_k$, où $m_k = \bigwedge_{i=1}^{n} x^*{}_i$. Comme $x^*{}_i \in SL(X)$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$, alors $m_k \in SL(X)$ pour tout k, $1 \leq k \leq r$, donc $b \in SL(X)$. □

Corollaire 2.2 *Si L est une algèbre de Lukasiewicz, $X \subseteq L$, X finie alors $SB(\Delta X \cup \nabla X) = SL(\Delta X \cup \nabla X)$.*

Dém. Est une conséquence du lemme 2.5, car $\Delta X \cup \nabla X$ est un sous-ensemble finie de $B(L)$. □

Si S est une L-sous-algèbre de l'algèbre de Lukasiewicz L et $x \in L$ nous notérons $SL(S, x)$ au lieu de $SL(S \cup \{x\})$.

Lemme 2.6 *Soit $x \in L$ et S une sous-algèbre de L qui vérifie $\nabla x, \sim \Delta x \in B(S)$, alors $B(SL(S, x)) = B(S)$.*

Dém. D'après l' hyphotèse on déduit que:

$$(1)\ \ \Delta x,\ \Delta \sim x,\ \nabla(x \wedge \sim x) \in B(S).$$

Si $s \in S$, nous posons: $\alpha(s) = s \wedge \Delta x$, $\beta(s) = s \wedge \Delta \sim x$, $\gamma(s) = s \wedge \nabla(x \wedge \sim x)$, $\delta(s) = s \wedge x \wedge \sim x$.
Il est bien connue que:

$$SL(S, x) = \{y = \alpha(s_1) \vee \beta(s_2) \vee \gamma(s_3) \vee \delta(s_4) : \text{ où } s_i \in S, 1 \leq i \leq 4\}.$$

Si $z \in B(SL(S,x)) = SL(S,x) \cap B(L)$ alors $\Delta z = z$ et

$$z = \alpha(s_1) \vee \beta(s_2) \vee \gamma(s_3) \vee \delta(s_4); \text{ où } s_i \in S, 1 \leq i \leq 4,$$

donc

$$z = \Delta z = \Delta\alpha(s_1) \vee \Delta\beta(s_2) \vee \Delta\gamma(s_3) \vee \Delta\delta(s_4)$$

et comme $\Delta\delta(s_4) = \Delta s_4 \wedge \Delta x \wedge \Delta \sim x \leq x \wedge \Delta \sim x = 0$, alors:

$$z = \Delta\alpha(s_1) \vee \Delta\beta(s_2) \vee \Delta\gamma(s_3).$$

De $\Delta s_i \in B(S)$, pour $i = 1, 2, 3$ on déduit en tenant compte de (1) que $z \in B(S)$.
Comme $S \subseteq SL(S,x)$ alors nous avons $B(S) = S \cap B(L) \subseteq SL(S,x) \cap B(L) = B(SL(S,x))$. □

Soit $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq L$ et $L_0 = SB(\Delta G \cup \nabla G)$, $L_1 = SL(L_0, g_1)$, $L_2 = SL(L_1, g_2), \ldots, L_n = SL(L_{n-1}, g_n)$ alors:

Lemme 2.7 *$L_n = SL(G)$ et $B(SL(G)) = SB(\Delta G \cup \nabla G)$.*

Dém. Par construction nous avons $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n$, et $g_i \in L_i$, $1 \leq i \leq n$, donc $G \subseteq L_n$ et alors $SL(G) \subseteq L_n$.
Comme ΔG, $\nabla G \subseteq SL(G)$, alors $\Delta G \cup \nabla G \subseteq SL(G)$, donc: (1) $SL(\Delta G \cup \nabla G) \subseteq SL(G)$.
Par hyphotèse G est un sous-ensemble finie, alors d'après le corollaire 2.2:
(2) $SB(\Delta G \cup \nabla G) = SL(\Delta G \cup \nabla G)$.
De (1) et (2) on a $L_0 = SB(\Delta G \cup \nabla G) \subseteq SL(G)$, donc comme $g_1 \in SL(G)$ on a $L_1 = SL(L_0, g_1) \subseteq SL(G)$. De $g_i \in SL(G)$, et $L_{i-1} \subseteq SL(G)$, $2 \leq i \leq n$, on a $L_i = SL(L_{i-1}, g_i) \subseteq SL(G)$, $2 \leq i \leq n$. Cela montre que $L_n = SL(G)$.
Nous avons vue que $L_0 = SB(\Delta G \cup \nabla G) \subseteq SL(G)$, donc $L_0 = L_0 \cap B(L) \subseteq SL(G) \cap B(L) = B(SL(G))$.
Comme $\nabla g_i, \sim \Delta g_i \in B(L_0) = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, alors d'après le lemme 2.6, $B(L_1) = B(SL(L_0, g_1)) = B(L_0) = L_0$, et alors $B(L_j) = B(SL(L_{j-1}, g_j)) = B(L_{j-1}) = L_0$, $2 \leq j \leq n$. □

Montrons finalement le lemme 2.4. Soit G un sous-ensemble de l'algèbre de Łukasiewicz L, alors il est bien connue que:

$$SL(G) = \bigcup\{SL(G') : G' \subseteq G,\ G' \text{ finie}\}.$$

Nous allons montrer que: $B(SL(G)) = SB(\Delta G \cup \nabla G)$. Comme $\Delta G \cup \nabla G \subseteq B(L)$ et $\Delta G \cup \nabla G \subseteq SL(G)$, alors $\Delta G \cup \nabla G \subseteq SL(G) \cap B(L) = B(SL(G))$, donc $SB(\Delta G \cup \nabla G) \subseteq B(SL(G))$. Si $b \in B(SL(G))$ alors $b = \Delta b$ et $b \in SL(G)$, donc $b \in SL(G')$ où $G' \subseteq G$ et G' finie, alors par le lemme 2.7, $B(SL(G')) = SB(\Delta G' \cup \nabla G') \subseteq SB(\Delta G \cup \nabla G)$, et comme $b \in B(SL(G'))$ on a $b \in SB(\Delta G \cup \nabla G)$.

Bibliographie

[1] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 26 (1940), 431- 466.

[2] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 27 (1941), 86-98.

[3] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Analele Universitatii C.I. Parohn. Seria Acta Logica 3 (1960), 83-95.

[4] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[5] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Préprint in Notas de Lógica Matemática 21, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

Représentation d'une algèbre de Lukasiewicz trivalente par une algèbre de Lukasiewicz trivalente d'ensembles. Caractère universel de la construction £ des algèbres de Lukasiewicz trivalentes

A. MONTEIRO

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1995

Representation d'une algèbre de Łukasiewicz trivalente par une algèbre de Łukasiewicz trivalente d'ensembles. Caractère Universel de la construction $\mathcal{L}$ des algèbres de Łukasiewicz trivalentes.

Antonio Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1966 [1]

Bahía Blanca - Argentina

1 Les algèbres de Łukasiewicz trivalentes

La notion d'algèbre de Łukasiewicz trivalente, a été introduite et leur théorie développée par Gr. Moisil [7], [8] , [9].
Ces algèbres jouent dans le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans le calcul propositionnel classique.
La définition suivante (voir [12], [13], [17]) est équivalente à celles qui on été indiquées par Moisil.

Définition 1.1 *Une algèbre de Lukasiewicz trivalente* $(L, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 1)$ *est une algèbre du type* $(2,2,1,1,0)$ *de telle manière que les conditions suivantes soient vérifiées:*

L1) $x \vee 1 = 1$

L2) $x \wedge (x \vee y) = x$

L3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

L4) $\sim \sim x = x.$

L5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y.$

[1] *Les résultats suivants ont été exposés dans un Seminaire due à l'Instituto de Matemática de l'Universidad Nacional del Sur, leurs éléves: Roberto Cignoli, Luisa Iturrioz et Luiz F. Monteiro. Nous avons ajouté a la Bibliographie des travaux publiés d'aprés 1966.*

L6) $\sim x \vee \nabla x = 1$.

L7) $\sim x \wedge x = \sim x \wedge \nabla x$.

L8) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

Nous dirons aussi que L est une algèbre de Lukasiewicz.

L'opération ∇ s'appelle opération de *possibilité*. Il est bien connue que L est un réticulé distributif ayant par dernier élément 1, et plus précisement une algèbre de De Morgan, où $0 = \sim 1$ est le premier élément du réticulé L. L'opération de *nécéssité* (Δ) est définie par: $\Delta x = \sim \nabla \sim x$, $x \in L$.

Si R est un réticulé distributif, nous répresenterons par $\mathbf{F}(R)$ l'ensemble de tous les filtres de R. Il est bien connue que $(\mathbf{F}(R), \subseteq)$ est un ensemble ordonée. Soit $\mathbf{U}(R)$ l'ensemble de tous les éléments maximales de l'ensemble ordonné $\mathbf{F}(R)$, nous appelerons *ultrafiltres* de R, ces éléments.
Nous répresenterons par $\mathbf{P}(R)$ l'ensemble de tous les filtres premiers de R, et par $\mathbf{p}(R)$ l'ensemble de tous les filtres premiers minimales de R, c'est-à-dire l'ensemble des éléments minimales de l'ensemble ordonné $(\mathbf{P}(R), \subseteq)$.

Si M est une algèbre de De Morgan, et $X \subseteq M$, soit $\sim X = \{x \in M : \sim x \in X\}$. Si $P \in \mathbf{P}(M)$ alors il est bien connu que $\varphi(P) = \mathcal{C} \sim P$, où $\mathcal{C}Y$ répresente le complément de l'ensemble $Y \subseteq M$ para rapport à l'ensemble M , est une transformation, que s'appelle *transformation de Birula- Rasiowa* [1], [2], de $\mathbf{P}(M)$ dans $\mathbf{P}(M)$, qui verifie (1) $\varphi(\varphi(P)) = P$, et (2) Si $P, Q \in \mathbf{P}(M)$ alors $P \subseteq Q$ si et seulement si $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

Lemme 1.1 *Si $P \in \mathbf{P}(M)$ alors:*

1) $\sim x \in P$ si et seulement si $x \notin \varphi(P)$.

2) $\sim x \notin P$ si et seulement si $x \in \varphi(P)$.

Si K est une algèbre de Kleene, il est bien connue que: Si $P \in \mathbf{P}(K)$ alors: $P \subseteq \varphi(P)$ ou $\varphi(P) \subseteq P$. Si $P \in \mathbf{P}(K)$ verifie $P \subseteq \varphi(P)$ nous dirons que P est un filtre de première espèce [22] , et nous répresentrons par $\mathbf{P}_1(K)$ l'ensemble de tous les filtres de première espèce . Il est claire que $\mathbf{p}(K)$, $\mathbf{P}_1(K) \subseteq \mathbf{P}(K)$.

Soit $T = \{0, 1/2, 1\}$ l'ensemble ordonné où $0 < 1/2 < 1$. Donc T est un réticulé distributif avec premier et dernier éléments 0 et 1 respectivement. Si nous posons $\sim 0 = 1$, $\sim (1/2) = 1/2$, $\sim 1 = 0$ et $\nabla 0 = 0$, $\nabla(1/2) = \nabla 1 = 1$, alors T est une algèbre de Łukasiewicz trivalente. Observons que $\Delta 0 = \Delta(1/2) = 0$, $\Delta 1 = 1$ et que le sous-ensemble $B = \{0, 1\}$ de T est une sous-algèbre de T.

Si L est une algèbre de Łukasiewicz, nous noterons par $B(L)$ l'ensemble de touts les éléments booléens de L.

Lemme 1.2

$$B(L) = \{x \in L : \nabla x = x\} = \{x \in L : \Delta x = x\} = \{x \in L : \ x \wedge \sim x = 0\}.$$

Comme toute algèbre de Łukasiewicz est une algèbre de Kleene, c'est- à-dire verifie:

$$x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$$

alors si $b \in B(L)$, alors le complément booléen de b, que nous notérons $-b$, est égale a $\sim b$, c'est-à-dire $-b = \sim b$. La démonstration que nous avons obtenue a été reproduite sans changement dans [3]. Une démonstration plus simple a été obtenue par L.Monteiro, [19]. Voir à cette propos [16].

Lemme 1.3 (Principe de détermination de Moisil.)*Si L est une algèbre de Łukasiewicz, $x, y \in L$ tels que $\nabla x = \nabla y$ et $\Delta x = \Delta y$, alors $x = y$.* [7], [8], [20].

Définition 1.2 *Une application h d'une algèbre de Łukasiewicz L dans une algèbre de Łukasiewicz L' sera dite un L-homomorphisme de L dans L', si les conditions suivantes sont vérifiées* [12]*:*

H1) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$,

H2) $h(\sim x) = \sim h(x)$,

H3) $h(\nabla x) = \nabla h(x)$.

Définition 1.3 *Une partie F d'une algèbre de Łukasiewicz L sera dite un Δ-filtre si:*

F1) F est un filtre du réticulé distributif L,

F2) Si $a \in F$ alors $\Delta a \in F$.

Si X est un sous-ensemble de l'algèbre de Łukasiewicz L, nous notérons par $D(X)$, le Δ-filtre engendrée par l'ensemble X. Si F est un Δ-filtre et $a \in L - F$ nous notérons par $D(F, a)$ le Δ-filtre engendrée par l'ensemble $F \cup \{a\}$. Il est bien connu que:

$$D(F, a) = \{y \in L : \nabla \sim a \vee y \in F\}.$$

Comme la famille des Δ-filtres est inductive supérieurement alors:

Lemme 1.4 *Chaque Δ-filtre est contenue dans un Δ-filtre maximal.*

Nous répresenterons par $\mathbf{D}(L)$ l'ensemble de tous les Δ-filtres de L, et par $\mathbf{M}(L)$ l'ensemble de tous les Δ-filtres maximales de L.

Lemme 1.5 *Chaque Δ-filtre est intersection de Δ-filtres maximales.*

Si L et L' sont des algèbres de Lukasiewicz, et h un homomorphisme de L dans L', alors l'ensemble $N(h) = \{x \in L : h(x) = 1'\}$, où $1'$ est le dernier élément de L', est un $\boldsymbol{\Delta}$-filtre de L. Nous dirons que $N(h)$ est le *noyau de h*.

Soit D un Δ-filtre d'une algèbre de Lukasiewicz L. Posons $x \equiv y$ $(mod.D)$ pour indiquer qu'il existe un élément $d \in D$ tel que $x \wedge d = y \wedge d$, alors la relation $\equiv$ est une congruence définie sur L. Soit $|x|$ la classe d'équivalence qui contient l'élément $x \in L$. Alors si nous algebrisons l'ensemble $L/\equiv$ des clases d'équivalence par: $|x| \wedge |y| = |x| \wedge y|$, $|x| \vee |y| = |x| \vee |y|$, $\nabla|x| = |\nabla x|$, $\sim |x| = | \sim x|$, $\mathbf{1} = |1|$, alors $(L/\equiv, \vee, \wedge, \sim, \nabla, \mathbf{1})$ est une algèbre de Lukasiewicz trivalente, et la transformation h de L dans $L/\equiv$ definie par $h(x) = |x|$ est un homomorphisme de L sur $L/\equiv$, ayant par noyau D. A l'algèbre $A/\equiv$ que nous venons d'obtenir nous donnerons le nom d'algèbre quotient de L par le Δ-filtre D. Nous notérons aussi cette algèbre par L/D.
Il est bien connue que toutes les images homomorphes d'une algèbre donnée L peuvent être obtenues par la construction que nous venons d'indiquer.

Lemme 1.6 *Si M est un Δ-filtre maximal de L alors l'algèbre quotient A/M est isomorphe soit a l'algèbre B ou a l'algébre T.*

Si X est un sous-ensemble d'une algèbre de Lukasiewicz L, nous notérons par $F(X)$ le filtre engendrée par X dans le réticulé distributif L.

Lemme 1.7 *Si R est un réticulé distributif avec premier (0) et dernier élément (1) et $X \subseteq R$ alors le filtre engendré par X dans R est l'ensemble:*

$$F(X) = \{y \in R : \text{il existent des éléments } x_1, x_2, \cdots, x_n \in X \text{ tels que } \bigwedge_{k=1}^{n} x_k \leq y\}.$$

Lemme 1.8 *Si X est un sous-ensemble de R qui vérifie: Si $x, y \in X$ alors $x \wedge y \in X$, alors $F(X) = \{y \in R :$ il existe $x \in X$ tel que $x \leq y\}$. Un tel sous-ensemble s'appelle une base multiplicative de filtre. Si $0 \notin X$ alors $F(X)$ est un filtre propre , c'est-á-dire $F(X) \neq R$.*

Observation 1.1 *Si L est une algèbre de Lukasiewicz, $X \subseteq B(L)$, nous noterons par $F_B(X)$ le filtre de $B(L)$ engendrée par l'ensemble X. Il est facile a voir que $F_B(X) = F(X) \cap B(L)$.*

Lemme 1.9 *Si L et L' sont des algèbres de Lukasiewicz et h un L-homomorphisme de L dans L', alors : $h(B(L)) \subseteq B(L')$, et la restriction h' de h a l'ensemble B(L) est un homomorphisme Booléen de B(L) dans B(L').*

Il est bien connue que:

Lemme 1.10 *Si h est un homomorphisme booléen de l'algèbre de Boole A sur l'algèbre de Boole A' et X un sous-ensemble de générateurs de A, c'est-à-dire $SB(X) = A$, alors A' = SB(h(X)).*

Nous allons étudier les relations entre les filtres premiers de L et les Δ-filtres maximales de L.
Si $X \subseteq L$, soit $\nabla X = \{\nabla x : x \in X\}$, et $\Delta X = \{\Delta x : x \in X\}$.

Lemme 1.11 *If X est un sous-ensemble de $B(L)$ qui vérifiee: "(1) Si $x, y \in X$ alors $x \wedge y \in X$", alors $F(X)$ est an Δ-filtre.*

Dém. Soit $y \in F(X)$, alors d'après l'hypothèse (1) et le lemme 1.8, il existe $x \in X$ tel que $x \leq y$, donc $x = \Delta x \leq \Delta y$, donc d'après le lemme 1.8, $\Delta y \in F(X)$. □

Corollaire 1.1 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ alors $F(\Delta P)$, $F(\nabla P)$ sont des Δ-filtres de L.*

Dém. Soient $x, y \in \Delta P$, donc $x = \Delta p$, $y = \Delta q$, où $p, q \in P$, donc $x \wedge y = \Delta(p \wedge q) \in \Delta P$, car $p \wedge q \in P$, alors par le lemme 1.11 $F(\Delta P)$ est un Δ-filtre de L. Analoguement on montre que $F(\nabla P)$ est un Δ-filtre de L. □

Lemme 1.12 *La transformation $\alpha : \mathbf{D}(L) \to \mathbf{F}(B(L))$, definie par $\alpha(D) = D \cap B(L)$, est un isomorphisme d'ordre de l'ensemble ordonée $(\mathbf{D}(L), \subseteq)$ dans l'ensemble ordonée $(\mathbf{F}(B(L)), \subseteq)$, et $\alpha^{-1}(Q) = F(Q)$, $Q \in \mathbf{F}(B(L))$.*

Dém. Si $D \in \mathbf{D}(L)$, il est facile a voir que $\alpha(D) \in \mathbf{F}(B(L))$. Soient $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(L)$ tels que $D_1 \subseteq D_2$, alors il est claire que $\alpha(D_1) \subseteq \alpha(D_2)$.
Si $D \in \mathbf{D}(L)$, alors $\alpha(D) = D \cap B(L) \subseteq D$ et par conséquant $F(D \cap B(L)) \subseteq F(D) = D$. Si $d \in D$ alors $\Delta d \in D \cap B(L) \subseteq F(D \cap B(L))$ et comme $\Delta d \leq d$ on a $d \in F(D \cap B(L))$. Nous avons ainsi demontré que : (1) $F(D \cap B(L)) = D$.
Soit $Q \in \mathbf{F}(B(L))$, alors comme Q verifie les conditions du lemme 1.11 on a $F(Q) \in \mathbf{D}(L)$, donc $\alpha(F(Q)) = F(Q) \cap B(L)$. Comme $Q \subseteq B(L)$ et $F(Q) \subseteq B(L)$, alors $Q = Q \cap B(L) \subseteq F(Q) \cap B(L)$. Si $y \in F(Q) \cap B(L)$, alors $y \in F(Q)$, donc il existe $x \in Q$ tel que $x \leq y$. Comme $y \in B(L)$ alors (1) $\nabla x \leq \nabla y = y$. De $x \in Q$, $x \leq \nabla x$ et $\nabla x \in B(L)$ on déduit que (2) $\nabla x \in Q$. De (1) et (2) on a $y \in Q$. Nous avons ainsi demontré que $\alpha(F(Q)) = Q$. Cela montre que α est une fonction surjective.
Soient $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(L)$ tels que $\alpha(D_1) \subseteq \alpha(D_2)$, c'est-à-dire $D_1 \cap B(L) \subseteq D_2 \cap B(L)$, donc $D_1 = F(D_1 \cap B(L)) \subseteq F(D_2 \cap B(L)) = D_2$. Cela montre que α est une fonction biyective et que $\alpha^{-1}(Q) = F(Q)$, $Q \in \mathbf{F}(B(L))$. □

Lemme 1.13 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ et $b \in B(L) \cap P$ alors $b \in F(\nabla P)$.*

Dém. Comme $b \in B(L) \cap P$ alors $b = \nabla b \in \nabla P \subseteq F(\nabla P)$. □
Il est facile a voir que:

Lemme 1.14 *(a) Si $b \notin P \in \mathbf{P}(L)$ et $b \in B(L)$ alors $\sim b \in P$.*

(b) Si F est un filtre propre de L et $b \in F \cap B(L)$ alors $\sim b \notin F$.

Lemme 1.15 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ alors $F(\nabla P) \in \mathbf{M}(L)$ et $F(\nabla P) \subseteq P$.*

Dém.

1) $F(\nabla P) \subseteq P$.
Montrons que (i) :$\nabla P \subseteq P$. Soit $t \in \nabla P$, alors $t = \nabla p$, où $p \in P$. Comme $p \leq \nabla p = t$ et P est un filtre alors $t \in P$. Comme (ii) P est un filtre, alors de (i) et (ii) on déduit 1).

2) Par le corollaire 1.1, $F(\nabla P)$ est un Δ-filtre. Montrons qu'il est un Δ-filtre maximal.
Supposons qu'il existe $M \in \mathbf{M}(L)$ tel que: (1) $F(\nabla P) \subset M$. Montrons que (2) $M \nsubseteq P$. D'après (1) il existe un élément $m \in L$ tel que (3) $m \in M - F(\nabla P)$, alors comme M es un Δ-filtre d'après (3) on déduit que (4) $\Delta m \in M$. Comme $\Delta m \leq m$, en tenant compte de (3) on a (5) $\Delta m \notin F(\nabla P)$.
Si (6) $M \subseteq P$, alors d'après (4), $\Delta m \in P$ et alors $\Delta m = \nabla \Delta m \in \nabla P$, donc $\Delta m \in F(\nabla P)$, ce qui est en contradiction avec (5).
D'aprés (2) il existe $z \in L$, tel que (7) $z \in M - P$, alors (8) $\Delta z \in M$, (9) $\Delta z \notin P$. D'après (8) en tenant compte du lemme 1.14 , b) on a (10) $\sim \Delta z \notin M$. D'aprés (9) et le lemme 1.14, (a) $\sim \Delta z \in P$, donc $\sim \Delta z = \nabla \sim \Delta z \in \nabla P$, et alors $\sim \Delta z \in F(\nabla P) \subseteq M$, ce qui est en contradiction avec (10).

□

Lemme 1.16 *Chaque filtre premier P d'une algèbre de Lukasiewicz L contient un et seulement un Δ-filtre maximal.*

Dém. Par le lemme 1.15 nous savons qu'il existe un Δ-filtre maximal contenue dans P, a savoir $F(\nabla P)$. Soient $M,\ M' \in \mathbf{M}(L)$ tels que $M \subseteq P$, $M' \subseteq P$ et $M \neq M'$. Alors il existe $x \in M - M'$ or il existe $x \in M' - M$. Si $x \in M - M'$ alors $\Delta x \in M$ et $\Delta x \notin M'$. Comme M' est un Δ-filtre maximal alors $L = D(M', \Delta x) = \{y \in L :\sim \Delta x \vee y \in M'\}$, donc $\sim \Delta x \in L = D(M', \Delta x)$, et c'est-à- dire $\sim \Delta x = \sim \Delta x \vee \sim \Delta x \in M'$, et comme $M' \subseteq P$ on a $\sim \Delta x \in P$. Comme $\Delta x \in M \subseteq P$, alors on a $\Delta x \in P$ et d'après le lemme 1.14 (b), $\sim \Delta x \notin P$. Contradiction. Si $x \in M' - M$, on arrive aussi a une contradiction.
□

Lemme 1.17 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ alors $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$.*

Dém. Supposons que (1) $F(\nabla P) \nsubseteq \varphi(P) = \mathcal{C} \sim P$, alors il existe (2) $m \in F(\nabla P)$, (3) $m \notin \varphi(P)$.
De (2) on déduit (4) $\Delta m \in F(\nabla P)$ et comme $\Delta m \leq m$ de (3) et (4) on a (5) $\Delta m \notin \varphi(P)$.
Comme L est une algèbre de Kleene nous savons que tout filtre premier P de L, est comparable avec $\varphi(P)$.
Si $P \subseteq \varphi(P)$, alors comme $F(\nabla P) \subseteq P$, nous avons $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$, ce qui est en contradiction avec (1). Alors (6) $\varphi(P) \subset P$.
Comme $\Delta m \vee \sim \Delta m = 1 \in \varphi(P)$ et $\varphi(P)$ est un filtre premier, alors en tenant compte de (5), on a $\sim \Delta m \in \varphi(P)$, donc par (6) on a $\sim \Delta m \in P$, d'où par (4)

$0 = \Delta m \wedge \sim \Delta m \in P$.

Démonstration de L. Monteiro. Soit $m \in \nabla P$, alors $m = \nabla p$, où $p \in P$. Comme $\sim p \vee \nabla p = 1 \in \varphi(P)$ et $\varphi(P)$ est un filtre premier alors $\sim p \in \varphi(P)$ ou $\nabla p \in \varphi(P)$. Si $\sim p \in \varphi(P) = \mathcal{C} \sim P$, donc $\sim p \notin \sim P$. Cette contradictiom montre que $m = \nabla p \in \varphi(P)$. Nous avons ainsi demontré que $\nabla P \subseteq \varphi(P)$, donc $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$. □

Lemme 1.18 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$, $P \subseteq \varphi(P)$, et $\nabla a \in P$, alors $a \in \varphi(P)$.*

Dém. De (1) $P \subseteq \varphi(P)$, et (2) $\nabla a \in P$. Supposons que (3)$a \notin \varphi(P)$, donc $a \in \sim P$, c'est-à-dire, (4) $\sim a \in P$.
De (2) et (4), on a: $a \wedge \sim a = \nabla a \wedge \sim a \in P$, donc $a \in P$, et alors par (1), $a \in \varphi(P)$, contradiction. □

Lemme 1.19 *Si L est une algèbre de Lukasiewicz et $P \in \mathbf{P}(L)$ alors $P \in \mathbf{M}(L)$ ou $\varphi(P) \in \mathbf{M}(L)$.*

Dém. Nous savons que (i) $\varphi(P) \subseteq P$ or (ii) $P \subseteq \varphi(P)$. Supposons que (i) $\varphi(P) \subseteq P$. Par le lemme 1.17, (1) $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$. Supposons que $F(\nabla P) \subset \varphi(P)$, alors il existe (2) $a \in \varphi(P)$ tel que (3) $a \notin F(\nabla P)$. Si $\sim \Delta a = \nabla \sim a \in P$ alors par le lemme 1.13, (4) $\nabla \sim a \in F(\nabla P)$. De (1) et (4) on déduit que $\nabla \sim a \in \varphi(P)$, et comme $\varphi(P) \subseteq \varphi(\varphi(P))$, alors par le lemme 1.18 on a $\sim a \in \varphi(P) \subseteq P$, cet qui est en contradiction avec (2). Comme $\Delta a \vee \sim \Delta a = 1 \in P \in \mathbf{P}(L)$ et $\sim \Delta a \notin P$, on déduit que $\Delta a \in P$, et alors $\Delta a = \nabla \Delta a \in F(\nabla P)$, donc comme $\Delta a \leq a$, nous avons $a \in F(\nabla P)$, ce qui est en contradiction avec (3). Alors $F(\nabla P) = \varphi(P)$. Nous avons ainsi vue que si $\varphi(P) \subseteq P$ alors $F(\nabla P) = \varphi(P)$ est l'unique Δ-filtre maximal contenue dans P. Analoguement si $P \subseteq \varphi(P) = Q$, alors $P = \varphi(P) \subseteq \varphi(P) = Q$, donc $\varphi(P) = Q$, est l'unique Δ-filtre maximal contenue dans $\varphi(P)$. □

Corollaire 1.2 $\mathbf{M}(L) \subseteq \mathbf{P}(L)$.

Dém. Soit M un Δ-filtre maximal, alors il existe $U \in \mathbf{U}(L)$ tel que (1) $M \subseteq U$. Comme $\mathbf{U}(L) \subseteq \mathbf{P}(L)$, alors U est un filtre premier et comme $\varphi(U)$ est comparable avec U, nous avons necessairement (2) $\varphi(U) \subseteq U$. Donc par le lemme 1.19 $\varphi(U)$ est un Δ-filtre maximal, et comme par le lemme 1.16 il existe un unique Δ-filtre maximal contenue dans U, on a $M = \varphi(U) \in \mathbf{P}(L)$. □

Il est bien connue que:

Lemme 1.20 *Si R est un réticulé distributif avec premier et dernier éléments (0 et 1 respectivement), alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) U est un filtre maximal de R.

b) Etant donnée $x \notin U$ il existe $u \in U$ tel que $x \wedge u = 0$.

Lemme 1.21 *Si R est un réticulé distributif avec premier et dernier éléments (0 et 1 respectivement), alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) P est un filtre premier minimal de R.

b) $P = R - I$, où I est un ideal maximal de R.

et les conditions suivantes sont équivalentes

c) I est un ideal maximal de R.

d) Etant donnée $p \notin I$ il existe $q \in I$ tel que $p \vee q = 1$.

Lemme 1.22 *I)* $\mathbf{p}(L) \subseteq \mathbf{D}(L)$; *II)* $\mathbf{p}(L) = \mathbf{M}(L)$.

Dém.

I) Soit $P \in \mathbf{p}(L)$. Si $0 \in \Delta P$, alors $0 = \Delta p$ où $p \in P$, donc par le lemme 1.21 il existe $q \notin P$ tel que $1 = p \vee q$, donc $1 = \Delta(p \vee q) = \Delta p \vee \Delta q = 0 \vee \Delta q = \Delta q \leq q$, et nous avons ainsi $q = 1 \in P$. Contradiction. Alors $0 \notin \Delta P$ alors en tenant compte du corollaire 1.1 et du lemme 1.8, nous avons que: (*) $F(\Delta P)$ est un Δ-filtre propre de L. Montrons que $P = F(\Delta P)$. Soit $p \in P$, comme $\Delta p \leq p$ et $\Delta p \in F(\Delta P)$ alors $p \in F(\Delta P)$, donc $P \subseteq F(\Delta P)$. Supposons que $P \subset F(\Delta P)$, alorts il existe (1) $x \in F(\Delta P)$, tel que (2) $x \notin P$. D'après (1) il existe $p \in P$ tel que (3) $\Delta p \leq x$. De (2) et (3) on déduit (4) $\Delta p \notin P$, et comme $\Delta p \vee \sim \Delta p = 1 \in P$, nous avons que (5) $\sim \Delta p \in P$. Comme $\Delta p \in F(\Delta P)$ et $P \subset F(\Delta P)$, d'après (5) on déduit $\sim \Delta p \in F(\Delta P)$, et alors $0 = \Delta p \wedge \sim \Delta p \in F(\Delta P)$, ce qui est en contradiction avec (*).

II) a) Soit $P \in \mathbf{p}(L)$ alors par I) P est un Δ-filtre. Supposons qu'il existe $M \in \mathbf{M}(L)$ tel que $P \subset M$, alors il existe (1) $x \in M$ tel que (2) $x \notin P$. Alors (3) $\Delta x \in M$ et (4) $\Delta x \notin P$. Comme $\Delta x \vee \sim \Delta x = 1 \in P$, d'après (4) on a $\sim \Delta x \in P$, et alors (5) $\sim \Delta x \in M$. De (3) et (5): $0 = \Delta x \wedge \Delta x \in M$. Contradiction.

b) Soit $M \in \mathbf{M}(L)$ alors par le corollaire 1.2, $M \in \mathbf{P}(L)$. Si $M \notin \mathbf{p}(L)$, alors il existe (1) $P \in \mathbf{p}(L)$ tel que (2) $P \subset M$. De (1) il résulte par II) a) que $P \in \mathbf{M}(L)$, c'est qui est en contradiction avec (2).

□

Corollaire 1.3 *Chaque filtre premier d'une algèbre de Lukasiewicz contient un unique filtre premier minimal.*

Dém. D'après le lemme 1.16 chaque filtre premier contient un et seulement un Δ-filtre maximal, et d'après le lemme 1.22, (II) la famille des Δ-filtres maximales coïncide avec la famille des filtres premiers minimales. □

Lemme 1.23 *Si $P \in \mathbf{p}(L)$ et $P \notin \mathbf{U}(L)$ alors il existe un et seulement un $P' \in \mathbf{P}(L)$ tel que $P \subset P'$, et plus précisement $P' = \varphi(P)$.*

Dém. Soit $P \in \mathbf{p}(L)$, nous savons que (1) $\varphi(P) \subset P$ ou (2) $P \subseteq \varphi(P)$. Comme $\varphi(P) \in \mathbf{P}(L)$ et P est un filtre premier minimal la condition (1) ne peut pas être vérifiée. Soit $U \in \mathbf{U}(L)$, tel que $\varphi(P) \subseteq U$, alors $\varphi(U) \subseteq \varphi(\varphi(P)) = P$, donc comme P est un filtre premier minimal on doit avoir $\varphi(U) = P$, donc $U = \varphi(P)$.
Alors $\varphi(P)$ est un ultrafiltre qui contient P. On ne peut pas avoir $\varphi(P) = P$, car par hypothèse $P \notin \mathbf{U}(L)$, alors :

$$P \subset \varphi(P) \text{ et } \varphi(P) \text{ ultrafiltre.}$$

Soit $P' \in \mathbf{P}(L)$ tel que (3) $P \subset P'$. Nous allons montrer que (4) $P' \subseteq U = \varphi(P)$. En effet si $P' \not\subseteq U$ il existe (5) $p' \in P'$ tel que (6) $p' \notin U$. De (6) , voir lemme 1.20 , on déduit qu'il il existe (7) $u \in U$ tel que (8) $u \wedge p' = 0$. Si $u \in P'$ alors $0 = u \wedge p' \in P'$, et alors $P' = L$, contradiction. Comme $P' \in \mathbf{P}(L)$ alors par le lemme 1.15:

$$(9)\ F(\nabla P') \in \mathbf{M}(L) \text{ et } (10)\ F(\nabla P') \subseteq P'.$$

Par le lemme 1.22, (II), $\mathbf{p}(L) = \mathbf{M}(L)$, alors (11) $P \in \mathbf{M}(L)$. D'après le lemme 1.16 nous savons que chaque filtre premier d'une algèbre de Łukasiewicz contient un et seulement un Δ-filtre maximal, alors de (9), (10), (11) et (3), on a: (12) $F(\nabla P') = P$.
De (5) on a (13) $\nabla p' \in \nabla P' \subseteq F(\nabla P') = P$. Comme $P \subseteq \varphi(P) = U$ et $P \in \mathbf{M}(L)$, on a d'après le lemme 1.16 $P = F(\nabla U) \subseteq U$.
De (7) on a (14) $\nabla u \in F(\nabla U) = P$, et de (8), (13) et (14): $0 = \nabla 0 = \nabla(u \wedge p') = \nabla u \wedge \nabla p' \in P$, contradiction. Alors $P' \subseteq U = \varphi(P)$.
Supposons que $P' \subset U = \varphi(P)$, alors nous avons $P \subset P' \subset U$, donc $P = \varphi(U) \subset \varphi(P') \subset \varphi(P) = U$. De $\varphi(P') \subset U$, on déduit qu'il existe $u \in U$ tel que $u \notin \varphi(P')$.
Nous savons que P' et $\varphi(P')$ sont comparables. Supposons que $P' \subseteq \varphi(P')$. Comme $u \wedge \sim u \leq u$ alors: (i) $\sim u \wedge \nabla u = u \wedge \sim u \notin \varphi(P')$. De $u \notin \varphi(P')$ on déduit $\sim u \in P'$ et comme $\nabla u \in F(\nabla U) = P \subset P'$, alors $\sim u \wedge \nabla u \in P' \subseteq \varphi(P')$ ce qui est en contradiction avec (i).
Si $\varphi(P') \subseteq P'$, on arrive aussi a une contradiction.
Alors $U = \varphi(P)$ est l'unique filtre premier qui contient a P comme partie propre. □

Corollaire 1.4 *Si $P \in \mathbf{p}(L)$ et $P \notin \mathbf{U}(L)$ alors l'unique filtre propre F qui contient P comme partie propre est $F = \varphi(P)$.*

Dém. Soit F un filtre propre tel que: (1) $P \subset F$, et supposons que $F \notin \mathbf{U}(L)$, alors il existe (2) $U \in \mathbf{U}(L)$ tel que (3) $F \subset U$. De (1) et (3) on a: $P \subset U$, d'où l'on déduit d'après le lemme 1.23 que $U = \varphi(P)$. Soit (4) $x \in U - F$. Comme $F = \bigcap\{P' : P' \in \mathbf{P}(L), F \subseteq P'\}$ et $x \notin F$, alors il existe $P' \in \mathbf{P}(L)$ tel que (5) $F \subseteq P'$ et (6) $x \notin P'$. De (4) et (6) on a (6) $P' \neq U = \varphi(P)$. De (1) et (2): (7) $P \subset P'$. Alors il existe un filtre premier P', diferent de $\varphi(P)$ qui contient P comme partie propre, c'est qui est impossible par le lemme 1.23.

□

Rappellons: Si R est un réticulé distributif fini non trivial, c'est-à-dire avec plus qu'un élément, nous répresenterons par $\Pi = \Pi(R)$ l'ensemble ordonné des éléments premiers de R.

Théorème 1.1 *Si R et R' sont des réticulés distributifs finis, non triviales, telles $\Pi = \Pi(R)$, $\Pi' = \Pi(R')$ sont des ensembles ordonnés isomorphes alors R et R' sont réticulés isomorphes.*

Dém. Soit $f : \Pi \rightarrow \Pi'$ un isomorphisme d'ordre et posons par définition:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \\ \bigvee\{f(p) : p \in \Pi, p \leq x\}, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Alors on peut montrer que $H : R \rightarrow R'$ est un isomorphisme de réticulé et que $H(p) = f(p)$, pour tout $p \in \Pi$. □

Corollaire 1.5 *Tout réticulé distributif fini R est déterminé , à isomorphisme près, par l'ensemble $\Pi = \Pi(R)$ des ses éléments premiers.*

Soit X un ensemble ordonné, un sous-ensemble Y de X s'appelle *section inférieure de X*, si $Y = \emptyset$ ou si verifie *Si $y \in Y$ et $x \leq y$ alors $x \in Y$.* Les sous-ensembles $(x] = \{y \in X : y \leq x\}$ sont des sections inférieures de X.
Nous répresenterons par $\mathbf{S}(X)$ l'ensemble de toutes les sections inférieures de X.

Théorème 1.2 *Si X est un ensemble ordonné fini, il existe un réticulé distributif fini R tel que les ensembles ordonnés X et $\Pi(R)$ sont isomorphes.* (G. Birkhoff.)

Dém. Il est bien connue que $(\mathbf{S}(X), \cap, \cup, \emptyset, X)$ est un réticulé distributif avec premier et dernier élément. Comme X est fini alors le réticulé distributif $\mathbf{S}(X)$ est aussi fini.
Il est facile à montrer que $\Pi(\mathbf{S}(X)) = \{(x] : x \in X\}$, et que si nous posons $\beta(x) = (x]$, pour tout $x \in X$ alors β est un isomorphisme d'ordre de X dans $\Pi(\mathbf{S}(X))$. □

Définition 1.4 *Soit X un ensemble ordonné fini. Nous dirons que $x \in X$ est lié à $y \in X$, s'il existe une suite finie $a_1, a_2, \cdots, a_n$ d'éléments de X tels que $a_1 = x, a_n = y$, et a_i est comparable avec a_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$. Pour indiquer que a est comparable avec b, nous écrirons $a \parallel b$, et pour indiquer que x est lié à y nous écrirons $x \approx y$.*

Si $x \neq y$ $x, y \in X$, on peut supposer que les éléments a_i, $1 \leq i \leq n$, verifient $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.
Il est bien connu que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence définie sur X. Soit $K(x) = \{y \in X : y \approx x\}$ la célule d'équivalence qui contient l'élément $x \in X$. Observons que: Si $y \notin K(x)$, alors y est incomparable avec tous les éléments de $K(x)$.
Soient $K(x_1), K(x_2), \ldots, K(x_n)$ les célules d'equivalence. Il est bien connue que les sous-ensembles $K(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, de X sont des ensembles ordonnés connexes, qu'on peut nommer aussi les *composantes connexes de X*, et que l'ensemble ordonné X est la *somme cardinale* des ensembles ordonnés $K(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, c'est-á-dire:

$$X = \sum_{i=1}^{n} K(x_i).$$

Observons encore que les ensembles $K(x_i)$ sont non seulement ***disjoints deux à deux***, mais chaque élément (*) $a \in K(x_i)$ est incomparable avec tout $b \in K(x_j)$ si $i \neq j$.
Nous pouvons supposer que les éléments x_i, $1 \leq i \leq n$ sont des éléments maximales de l'ensemble ordonné X. En effet chaque $K(x_i)$ est un ensemble ordonné fini, alors il exist $m \in K(x_i)$, m élément maximal de $K(x_i)$. Voyons que m est aussi un élément maximal de X. En effet si $x \in X$ vérifie $m \leq x$, comme $m \in K(x_i)$, alors d'après (*) m est incomparable avec tout élément $y \in K(x_j)$, $j \neq i$, donc $x \in K(x_i)$ et comme m est un élément maximal de $K(x_i)$ on a $x_i = m$. Cela montre que m est un élément maximal de X. Alors on peut écrire:

$$X = \sum_{i=1}^{n} K(x_i),$$

où les x_i, $1 \leq i \leq n$ sont des éléments maximales de l'ensemble ordonné X.

Lemme 1.24 *Si R est un réticulé distributif fini, non trivial, dont l'ensemble ordonné $\Pi = \Pi(R)$ des éléments premiers est isomorphe à l'ensemble ordonné $X = X_1 + X_2$ et si R_i; $i = 1, 2$ est un réticulé distributif dont l'ensemble des éléments premiers est isomorphe a X_i; $i = 1, 2$ alors R* est isomorphe à $R_1 \times R_2$.

Si R est un réticulé distributif fini, alors nous savons que $P \in \mathbf{P}(R)$ si et seulement si $P = F(p) = \{x \in R : p \leq x\}$, où $p \in \Pi = \Pi(R)$.
Soit A est une algèbre de De Morgan, dans ce cas la transformation φ de *Birula-Rasiowa* de $\mathbf{P}(A)$ dans $\mathbf{P}(A)$, induit une transformation ψ de $\Pi = \Pi(A)$ dans Π de la manière suivante: $\psi(p) = q$, si et seulement si $\varphi(F(p)) = F(q)$.
La transformation ψ a les propriétés suivantes:

1) $\psi(\psi(p)) = p$, quelque soit $p \in \Pi$.

2) $p \leq q$ si et seulement si $\psi(q) \leq \psi(p)$, où $p, q \in \Pi$.

Cela signifie que ψ est anti-isomorphisme de l'ensemble ordonné Π sur Π de période 2. Nous dirons que le couple $(\Pi(A), \psi)$ est *le système déterminant* de l'algèbre A.

Définition 1.5 *On appelera espace de Birula-Rasiowa a tout couple (X, α) formé par un ensemble ordonné X et une transformation α de X dans X telle que:*

1) $\alpha(\alpha(x)) = x$, quelque soit $x \in X$.

2) $x \leq y$ si et seulement si $\alpha(y) \leq \alpha(x)$, où $x, y \in X$.

Il est claire que α est une application biunivoque de X sur X, et que le système déterminant d'une algèbre de De Morgan est un espace de Birula-Rasiowa.

Définition 1.6 *Deux espaces de Birula-Rasiowa (X, α), (X', α') seront dits isomorphes s'il existe un isomorphisme d'ordre f de X sur X' tel que $f(\alpha(x)) = \alpha'(f(x))$ pour tout $x \in X$.*

Théorème 1.3 *Si $(A,\sim)$ est une algèbre de De Morgan finie, non triviale, et si $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ est sont système déterminant alors:*

$$\sim x = \bigvee\{p \in \Pi : \psi(p) \not\leq x\}.$$

[10], [11], [14].

Si nous posons $\Pi_x = \{p \in \Pi : p \leq x\}$ alors L. Monteiro à montré que :

Lemme 1.25 *Si $(A,\sim)$ est une algèbre de De Morgan finie, non triviale, et si $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ est sont système déterminant alors:*

$$\sim x = \bigvee\{p \in \Pi : p \in \psi(\Pi - \Pi_x)\} = \bigvee\{p : p \in \Pi - \psi(\Pi_x)\} = \bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_x\}.$$

Dém. Comme ψ est un bijection alors $\psi(\Pi - \Pi_x) = \psi(C\Pi_x) = \psi(\Pi) \cap \psi(C\Pi_x) = \Pi \cap C\psi(\Pi_x) = \Pi - \psi(\Pi_x)$. Alors: $\sim x = \bigvee\{p \in \Pi : p \in \psi(\Pi - \Pi_x)\} = \bigvee\{p : p \in \Pi - \psi(\Pi_x)\}$.
Comme les conditions (1) $p \in \psi(\Pi - \Pi_x)$, (2) $p = \psi(q)$, $q \in \Pi - \Pi_x$, alors $\sim x = \bigvee\{p \in \Pi : p \in \psi(\Pi - \Pi_x)\} = \bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_x\}$.
Nous savons que:

$$F(\sim x) = \bigcap\{P : P \in \mathbf{P}(A), \sim x \in P\} = \bigcap\{F(p) : p \in \Pi(A), \sim x \in F(p)\} =$$

$$\bigcap\{F(p) : p \in \Pi(A),\ \ x \notin \varphi(F(p))\} = \bigcap\{F((\psi(q)) : q \in \Pi(A),\ \ x \notin \varphi(F(q))\} =$$

$$\bigcap\{F((\psi(q)) : q \in \Pi(A),\ \ q \in \Pi - \Pi_x\},$$

et alors $\sim x = \bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_x\}$. □

Théorème 1.4 *Si $(A,\sim)$ et $(A',\sim')$ sont des algèbres de De Morgan finies,non triviales, telles que leurs systèmes déterminants $(\Pi = \Pi(A), \psi)$, $(\Pi' = \Pi(A'), \psi')$ soient des espaces de Birula-Rasiowa isomorphes, alors les algèbres de De Morgan $(A,\sim)$ et $(A',\sim')$ sont isomorphes.*

Dém. Soit $f : \Pi \to \Pi'$ un isomorphisme, c'est-à-dire f est un isomorphisme d'ordre et $f(\psi(p)) = \psi'(f(p))$, pour tout $p \in \Pi$. Nous savons dejá que la transformation $H : A \to A'$ définie comme dans le théorème 1.1 est un isomorphisme de réticulé. Montrons que: (*) $H(\sim x) = \sim H(x)$ pour tout $x \in A$. Si $x = 0$ alors $H(\sim 0) = H(1) = 1 = \sim 0 = \sim H(0)$. Supposons maintenant que $x \neq 0$, alors:

$$H(\sim x) = H(\bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_x\} =$$

$$\bigvee\{H(\psi(q)) : q \in \Pi - \Pi_x\} = \bigvee\{f(\psi(q)) : q \in \Pi - \Pi_x\},$$

et

$$\sim H(x) = \bigvee\{\psi'(q') : q' \in \Pi' - \Pi_{H(x)}\}.$$

Soient $U = \{f(\psi(q)) : q \in \Pi - \Pi_x\}$, et $V = \{\psi'(q') : q' \in \Pi' - \Pi_{H(x)}\}$. Montrons que $U = V$, d'où l'on déduit (*).
Soit $u \in U$ alors $u = f(\psi(q))$, où (1) $q \in \Pi - \Pi_x$, alors $u = \psi'(f(q)) = \psi'(q')$ où $q' = f(q) \in \Pi'$. Nous savons que

$$(2)\quad H(x) = H(\bigvee\{s : s \in \Pi_x\} = \bigvee\{H(s) : s \in \Pi_x\} = \bigvee\{f(s) : s \in \Pi_x\}.$$

Si $q' \in \Pi_{H(x)}$, alors $q' \in \Pi'$ et $q' \leq H(x)$, alors par (2) il existe $s_0 \in \Pi$, (3) $s_0 \leq x$, tel que $f(q) = q' \leq f(s_0)$, et alors :

$$f(\psi(s_0)) = \psi'(f(s_0)) \leq \psi'(f(q)) = f(\psi(q)),$$

et comme f est un isomorphisme d'ordre $\psi(s_0) \leq \psi(q)$, donce (4) $q \leq s_0$.
De (3) et (4) on a $q \leq x$ et comme $q \in \Pi$, $q \in \Pi_x$ contradiction. Alors $q' \in \Pi' - \Pi_{H(x)}$ et alors $u = \psi'(q') \in V$. Reciproquement si $v \in V$, alors $v = \Psi'(q')$ où $q' \in \Pi' - \Pi_{H(x)}$. Comme f est une function surjective alors $q' = f(q)$, où $q \in \Pi$, alors $v = \psi'(f(q)) = f(\psi(q))$. Si $q \in \Pi_x$ alors $q \leq x$, donc $q' = f(q) = H(q) \leq H(x)$ c'est-à-dire $q' \in \Pi_{H(x)}$, contradiction. □

Corollaire 1.6 *Toute algèbre de De Morgan finie, non triviale, $(A, \sim)$ est determinée, à un isomorphisme près, par son système déterminat $(\Pi = \Pi(A), \psi)$.*

Ce dernier résultat a été énoncé en 1960, [10] et sa démonstration a été présentée dans notre cours de 1962, [11] (voir aussi [14]) à l'Universidad Nacional del Sur. La démonstration que nous avons presentée était d'ailleurs très compliquée.

Théorème 1.5 *Si (X, α) est un espace de Birula-Rasiowa fini, il existe une algèbre de De Morgan $(A, \sim)$ finie, telle que son système déterminat $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ est un espace de Birula-Rasiowa isomorphe à (X, α).*

Dém. Nous savons que $\mathbf{S}(X)$ est un réticulé distributif tel que $\Pi(\mathbf{S}(X))$ est un ensemble ordonné isomorphe a X. La transformation $\alpha : X \to X$ induit une transformation $\psi : \Pi(\mathbf{S}(X)) \to \Pi(\mathbf{S}(X))$ de la manière suivante: $\psi((x]) = (\alpha(x)]$, pour tout $x \in X$. Pour chaque section inférieure Y de X posons (voir lemme 1.25):

$$\sim Y = \bigcup\{\psi((x]) : (x] \in \Pi(\mathbf{S}(X)) - \Pi_Y\}.$$

Alors il est facile a voir que $\sim Y = X - \alpha(Y)$. Nous allons montrer que $\sim Y$ est une section inférieure de X. En effet si $\sim Y = X - \alpha(Y) = \emptyset$, alor $\sim Y$ est une section inférieure. Si $\sim Y = X - \alpha(Y) \neq \emptyset$, soit (1) $p \in X - \alpha(Y)$, et $x \in X$ tel que $x \leq p$. Donc (2) $\alpha(p) \leq \alpha(x)$. Si $x \notin X - \alpha(Y)$, alors $x \in \alpha(Y)$ c'est-à- dire $x = \alpha(y')$, où $y' \in Y$, donc (3) $\alpha(x) = y' \in Y$. Comme $Y \in \mathbf{S}(X)$ alors d'après (1) et (2) on déduit que $\alpha(p) \in Y$ et alors $p = \alpha(\alpha(p)) \in \alpha(Y)$, c'est qui est en contradiction avec (1). On a encore que:

1) $\sim X = X - \alpha(X) = X - X = \emptyset$.

2) $\sim (\sim Y) = X - \alpha(\sim Y) = X - \alpha(X - \alpha(Y))$. Alors comme α est une bijection de période 2, on a: $\sim (\sim Y) = X - (\alpha(X) - Y = X - (X - Y) = X \cap Y = Y$.

3) Comme α est biunivoque alors $\sim (Y \cap Z) = X - \alpha((Y \cap Z) = X - (\alpha(Y) \cap \alpha(Z)) = (X - \alpha(Y)) \cup (X - \alpha(Z)) = \sim Y \cup \sim Z$.

Alors $(\mathbf{S}(X), \sim)$ est une algèbre de De Morgan. Voyons que les espaces de Birula-Rasiowa (X, α) et $(\Pi(\mathbf{S}(X)), \psi)$ sont isomorphes. Nous savons dejá que la transformation $\beta : X \to \Pi(\mathbf{S}(X))$, défine par $\beta(x) = (x]$, $x \in X$ est un isomorphisme d'ordre. D'après la définition de ψ, on a: $\beta(\alpha(x)) = (\alpha(x)] = \psi((x]) = \psi(\beta(x))$, ce qui termine la démonstration. □

Soit A une algèbre de De Morgan finie, non triviale, $\Pi = \Pi(A)$ l'ensemble de ses éléments premiers et $\Pi = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i $1 \leq i \leq n$, où X_i sont les composantes connexes de Π. En général si $p \in X_i$ on ne peut pas affirmer que $\psi(p) \in X_i$, mais dans les algèbres de Kleene finies nous avons:

$$\psi(X_i) = X_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

car $\psi(p) \parallel p$ pour tout $p \in \Pi$.

Soit A une algèbre de De Morgan finie, non triviale, $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ son système déterminant et $\Pi = \sum_{i=1}^{n} K(p_i)$. Il est claire que si $p, q \in \Pi$, $p \approx q$, alors $\psi(p) \approx \psi(q)$, donc:

I) si $\psi(p) \in K(p)$ on a $\psi(K(p)) = K(p)$.

II) si $q = \psi(p) \notin K(p)$ on a $\psi(K(p)) = K(q)$, et $\psi(K(p) + K(q)) = K(p) + K(q)$.

Nous dirons que $(K(p), \psi)$ et $(K(p) + K(q), \psi)$ sont des composantes ψ-connexes de (Π, ψ), et que les espaces de Birula-Rasiowa

$$(K(p), \psi), \quad (K(p) + K(q), \psi)$$

sont indécomposables.

Dans le cas où A est une algèbre de Kleene toute composante connexe de $\Pi(A)$ est une composante ψ-connexe de $\Pi(A)$.

Lemme 1.26 *Si A est une algèbre de De Morgan, non triviale, dont leur système déterminant $(\Pi = \Pi(R), \psi)$ est isomorphe à l'espace de Birula- Rasiowa (X, α) où $X = X_1 + X_2$, $\alpha(X_1) = X_1$, $\alpha(X_2) = X_2$ et si A_i; $i = 1, 2$ est une algèbre de De Morgan dont le système déterminant $(\Pi(A)_i, \psi_i)$ est isomorphe a (X_i, α); $i = 1, 2$, alors A est isomorphe à $A_1 \times A_2$.*

Définition 1.7 *On appelera espace de Kleene a toute espace de Birula-Rasiowa (X, α) où chaque $x \in X$ est comparable avec $\alpha(x)$.*

Lemme 1.27 *Pour qu'une algèbre de De Morgan finie A soit une algèbre de Kleene il faut et il suffit que son système déterminant $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ soit un espace de Kleene.*

Dém. Il est claire que la condition est nécessaire. Voyons que est suffisante. Si $y \wedge \sim y = 0$, alors la condition de Kleene est verifiée. Supposons que $y \wedge \sim y \neq 0$. Por voir que la condition de Kleene est verifiée il est suffisant de montrer que:

$$\{p \in \Pi : p \leq y \wedge \sim y\} \subseteq \{q \in \Pi : q \leq z \vee \sim z\}$$

Soit $p \in \Pi$ tel que (1) : $p \leq y \wedge \sim y$. Par hyphotèse (2) $\psi(p) \leq p$, or (3) $p \leq \psi(p)$. Si (2) est verifiée alors d'après (1) on a : $\psi(p) \leq y \wedge \sim y$, alors en particulier $\psi(p) \leq \sim y = \bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi - \Pi_y\}$, d'où l'on déduit, car $\psi(p) \in \Pi$, que $\psi(p) \leq \psi(q_0)$, où $q_0 \in \Pi - \Pi_y$. Alors $q_0 \leq p$ et d'après (1) on a $q_0 \leq y \wedge \sim y \leq y$, donc $q_0 \in \Pi_y$, contradiction. Alors la condition (3) doit être verifiée. Si $\psi(p) \not\leq z$ alors $\psi(p) \in \Pi - \Pi_z$, donc (4) : $\psi(p) \leq \sim z \leq z \vee \sim z$. De (3) et (4) on a $p \leq z \vee \sim z$. Si $\psi(p) \leq z$, alors $p \leq z \leq z \vee \sim z$. □

Théorème 1.6 *Si $(A, \sim)$ et $(A', \sim')$ sont des algèbres de Kleene finies, non triviales, telles que leurs systèmes déterminants $(\Pi = \Pi(A), \psi)$, $(\Pi' = \Pi(A'), \psi')$ soient des espaces de Kleene isomorphes, alors les algèbres de Kleene $(A, \sim)$ et $(A', \sim')$ sont isomorphes.*

Corollaire 1.7 *Toute algèbre de Kleene finie, non triviale, $(A, \sim)$ est déterminée, à un isomorphisme près, par son système déterminat $(\Pi = \Pi(A), \psi)$.*

Théorème 1.7 *Si (X, α) est un espace de Kleene fini, il existe une algèbre de Kleene $(A, \sim)$ finie, telle que son système déterminat $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ est un espace de Kleene isomorphe à (X, α).*

Observation 1.2 *1) Si $X = \{x\}$, alors $\alpha(x) = x$, et $A = \{0, 1\}$, où $0 < 1$, $\sim 0 = 1$ et $\sim 1 = 0$.*

2) Si $X = \{x, y\}$, où $x < y$, $\alpha(x) = y$ et $\alpha(y) = x$, alors $A = \{0, c, 1\}$, où $0 < c < 1$, $\sim 0 = 1$, $\sim 1 = 0$, et $\sim c = c$.

Soit L une algèbre de Lukasiewicz finie, alors $(\mathbf{P}(L), \subseteq)$ est un ensemble ordonné fini, donc:

$$\mathbf{P}(L) = \sum_{i=1}^{n} K(P_i),$$

où les P_i, $1 \leq i \leq n$ sont des éléments maximales de l'ensemble ordonné $(\mathbf{P}(L), \subseteq)$. Nous allons montrer que $K(P) = \{P, \varphi(P)\}$, quelque soit $P \in \mathbf{P}(L)$, P élément maximal de $\mathbf{P}(L)$, c'est-à-dire $P \in \mathbf{U}(L)$. Comme $U \parallel \varphi(U)$, quelque soit $U \in \mathbf{U}(L)$, alors $K(U) = \{U, \varphi(U), \ldots\}$.
Il est claire que $\mathcal{V} = \{U \in \mathbf{U}(L) : U \in \mathbf{p}(L)\}$, $\mathcal{W} = \{U \in \mathbf{U}(L) : U \notin \mathbf{p}(L)\}$, est une bipartition de l'ensemble $\mathbf{U}(L)$.

Si $U \in \mathcal{V}$, (1) $U \in \mathbf{U}(L)$ et (2) $U \in \mathbf{p}(L)$. Comme L est une algèbre de Kleene alors (3) $U \subseteq \varphi(U)$ or (4) $\varphi(U) \subseteq U$. De (1) et (4) or de (2) et (4) on a: $U = \varphi(U)$. Soit $P \in K(U)$, où $U \in \mathcal{V}$, alors il existe une suite $P_1, P_2, \ldots, P_n$ d'éléments de $\mathbf{P}(L)$ tels que: $P_1 = U$, $P_n = P$, et $P_i \parallel P_{i+1}$, $P_i \neq P_{i+1}$ $1 \leq i \leq n-1$. Par hypothèse $U \parallel P_2$, alors si $U \subseteq P_2$, comme U est un ultrafiltre on a: $P_2 = U$. Si $P_2 \subseteq U$, comme U est un filtre premier minimal on a: $P_2 = U$. Alors $P = U$, quelque soit $P \in K(U)$, donc $K(U) = \{U\}$.

Si $U \in \mathcal{W}$, (1) $U \in \mathbf{U}(L)$ et (2) $U \notin \mathbf{p}(L)$, alors il existe (3) $M \in \mathbf{p}(L)$ tel que (4) $M \subset U$, alors $M \in K(U)$. D'après (4) nous avons que $M \notin \mathbf{U}(L)$. Par le corollaire 1.4 nous savons que (6) $\varphi(M)$ est l'unique filtre propre qui contient a M comme partie propre. De(5) et (6) on déduit que $U = \varphi(M)$, c'est-à-dire $M = \varphi(U)$. Voyons que dans ce cas:

Lemme 1.28 *i) Si $Q \parallel U$ et $Q \neq U$ alors $Q = M$.*

ii) Si $Q \parallel M$ et $M \neq Q$ alors $Q = U$.

iii) Si $U \in \mathcal{W}$ alors $K(U) = \{U, \varphi(U)\}$.

Dém.

i) Comme $Q \parallel U$, $Q \neq U$ et U est un ultrafiltre de L alors $Q \subset U$.
Si $Q \notin \mathbf{p}(L)$, alors il existe $P_1 \in \mathbf{p}(L)$ tel que $P_1 \subset Q \subset U$, c'est qui est impossible par le corollaire 1.3. Alors nous avons $Q \in \mathbf{p}(L)$, donc: Q, $M \subset U$, Q, $M \in \mathbf{p}(L)$, $Q, M \notin \mathbf{U}(L)$ et alors par le corollaire 1.4, $Q = M = \varphi(M)$.

ii) D'après $Q \parallel M$, nous avons $Q \subseteq M$ or $M \subseteq Q$, et comme $Q \neq M$, nous avons plus précisement $Q \subset M$ or $M \subset Q$. Mais M est un filtre premier minimal alors on doit avoir $M \subset Q$. De (4) on déduit que $M \notin \mathbf{U}(L)$ et comme $M \in \mathbf{p}(L)$ on déduit par le corollaire 1.4 que $Q = U$.

iii) Soit $U \in \mathcal{W}$ et $P \in K(U)$, alors il existe une suite $P_1, P_2, \ldots, P_n$ d'éléments de $\mathbf{P}(L)$ tels que: $P_1 = U$, $P_n = P$, et $P_i \parallel P_{i+1}$, $P_i \neq P_{i+1}$ $1 \leq i \leq n-1$. Comme $P_2 \parallel U$, $P_2 \neq U$, alors d'après (i) $P_2 = M$. Comme $M = P_2 \parallel P_3$ et $P_2 \neq P_3$, alors d'aprȩ̀s (ii) on a $P_3 = U$. Alors $K(U) = \{U, \varphi(U)\}$.

□

Alors si L est une algèbre de Lukasiewicz finie les composantes connexes de $\mathbf{P}(L)$ sont de la forme (A) $\{F(p)\} = \{\varphi(F(p))\}$ ou de la forme (B) $\{F(p), \varphi(F(p))\}$, où $p \in \Pi$, p élément minimal de Π. Alors l'ensemble ordonné Π est la somme cardinale d'ensembles ordonnés Π_i, $1 \leq i \leq n$ où chaque Π_i est une chaîne avec une ou deux éléments. Observons encore que dans le cas (A), comme $F(p) = \varphi(F(p))$ alors $\psi(p) = p$, et dans le cas (B) $F(q) = \varphi(F(p)) \subset F(p)$ alors $p < q$ et $\psi(q) = p$.

Observons que si L est une algèbre de Lukasiewicz on a:

$$\nabla x = \bigwedge\{b \in B(L) : x \leq b\}; \quad \Delta x = \bigvee\{b \in B(L) : b \leq x\}, \quad x \in L$$

Théorème 1.8 *Si A, A' sont des algèbres de Lukasiewicz finies, non triviales, telles que leurs systèmes déterminants $(\Pi = \Pi(A), \psi)$, $(\Pi' = \Pi(A'), \psi')$ soient des espaces de Kleene isomorphes, alors les algèbres de Lukasiewicz A et A' sont isomorphes.*

Dém. Nous savons que la fonction $H : A \to A'$ définie comme dans le théorème 1.1 est un isomorphisme de l'algèbre de Kleene A dans l'algèbre de Kleene A' (voir théorèmes 1.4, 1.6).
Voyons que H vérifie (*) $H(\nabla x) = \nabla H(x)$, pour tout $x \in A$. Il est claire que si $x = 0$, (*) est vérifiée. Supposons que $x \neq 0$. $H(\nabla x) = H\bigwedge\{b : b \in B(K),\ x \leq b\} = \bigwedge\{H(b) : b \in B(K),\ x \leq b\}$ et $\nabla H(x) = \bigwedge\{b' : b' \in B(L'),\ H(x) \leq b'\}$. Montrons que $\{H(b) : b \in B(K),\ x \leq b\} = \{b' : b' \in B(L'),\ H(x) \leq b'\}$, dóu l'on déduit (*).
Soit $y \in \{H(b) : b \in B(K),\ x \leq b\}$, donc $y = H(b)$, où $b \in B(K)$, $x \leq b$. Comme H est un isomorphisme de réticulé et $b \in B(L)$, alors $y = H(b) \in B(L')$ et $H(x) \leq H(b) = y$. Reciproquement si $b' \in B(L')$ et $H(x) \leq b'$, comme H est surjective $b' = H(b)$, où $b \in B(L)$, nous avons ainsi que $H(x) \leq H(b)$, d'où l'on déduit que $x \leq b$. □

Corollaire 1.8 *Toute algèbre de Lukasiewicz finie, non triviale, est déterminée , à un isomorphisme près, par son système déterminant.*

Rappellons la définition et le résultat suivant (voir [3], [4]) : Si K est une algèbre de Kleene, nous dirons que l'ensemble $B(K)$ des éléments booléens de K, qui est une algébre de Boole, est:

- *relativement complète supérieurement* si vérifiee: Si $x \in K$ alors il existe $\bigwedge\{b \in B(K) : x \leq b\}$ dans $B(K)$ et $\nabla x = \bigwedge\{b \in B(K) : x \leq b\}$.
- *séparateure* si vérifie: Si $x, y \in K$ et $y \not\leq x$, alors il existe $b \in B(K)$ tel que $x \leq b$ and $y \not\leq b$, or il existe $b' \in B(K)$ tel que $b' \leq y$ and $b' \not\leq x$.

Théorème 1.9 *Si K est une algèbre de Kleene telle que la famille $B(K)$ de ses éléments booléens est relativement complète supérieurement et séparateure, alors il existe une unique estructure d'algèbre de Lukasiewicz sur K,* [3].

Observons que les opérations de possibilité et de nécéssité sont définies par:

$$\nabla x = \bigwedge\{b \in B(K) : x \leq b\}; \quad \Delta x = \bigvee\{b \in B(K) : b \leq x\}, \ \ x \in K$$

Lemme 1.29 *Si K est une algèbre de Kleene finie, non triviale, dont leur système déterminant $(\Pi = \Pi(K), \psi)$ est isomorphe à l'espace de Kleene (X, α) où $X = X_1 + X_2$, (alors $\alpha(Xi) = X_i$, $i = 1, 2$) et si K_i $i = 1, 2$ est une algèbre de Kleene dont le système déterminant $(\Pi(K_i), \psi_i)$ est isomorphe a (X_i, α), $i = 1, 2$ alors K est isomorphe à $K_1 \times K_2$.*

Lemme 1.30 *Si K_1, K_2 sont des algèbres de Kleene finies et $B(K_1), B(K_2)$ sont relativement complètes supérieurement et séparateures, alors $K_1 \times K_2$ est une algèbre de Kleene et $B(K_1 \times K_2)$ est relativement complète supérieurement et séparateure.*

Théorème 1.10 *Si (X, α) est un espace de Kleene fini tel que, $X = \sum_{i=1}^{t} Y_i$, et*

$$Y_i = \begin{cases} \{y_i\}, \ \alpha(y_i) = y_i, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \{z_i, w_i\}, \ z_i < w_i, \ \alpha(z_i) = w_i, \ \alpha(w_i) = z_i, & \text{si } s+1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

il existe une algèbre de Łukasiewicz A finie, telle que son système déterminant $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ est un espace de Kleene isomorphe à (X, α)

Dém. Soit A_i, $1 \leq t$, l'algèbre de Kleene telle que $\Pi(A_i)$ est isomorphe a Y_i, alors (voir observation 1.2):

$$A_i = \begin{cases} \{0_i, 1_i\}, \ \sim 0_i = 1_i, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \{0_i, t_i, 1_i\}, \ \sim 0_i = 1_i, \ \sim t_i = t_i, & \text{si } s+1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

Donc

$$\Pi(A_i) = \begin{cases} \{1_i\}, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \{t_i, 1_i\}, & \text{si } s+1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

Nous avons ainsi que $A = \prod_{i=1}^{t} A_i$ est une algèbre de Kleene.

$$\text{Comme } B(A_i) = \begin{cases} A_i, & \text{si } 1 \leq i \leq s, \\ \{0_i, 1_i\}, & \text{si } s+1 \leq i \leq t, \end{cases}$$

sont des ensembles relativement complètes supérieurement et séparateurs alors d'après le lemme 1.30, $B(A)$ est un ensemble relativement complète supérieurement et séparateur, donc d'après le théorème 1.9 il existe une unique estructure d'algèbre de Łukasiewicz sur A.
Montrons que $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ et (X, α) sont espaces de Kleene isomorphes. En effet il est bien connue que:

$$\Pi(A) = \{(a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_t) : \text{oú } a_i \in \Pi(A_i) \text{ et } a_j = 0, \ j \neq i, \ \ 1 \leq j \leq t\}.$$

Soient h_i, $1 \leq i \leq t$ isomorphismes de Y_i sur $\Pi(A_i)$. Il est facile a voir que la transformation $\psi : \Pi(A) \to \Pi(A)$ est définie de la maniére suivante:
Si $p = (a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_t) \in \Pi(A)$ alors $a_i \in \Pi(A_i)$ et $a_j = 0$, $j \neq i$, $\leq j \leq t$. Alors $\psi(p) = (d_1, \ldots, d_s, d_{s+1}, \ldots, d_t)$, où $d_j = 0$ si $1 \leq j \leq t$, $j \neq i$, et $d_i = h_i(\alpha(x))$, où $x \in Y_i$ et $h_i(x) = a_i$.
Si $x \in X$, alors $x \in Y_i$, où $1 \leq i \leq t$, posons par définition $H(x) = a \in \Pi(A)$, où $a_j = 0$ si $j \neq i$ et $a_i = h_i(x)$. Il est facile a voir que H est un isomorphisme d'ordre de X sur $\Pi(A)$. En outre $H(\alpha(x)) = \psi(H(x))$. En effet si $x \in Y_i$ alors $\alpha(x) \in Y_i$, donc $H(\alpha(x)) = a \in \Pi(A)$, où $a_j = 0$ si $j \neq i$ et $a_i = h_i(\alpha(x))$, et comme la composante i de $H(x)$ est $h_i(x)$, alors la composante i de $\psi(H(x)$ est $h_i(\alpha(y))$ où $y \in Y_i$ et $h_i(y) = h_i(x)$, donc $y = x$ et alors $h_i(\alpha(y)) = h_i(\alpha(x))$, et les autres composantes sont égales a 0, alors $H(\alpha(x)) = \psi(H(x))$. □

2 Représentation d'une algèbre de Łukasiewicz trivalente par une algèbre de Łukasiewicz trivalente d'ensembles

Définition 2.1 *Un système $(M, \wedge, \vee, -, 1, \exists)$ sera dit une algèbre de Boole monadique, si le système $(M, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ est une algèbre de Boole A et $\exists$ est une application de A dans A tel que:*

E1) $\exists 0 = 0$, *où* $0 = -1$.

E2) $x = x \wedge \exists x$,

E3) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$.

A propos de cette notion voir [5], [6]. Nous dirons aussi que $(M, \exists)$ ou que M est une algèbre de Boole monadique.
Nous dirons avec P. Halmos que $\exists$ est un *quantificateur existentiel* définie sur M. Le *quantificateur universel* $\forall$, est définie par l'égalité $\forall x = -\exists - x$.

Soit L une algèbre de Łukasiewicz trivalente, $E = \mathbf{P}(L)$ et et pour chaque $x \in L$ posons $\mathcal{S}(x) = \{P \in E : x \in P\}$. Alors la transformation $\mathcal{S}$, que nous appellons *la transformation de Stone*, est une fonction de L dans l'ensemble de toutes les sous-ensembles de E c'est-à-dire dans l'ensemble 2^E. Avec $\mathcal{C}X$ nous répresenterons le complèment de l'ensemble X par rapport a l'ensemble E. Il est bien connue que : $(2^E, \cap, \cup, \mathcal{C}, E)$ est une algèbre de Boole et d'après les résultats de G. Birkhoff que:

a) $\mathcal{S}(0) = \emptyset$,

b) $\mathcal{S}(1) = E$,

c) $\mathcal{S}(x \wedge y) = \mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)$,

d) $\mathcal{S}(x \vee y) = \mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)$,

et que le réticulé distributif L est isomorphe a $L' = \mathcal{S}(L)$.

Pour chaque $X \subseteq E$, posons $\sim X = \mathcal{C}\varphi(X)$, où φ est la *transformation de Birula-Rasiowa.* Comme φ est une bijection de E, alors:

Lemme 2.1 *1)* $\varphi(\mathcal{C}X) = \mathcal{C}\varphi(X)$, *pour tout* $X \subseteq E$.

2) $\varphi(X \cap Y) = \varphi(X) \cap \varphi(Y)$, *quelques soient* $X, Y \subseteq E$.

3) $\varphi(X \cup Y) = \varphi(X) \cup \varphi(Y)$, *quelques soient* $X, Y \subseteq E$.

Lemme 2.2 *1)* $\sim\sim X = X$, *pour tout* $X \subseteq E$.

2) $\sim (X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$, *quelques soient* $X, Y \subseteq E$.

3) $\mathcal{S}(\sim x) = \sim \mathcal{S}(x)$, *quelque soit* $x \in L$.

4) $\sim E = \emptyset$. [2]

Dém.

1) $\sim\sim X = \mathcal{C}\varphi(\sim X) = \mathcal{C}\varphi(\mathcal{C}\varphi(X)) = \mathcal{CC}\varphi(\varphi(X)) = X$.

2) $\sim (X \cap Y) = \mathcal{C}\varphi(X \cap Y) = \mathcal{C}[(\varphi(X) \cap \varphi(Y)] = \mathcal{C}\varphi(X) \cup \mathcal{C}\varphi(Y) = \sim X \cup \sim Y$.

3) Il est facile a voir que les conditions suivantes sont equivalentes: (a) $P \in \varphi(\mathcal{S}(x))$, (b) $\varphi(P) \in \mathcal{S}(x)$, (c) $x \in \varphi(P) = \mathcal{C} \sim P$, (d) $x \notin \sim P$, (e) $\sim x \notin P$, (f) $P \notin \mathcal{S}(\sim x)$, (g) $P \in \mathcal{CS}(\sim x)$. Donc $\mathcal{CS}(\sim x) = \varphi(\mathcal{S}(x))$, et alors $\mathcal{S}(\sim x) = \mathcal{C}\varphi(\mathcal{S}(x)) = \sim \mathcal{S}(x)$.

4) $\sim E = \mathcal{C}\varphi(E) = \varphi(\mathcal{C}E) = \varphi(\emptyset) = \emptyset$.

□

Alors le système $(2^E, \cap, \cup, \sim, E)$ est une algèbre de De Morgan et $(\mathcal{S}(L), \cap, \cup, \sim, E)$ est une sous-algèbre de De Morgan de 2^E.

Considérons l'opération $\exists$ définie sur 2^E par:

i) $\exists\emptyset = \emptyset$,

ii) Si $\emptyset \subset X \subseteq E$, $\exists X = \bigcup_{P \in X} \{P, \varphi(P)\}$.

Observons que : 1) Si $\emptyset \subset X \subseteq E$, $\exists X = \bigcup_{P \in X} \{P, \varphi(P)\} = \bigcup_{P \in X} \{P\} \cup \bigcup_{P \in X} \{\varphi(P)\} = X \cup \varphi(X)$.

2) Si X = {P} où $P \in E$, alors $\exists\{P\} = \{P, \varphi(P)\}$. Nous notérons $\exists P$ ou lieu de $\exists\{P\}$. Observons encore que $\exists\varphi(P) = \exists P$.

Lemme 2.3 *iv)* $X \subseteq \exists X$, *pour tout* $X \subseteq E$.

v) $\exists(X \cap \exists Y) = \exists X \cap \exists Y$, *quels que soient* $X, Y \subseteq E$.

Dém.

iv) $\exists X = X \cup \varphi(X) \supseteq X$.

v) $\exists(X \cap \exists Y) = (X \cap \exists Y) \cup \varphi(X \cap \exists Y) = (X \cap \exists Y) \cup \varphi(X \cap (Y \cup \varphi(Y)) = (X \cap \exists Y) \cup (\varphi(X) \cap (\varphi(Y) \cup Y)) = (X \cap \exists Y) \cup (\varphi(X) \cap \exists Y) = (X \cup \varphi(X)) \cap \exists Y = \exists X \cap \exists Y$.

□ donc le système $(2^E, \cap, \cup, \mathcal{C}, E, \exists)$ est une algèbre de Boole monadique. Rappelons que le *cuantificateur universel* est définie, sur 2^E, par·

vi) $\forall X = \mathcal{C}\exists\,\mathcal{C}X$, pour tout $X \subseteq E$.

Lemme 2.4 *L1)* $\sim X \cup \exists X = E$, *quelque soit* $X \subseteq E$,

L2) $\sim X \cap X = \sim X \cap \exists X$, *quelque soit* $X \subseteq E$.

Dém.

1) $\sim X \cup \exists X = \mathcal{C}\varphi(X) \cup X \cup \varphi(X) = E$.

2) $\sim X \cap \exists X = \mathcal{C}\varphi(X) \cap (X \cup \varphi(X)) = X \cap \mathcal{C}\varphi(X) = \sim X \cap X$.

$\square$

Lemme 2.5 $\exists\mathcal{S}(\nabla x) = \mathcal{S}(\nabla x)$, *quelque soit* $x \in L$.

Dém. Si $x \in L$, alors $\nabla x \in L$ donc $\mathcal{S}(\nabla x) \in L'$. Par le lemme 2.3,iv) nous savons que: $\mathcal{S}(\nabla x) \subseteq \exists\mathcal{S}(\nabla x)$. Soit $P \in \exists\mathcal{S}(\nabla x) = \bigcup_{Q\in\mathcal{S}(\nabla x)} \exists Q = \bigcup_{Q\in\mathcal{S}(\nabla x)} \{Q, \varphi(Q)\}$. Alors il existe $Q \in \mathcal{S}(\nabla x)$ tel que $P \in \{Q, \varphi(Q)\}$, ce qui est équivalent a dire qu'il existe (*) $Q \in \mathcal{S}(\nabla x)$ tel que: (a) $P = Q$, ou (b) $P = \varphi(Q)$. Dans le premier cas nous avons que $P \in \mathcal{S}(\nabla x)$. Si (b) est verifiée, supposons que $\varphi(Q) = P \notin \mathcal{S}(\nabla x)$, c'est-à-dire $\nabla x \notin P = \varphi(Q) = \mathcal{C} \sim Q$ alors $\nabla x \in \sim Q$, donc $\sim \nabla x \in Q$, et alors d'après le lemme 1.14 b), $\nabla x \notin Q$, c'est qui est en contradiction avec (*). $\square$

Lemme 2.6 $\exists\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(\nabla x)$, *quelque soit* $x \in L$.

Dém. Comme $x \leq \nabla x$, alors $\mathcal{S}(x) \subseteq \mathcal{S}(\nabla x)$, donc en tenant compte du lemme 2.1: $\exists(\mathcal{S}(x)) \subseteq \exists\mathcal{S}(\nabla x) = \mathcal{S}(\nabla x)$.
Soit $P \in \mathcal{S}(\nabla x)$, c'est-à-dire (i) $\nabla x \in P$. Nous savons que $\varphi(P)$ est comparable avec P. Supposons que (ii) $\varphi(P) \subseteq P$. Mais nous avons vue que $\varphi(P)$ est l'unique Δ-filtre maximal contenue dans P, et que $P \cap B(L) \subseteq \varphi(P)$. Donc de (i) on déduit $\nabla x \in \varphi(P)$. Alors $\varphi(P)$ est un filtre premier de prèmiere espèce tel que $\nabla x \in \varphi(P)$, alors par le lemme 1.19, $x \in P$, donc $P \in \mathcal{S}(x) \subseteq \exists\mathcal{S}(x)$, et alors $P \in \exists\mathcal{S}(x)$.
Si $P \subseteq \varphi(P)$, comme P est un filtre premier de prèmiere espèce et $\nabla x \in P$, en tenant compte du lemme 1.19 on a $x \in \varphi(P)$, c'est-à-dire $\varphi(P) \in \mathcal{S}(x)$, donc $\exists\varphi(P) \subseteq \exists\mathcal{S}(x)$. Mais $\exists\varphi(P) = \{\varphi(P), P\} \subseteq \exists\mathcal{S}(x)$. Alors $P \in \exists\mathcal{S}(x)$. $\square$

Lemme 2.7 $\exists(X \cap Y) = \exists X \cap \exists Y$, *quels que soient* $X, Y \in L' = \mathcal{S}(L)$.

Dém. De $X, Y \in L'$, on a $X = \mathcal{S}(x)$, et $Y = \mathcal{S}(y)$, où $x, y \in L$. Donc $\exists(X \cap Y) = \exists(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)) = \exists(\mathcal{S}(x \wedge y)) = \mathcal{S}(\nabla(x \wedge y)) = \mathcal{S}(\nabla x \wedge \nabla y) = \mathcal{S}(\nabla x) \cap \mathcal{S}(\nabla y) = \exists\mathcal{S}(x) \cap \exists\mathcal{S}(y) = \exists X \cap \exists Y$. $\square$
Comme $(L' = \mathcal{S}(L), \cap, \cup, \sim, E)$ est une algèbre de De Morgan, d'après les lemmes 2.4 et 2.7 on déduit que $(L' = \mathcal{S}(L), \cap, \cup, \sim, \exists, E)$ est une algèbre de Łukasiewicz trivalente. alors, sont valables, les suivantes règles de calcul:

Lemme 2.8 *Quels que soient $X, Y \in L'$, on a:*

1) $\exists(X \cup Y) = \exists X \cup \exists Y$.

2) $\forall(X \cup Y) = \forall X \cup \forall Y$.

3) $\forall(X \cap Y) = \forall X \cap \forall Y$.

3 Caractère Universel de la construction $\mathcal{L}$

Soit $(M, \exists)$ une algèbre de Boole monadique. Nous avons indiquée une construction $\mathcal{L}$ qui permettre construire a partir de M, une algèbre de Lukasiewicz trivalente $\mathcal{L}(M)$. ([15], [21].) Rappelons certains details de cette construction.

Définition 3.1 *Si $x, y \in M$ posons:*

1) $x \rightarrow y = \exists\ -x \vee y$;

2) $x \rightarrowtail y = (x \rightarrow y) \wedge (-y \rightarrow -x)$.

3) $x \sqcup y = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail y = \forall x \vee y \vee (x \wedge \forall - y)$;

4) $x \sqcap y = -(-x \sqcup\ -y) = \exists x \wedge y \wedge (x \vee \exists - y)$.

Lemme 3.1 *Si $x, y \in M$, alors* (voir [21])

1) $\exists(x \sqcup y) = \exists x \vee \exists y$.

2) $\exists(x \sqcap y) = \exists x \wedge \exists y$.

3) $\forall(x \sqcup y) = \forall x \vee \forall y$.

4) $\forall(x \sqcap y) = \forall x \wedge \forall y$.

Définition 3.2 *Nous dirons que l'élément x est congruent à l'élément y et nous écrirons $x \equiv y$ si $x \rightarrowtail y = 1$ et $y \rightarrowtail x = 1$, ou, ce que est équivalent, si $\exists x = \exists y$ et $\forall x = \forall y$.*

Lemme 3.2 *La relation "$\equiv$" définie sur M est une relation d'équivalence compatible avec les opérations, $-, \exists, \sqcap, \sqcup$. Soit $\mathcal{L}(M) = M/\equiv$ l'ensemble quotient de M par "$\equiv$", et représentons par $|m|$ la classe d'équivalence qui contient l'élément $m \in M$. Si nous posons $\mathbf{1} = |1|$; $\sim |x| = |-x|$; $\nabla|x| = |\exists x|$; $|x| \sqcap |y| = |x \sqcap y|$; $|x| \sqcup |y| = |x \sqcup y|$, alors le système $(\mathcal{L}(M), \sqcup, \sqcap, \sim, \nabla, \mathbf{1})$ est une algèbre de Lukasiewicz trivalente.* [15], [21].

Nous allons demontrer le théorème suivant:

Théorème 3.1 *Etant donnée une algèbre de Lukasiewicz trivalente L, il existe une algèbre de Boole monadique M tel que $\mathcal{L}(M)$ est isomorphe a L.* ([16], pag 206), [18].

Il est bien connue que:

Lemme 3.3 *Si A est une algèbre de Boole et R un sous-réticulé de A, tel que* $0, 1 \in R$, *alors :*

$$SB(R) = \{x \in A : x = \bigvee_{i=1}^{n} (y_i \wedge -z_i),\ \textit{où}\ \ y_i, z_i \in R\}.$$

([23], pag. 74).

Soit L une algèbre de Lukasiewicz trivalente, et $E = \mathbf{P}(L)$, nous avons vue dans le paragraphe 2, que L est isomorphe a l'algèbre de Lukasiewicz trivalente $L' = \mathcal{S}(L) \subseteq 2^E$. Comme L' est un sous-réticulé de l'algèbre de Boole 2^E, et $\emptyset, E \in L'$, alors

$$SB(L') = \{X \in 2^E : X = \bigcup_{i=1}^{n} (Y_i \cap \mathcal{C}Z_i),\ \textit{où}\ Y_i,\ Z_i \in L'\}.$$

Nous avons vue que $(2^E, \exists)$ est une algèbre de Boole monadique, nous allons montrer que: $(SB(L'), \exists)$ *est une sous-algèbre de Boole monadique de l'algèbre de Boole monadique* $(2^E, \exists)$.

Lemme 3.4 *Si $X \subseteq E$ alors:*

1) $\exists \mathcal{C}X = \exists \sim X$.

2) $\forall \mathcal{C}X = \forall \sim X$.

Dém. 1) $\exists \sim X = \exists \mathcal{C}\varphi(X) = \mathcal{C}\varphi(X) \cup \varphi(\mathcal{C}\varphi(X)) = \varphi(\mathcal{C}X) \cup \mathcal{C}\varphi(\varphi(X)) = \varphi(\mathcal{C}X) \cup \mathcal{C}X = \exists \mathcal{C}X$.
2) $\forall \sim X = \mathcal{C}\exists\mathcal{C} \sim X =$ (par 1) $= \mathcal{C}\exists \sim\sim X = \mathcal{C}\exists X = \forall \mathcal{C}X$. □

Corollaire 3.1 *Si $X \in L'$ alors $\exists \mathcal{C}X \in L'$.*

Dém. Si $X \in L'$, alors comme L' est une sous-algèbre de De Morgan de l'algèbre de De Morgan 2^E, $\sim X \in L'$. Donc comme L' est une algèbre de Lukasiewicz trivalente $\exists \sim X \in L'$. Par le lemme 3.4 $\exists \mathcal{C}X = \exists \sim X$, alors nous avons que $\exists \mathcal{C}X \in L'$. □

Lemme 3.5 *Si $X \subseteq E$ alors* $\forall X = X \cap \varphi(X) = \sim \exists \sim X$.

Dém. $\forall X = \mathcal{C}\exists\mathcal{C}X = \mathcal{C}(\mathcal{C}X \cup \varphi(\mathcal{C}X)) = X \cap \mathcal{C}\varphi(\mathcal{C}X)) = X \cap \varphi(\mathcal{C}\mathcal{C}X) = X \cap \varphi(X)$.
$\forall X = \mathcal{C}\exists\mathcal{C}X = \mathcal{C}(\mathcal{C}X \cup \varphi(\mathcal{C}X) = \mathcal{C}\varphi(\mathcal{C}X \cup \varphi(\mathcal{C}X)) = \sim (\mathcal{C}X \cup \varphi(\mathcal{C}X)) = \sim (\exists\mathcal{C}X) = \sim \exists \sim X$. □

Corollaire 3.2 *Si $X \subseteq E$ alors* $\exists X = \sim \forall \sim X$.

Dém. $\sim \forall \sim X =$ par lemme 3.5 $= \sim\sim \exists \sim\sim X = \exists X$. □

Corollaire 3.3 *Si $X \in L'$ alors $\forall X \in L'$.*

Dém. Si $X \in L'$ alors $\sim X \in L'$, donc $\exists \sim X \in L'$, et par conséquant $\sim \exists \sim X \in L'$. Donc par le lemme 3.5, $\forall X \in L'$. $\square$

Corollaire 3.4 *Si $X \in L'$ alors $\forall \mathcal{C}X \in L'$.*

Dém. Si $X \in L'$, alors $\sim X \in L'$, donc par corollaire 3.3, $\forall \sim X \in L'$, et alors par le lemme 3.4, 2) : $\forall \mathcal{C}X \in L'$. $\square$

Lemme 3.6 *Si $X, Y \in L'$ alors $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) = (\forall X \cap \exists \sim Y) \cup (\exists X \cap \forall \sim Y) =$ $\exists X \cap \exists \sim Y \cap \forall(X \cup \sim Y)$.*

Dém. $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) =$ par définition
$(X \cap \mathcal{C}Y) \cup \varphi(X \cap \mathcal{C}Y) = (X \cap \mathcal{C}Y) \cup (\varphi(X) \cap \varphi(\mathcal{C}Y)) =$
$(X \cup \varphi(X)) \cap (\mathcal{C}Y \cup \varphi(\mathcal{C}Y) \cap (X \cup \varphi(\mathcal{C}Y)) \cap (\varphi(X) \cup \mathcal{C}Y) =$ par définition
$\exists X \cap \exists \mathcal{C}Y \cap (X \cup \varphi(\mathcal{C}Y) \cap \varphi(X \cup \varphi(\mathcal{C}Y)) =$ par lemmes 3.4, 1) et 3.5
$\exists X \cap \exists \sim Y \cap \forall(X \cup \varphi(\mathcal{C}Y) =$ (par définition de la négation $\sim$)
$\exists X \cap \exists \sim Y \cap \forall(X \cup \sim Y)$.
Comme $X, \sim Y \in L'$ alors $\forall(X \cup \sim Y) = \forall X \cup \forall \sim Y$.
Donc $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) = \exists X \cap \exists \sim Y \cap (\forall X \cup \forall \sim Y) = (\forall X \cap \exists \sim Y) \cup (\exists X \cap \forall \sim Y)$. $\square$

Corollaire 3.5 *Si $X, Y \in L'$ alors $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) \in L'$.*

Dém. Par hypothèse: (1) $X \in L'$, et (2) $Y \in L'$. De (1) on déduit (3) $\exists X \in L'$. De (2) on déduit (4) $\sim Y \in L'$ et par conséquant (5) $\exists \sim Y \in L'$.
De (1) et (4) on a (5) $X \cup \sim Y \in L'$, donc par le corollaire 3.3: (6) $\forall(X \cup \sim Y) \in L'$.
De (3), (5) et (6) on déduit par le lemme 3.6 que $\exists(X \cap \mathcal{C}Y) \in L'$. $\square$

Lemme 3.7 *Si $X \in M = SB(L')$ alors $\exists X \in L'$.*

Dém. Si $X \in SB(L')$, alors $X = \bigcup_{i=1}^{n}(Y_i \cap \mathcal{C}Z_i)$ où Y_i, $Z_i \in L'$,, donc $\exists X = \exists(\bigcup_{i=1}^{n}(Y_i \cap \mathcal{C}Z_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} \exists(Y_i \cap \mathcal{C}Z_i)$. Comme par le corollaire 3.5, $\exists(Y_i \cap \mathcal{C}Z_i) \in L'$, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et L' est un réticulé on a $\exists X \in L'$. $\square$

Corollaire 3.6 *$(M = SB(L'), \exists)$ est une sous-algèbre de Boole monadique de l'algèbre de Boole monadique $(2^E, \exists)$.*

Dém. En effet, si $X \in M = SB(L')$, alors par le lemme 3.7 $\exists X \in L' \subseteq SB(L') = M$. $\square$

Corollaire 3.7 $\exists(SB(L')) = \forall(SB(L')) \subseteq L'$.

Dém. Comme $SB(L')$ est une algèbre de Boole monadique, il est bien connu que $\exists(SB(L')) = \forall(SB(L'))$, et d'après le lemme 3.7 $\exists(SB(L')) \subseteq L'$. $\square$

Lemme 3.8 *Si $X, Y \in L'$ alors $X \sqcup Y \in L'$.*

Dém. Nous avons vue, définition 3.1, 3) que $X \sqcup Y = \forall X \cup Y \cup (X \cap \forall \mathcal{C}Y)$. D'après le corollaire 3.3, $\forall X \in L'$, et d'après le corollaire 3.4, $\forall \mathcal{C}Y \in L'$. Alors comme L' est une algèbre de Łukasiewicz, $\forall X \cup Y \cup (X \cap \forall \mathcal{C}Y) \in L'$. □

Lemme 3.9 *Si* $X, Y \in L'$ *alors* $\forall(X \cap \mathcal{C}Y) = \forall(X \cap \sim Y) = \forall X \cap \forall \sim Y$.

Dém. $\forall(X \cap \mathcal{C}Y) = \forall X \cap \forall \mathcal{C}Y = \forall X \cap \forall \sim Y = \forall(X \cap \sim Y)$. □

Considérons la relation de congruence "$\equiv$" défine sur $M = SB(L')$, par (voir définition 3.2): Si $X, Y \in M$, $X \equiv Y$ si et seulement si $\exists X = \exists Y$ et $\forall X = \forall Y$. Nous avons vue que $(\mathcal{L}(M) = M/\equiv, \sqcap, \sqcup, \sim, \nabla, |E|)$ est une algèbre de Lukasiewicz trivalente, où $\sim |X| = |\mathcal{C}X|$, $\nabla|X| = |\exists X|$. Nous allons montrer que $\mathcal{L}(M)$ et L sont des algèbres de Lukasiewicz trivalentes isomorphes.

Lemme 3.10 *Si* $X, Y \in L'$ *et* $X \equiv Y$ *alors* $X = Y$.

Dém. De $X, Y \in L'$ on déduit $\exists X, \exists Y \in L'$ et $\forall X, \forall Y \in L'$, donc comme par hypothèse $\exists X = \exists Y$, et $\forall X = \forall Y$, et comme $\exists$ et $\forall$ sont les opérateurs de possibilité et de nécessité de l'algèbre de Lukasiewicz L', on déduit par le principe de determination de Moisil que $X = Y$. □

Lemme 3.11 *Si* $X, Y \in L'$ *alors il existe un unique* $Z \in L'$ *tel que* $X \cap \mathcal{C}Y \equiv Z$.

Dém. Soit $Z = (\forall X \cap \sim Y) \cup (X \cap \forall \sim Y)$, il est claire que $Z \in L'$.
(1) $\exists Z = \exists(\forall X \cap \sim Y) \cup \exists(X \cap \forall \sim Y) =$
$(\forall X \cap \exists \sim Y) \cup (\exists X \cap \forall \sim Y) =$ (par lemme 3.6) $=$
$\exists(X \cap \mathcal{C}Y)$, et
(2) $\forall Z =$ (lemme 2.8, 2) $= \forall(\forall X \cap \sim Y) \cup \forall(X \cap \forall \sim Y) =$ (lemme 2.8, 3)
$(\forall X \cap \forall \sim Y) \cup (\forall X \cap \forall \sim Y) = \forall X \cap \forall \sim Y =$ (par lemme 3.9) $= \forall(X \cap \mathcal{C}Y)$, donc $Z \equiv X \cap \mathcal{C}Y$.
De (1) et (2) on déduit que $X \cap \mathcal{C}Y \equiv Z$ et d'après le lemme 3.10, Z est unique. □

Lemme 3.12 *Si* $A, B \in M$ *alors* $A \cup B \equiv A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B)$.

Dém. D'après le lemme 3.1:
$\exists(A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B)) = \exists A \cup \exists B \cup \exists\forall(A \cup B) = \exists A \cup \exists B \cup \forall(A \cup B) = \exists(A \cup B) \cup \forall(A \cup B) = \exists(A \cup B)$.
$\forall(A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B)) = \forall A \cup \forall B \cup \forall\forall(A \cup B) = \forall A \cup \forall B \cup \forall(A \cup B) = \forall(A \cup B)$. □

Corollaire 3.8 *Si* $A, B \in M$, $X, Y \in L'$ *et* $A \equiv X$, $B \equiv Y$, *alors* $A \cup B \equiv Z$, *où* $Z \in L'$.

Dém. Nous avons vue dans le lemme 3.12 que $A \cup B \equiv A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B)$. D'après les hypothèses $A \equiv X$, $B \equiv Y$, nous avons $A \sqcup B \equiv X \sqcup Y$ et alors $A \sqcup B \sqcup \forall(A \cup B) \equiv X \sqcup Y \sqcup \forall(A \cup B)$. Observons finalement que comme $A \cup B \in M$ alors par le corollaire 3.7 $\forall(A \cup B) \in L'$, donc par le lemme 3.8 $Z = X \sqcup Y \sqcup \forall(A \cup B) \in L'$. Donc $A \cup B \equiv Z$, où $Z \in L'$. □

Lemme 3.13 *Si $A \in M$, il existe $X \in L'$ tel que $A \equiv X$.*

Dém. Soit $A \in M = SB(L')$, alors $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ où $A_i = Y_i \cap \complement Z_i$, et Y_i, $Z_i \in L'$, pour $1 \leq i \leq n$. Par le lemme 3.11, $A_i \equiv S_i$, où $S_i \in L'$, pour $1 \leq i \leq n$.
Si $n = 1$, alors le lemme est evidement verifié. Supposons que $2 \leq n$. Par le corollaire 3.8: (1) $A_1 \cup A_2 \equiv Z_2$, où $Z_2 \in L'$.
De (1) et $A_3 \equiv S_3$, par le corollaire 3.8, on a: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \equiv Z_3$, où $Z_3 \in L'$. En appliquant cette rasoinnement, nous aurons d'après $n-1$ fois: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \equiv Z_n$, où $Z_n \in L'$, et la démonstration est terminée. □

Lemme 3.14 *La transformation H de L dans $\mathcal{L}(M)$, définie par $H(x) = |\mathcal{S}(x)|$, vérifie:*

1) H est biunivoque.

2) H est surjective.

Dém. (1) En effet si $H(x) = H(y)$, c'est-à-dire $|\mathcal{S}(x)| = |\mathcal{S}(y)|$, alors $\mathcal{S}(x) \equiv \mathcal{S}(y)$, et comme $\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(y) \in \mathcal{S}(L) = L'$, alors d'après le lemme 3.10, $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(y)$, d'où l'on déduit que $x = y$, car $\mathcal{S}$ est biunivoque.
(2) En effet etant donnée $|A| \in \mathcal{L}(M)$, alors $A \in M$. D'après le lemme 3.13, nous savons qu'il existe $X \in L' = \mathcal{S}(L)$ tel que $X \equiv A$. Alors comme $X = \mathcal{S}(x)$, où $x \in L$, nous avons $H(x) = |\mathcal{S}(x)| = |X| = |A|$. □

Lemme 3.15 *La transformation H vérifie:*

3) $H(x \wedge y) = H(x) \sqcap H(y)$.

4) $H(x \vee y) = H(x) \sqcup H(y)$.

5) $H(\sim x) = \sim H(x)$.

6) $H(\nabla x) = \exists H(x)$.

Dém.

3) (a) $\exists(\mathcal{S}(x) \sqcap \mathcal{S}(y)) =$ (lemme 3.1, 2) $=$
$\exists\mathcal{S}(x) \cap \exists\mathcal{S}(y) =$ (par lemme 2.7) $= \exists(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y))$.
(b) $\forall(\mathcal{S}(x) \sqcap \mathcal{S}(y)) =$ (par lemme 3.1, 4)
$\forall\mathcal{S}(x) \cap \forall\mathcal{S}(y) =$ (par lemme 2.8, 3) $= \forall(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y))$.
De (a) et (b) on déduit que $\mathcal{S}(x) \sqcap \mathcal{S}(y) \equiv \mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)$, et alors $H(x \wedge y) = |\mathcal{S}(x \wedge y)| = |\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y)| = |\mathcal{S}(x) \sqcap \mathcal{S}(y)| = |\mathcal{S}(x)| \sqcap |\mathcal{S}(y)| = H(x) \sqcap H(y)$.

4) (c) $\exists(\mathcal{S}(x) \sqcup \mathcal{S}(y)) =$ (par lemme 3.1, 1) $=$
$\exists\mathcal{S}(x) \cup \exists\mathcal{S}(y) =$ (par lemme 2.8, 1) $= \exists(\mathcal{S}(x) \cap \mathcal{S}(y))$.
(d) $\forall(\mathcal{S}(x) \sqcup \mathcal{S}(y)) =$ (par lemme 3.1, 3)) $=$
$\forall\mathcal{S}(x) \cup \forall\mathcal{S}(y) =$ (par lemme 2.8, 2)) $= \forall(\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y))$.
De (c) et (d) on déduit que $\mathcal{S}(x) \sqcup \mathcal{S}(y) \equiv \mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)$, et alors $H(x \vee y) = |\mathcal{S}(x \vee y)| = |\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(y)| = |\mathcal{S}(x) \sqcup \mathcal{S}(y)| = |\mathcal{S}(x)| \sqcup |\mathcal{S}(y)| = H(x) \sqcup H(y)$.

5) $\exists\mathcal{S}(\sim x) =$ (par lemme 2.2, 3) $= \exists \sim \mathcal{S}(x) =$ (par lemme 3.4, 1) $= \exists\mathcal{C}(x)$, et $\forall\mathcal{S}(\sim x) =$ (par lemme 2.2, 3)) $= \forall \sim \mathcal{S}(x) =$ (par lemme 3.4, 2)) $= \forall\mathcal{C}(x)$, nous avons $\mathcal{S}(\sim x) \equiv \mathcal{CS}(x)$ et alors $H(\sim x) = |\mathcal{S}(\sim x)| = |\mathcal{CS}(x)| = \sim |\mathcal{S}(x)| = \sim H(x)$.

6) $H(\nabla x) = |\mathcal{S}(\nabla x)| =$ (par lemme 2.6) $= |\exists\mathcal{S}(x)| =$ (par lemme 3.2) $= \nabla|\mathcal{S}(x)| = \nabla H(x)$.

$\square$

D'après les lemmes 3.14 et 3.15 nous avons que : L est isomorphe a $\mathcal{L}(M)$, (Théorème 3.1.)

Bibliographie

[1] Bialynicki-Birula A., *Remarks on quasi-Boolean algebras*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 615-619.

[2] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-Boolean algebras*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 259-261.

[3] Cignoli, R., *Boolean elements in Lukasiewicz algebras I*, Proc. Japan Acad., 41, 8 (1965), 670-675. Notas de Lógica Matemática 23, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[4] Cignoli, R. and Monteiro A., *Boolean elements in Lukasiewicz algebras II*, Proc. Japan Acad., 41, 8 (1965), 676-680. Notas de Lógica Matemática 24, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[5] Halmos P.R., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 219-227.

[6] Halmos P.R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[7] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Universitè de Yassy, 26 (1940), 431-466.

[8] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysipiennes*, Ann. Sc. de l'Université de Yassy, 27 (1941), 86-98.

[9] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Analele Universitatii C.I. Parohn. Seria Acta Logica 3 (1960), 83-95.

[10] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Hilbert et de Tarski*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[11] Monteiro A., *Cours sur les N-lattices*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1962.

[12] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[13] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Préprint in Notas de Lógica Matemática 21, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[14] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de De Morgan* , Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1966.

[15] Monteiro A., *Construction des Algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques I.* Math. Japonicae. 12(1967), 1-23. Notas de Lógica Matemática 11, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[16] Monteiro A., *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Mathematica, 39 (1980), 1-237.

[17] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R.P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Préprint in Notas de Lógica Matemática 22, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[18] Monteiro L., *Sur la construction $\mathcal{L}$ des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées, 23 (1978), 77-83.

[19] Monteiro L., *Les algèbres de Heyting et de Lukasiewicz trivalentes*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. Xi, 4 (1970), 453-466.

[20] Monteiro L., *Sur le principe de détermination de Moisil dans les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. de la Soc. sci. Math. de la R. P. Roumaine, 13(61), 4 (1969), 447-448.

[21] Monteiro L. et Gonzalez Coppola L., *Sur une construction des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 17, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[22] Rasiowa H., *N-lattices and constructive logic with strong negation*, Fund. Math. 46 (1958), 61-80.

[23] Rasiowa H. and Sikorski R.,*The Mathematics of Metamathematics.* Second edition, 519 pag. Warszawa 1968.

Axiomes indépendants pour les algèbres de Nelson, de Lukasiewicz trivalentes, de De Morgan et de Kleene

A. MONTEIRO et L. MONTEIRO

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1995

Este trabajo fue realizado en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur. Los resultados indicados nunca fueron publicados, sin embargo se encuentran citas a los mismos en:

1) Brignole D. et Monteiro A., *Caractérisation des algèbres de Nelson par de égalités I et II.* Proc. of Japan Academy A3 (1967), 279-283; 284-285. Notas de Lógica Matemática 20, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

2) Monteiro A., *Les éléments réguliers d'un $\mathcal{N}$-lattice.* Textos e Notas 15,, CMAF, Lisboa, Portugal (1978). Informes Técnicos Internos Nro. 43, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1995.

Ha colaborado en el dactilografiado y corrección de estas notas el Lic. Ignacio Viglizzo, a quién agradezco su excelente labor.

Dr. Luiz F. Monteiro
Director
INMABB-UNS-CONICET
Agosto, 1995

Axiomes indépendants pour les algèbres de Nelson, de Łukasiewicz trivalentes, de De Morgan et de Kleene

António Monteiro et Luiz Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1973
Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Les algèbres de Nelson (ou $\mathcal{N}$-lattices) ont été définies par des égalités par D. Brignole et A. Monteiro, [2]. Voir aussi [1]. Nous allons indiquer un ensemble d'axiomes indépendants pour les algèbres de Nelson et aussi pour d'autres algèbres. Ces résultats on été obtenues il y a beaucoup de temps, mais ils non été jamais publiés, voir a cet propôs [2], [10].

Toutes les algèbres que nous allons considérer sont des réticulés distributifs et il est donc naturel d'utiliser une des definitions les plus simple de cette notion que nous conaissons: celle qui a été obtenue par M. Scholander [12].

Définition 1.1 *Le système $(A, \wedge, \vee)$ est un réticulé distributif si:*

A2) $x \wedge (x \vee y) = x$

A3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

Nous dirons pour abréger que A est un réticulé distributif.

Définition 1.2 *Si le système $(A, 1, \wedge, \vee)$ verifie les axiomes A2, A3 et*

A1) $x \vee 1 = 1$

nous dirons que 1 *est le dernier élément du réticulé distributif A ou que A est un réticulé distributif ayant* 1 *pour dernier élément.*

D'une façon duale on définit la notion de premier élément (0) d'un réticulé distributif.

La notion de réticulé de De Morgan a été considérée en 1935 par Gr. C. Moisil [7], et etudié tout d'abord par J. Kalman [3], [4].

Définition 1.3 *Le systéme* $(A, \sim, \wedge, \vee)$ *est un réticulé de De Morgan si les axiomes A2, A3,*

A4) $\sim\sim x = x$

A5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

sont vérifiés. Nous dirons que $\sim x$ *est la négation de De Morgan de* x.

On voit de suite que:

$$A5^*) \quad \sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$$

est une conséquence de N4 et N5.
Les formules A5 et A5* reçoivent souvent le nom de *lois de De Morgan* et cela justifie la terminologie adoptée, qui a été introduite dans [8].

Cette notion a été étudié pou la premiere fois par J. Kalman [4] sous le nom de *distributive i-lattices.*

Définition 1.4 *Le systéme* $(A, 1, \sim, \wedge, \vee)$ *sera dit une algèbre de De Morgan si les axiomes A1-A5 sont vérifiés.*

Cela signifie qu'une algèbre de De Morgan peut être définie comme un réticulé de De Morgan ayant un dernier élément 1. On voit de suite que si l'on pose $0 = \sim 1$, alors 0 est le premier élément de A, c'est-á-dire $0 \wedge x = 0$.

Un cas particulier important des réticulés de De Morgan est celui que nous indiquons dans la definition suivante

Définition 1.5 *Le réticulé de De Morgan* $(A, \sim, \wedge, \vee)$ *sera dit un réticulé de Kleene si:*

$$A6) \quad x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$$

Cette notion a été étudie pour la premiére fois par J. Kalman [3] sous le nom de *normal i-lattices.*

Définition 1.6 *Le systéme* $(A, 1, \sim, \wedge, \vee)$ *sera dit une algèbre de Kleene si les axiomes A1-A6 sont verifiés.*

La notion réticulé de Kleene se présente d'une façon naturelle dans l'etude d'un calcul propositionnel considerée por la premiere fois par S. C. Kleene [5] et les algèbres de Kleene se presentent dans un contexte special dans les études de H. Rasiowa sur l'algèbrisation du calcul propositionnel constructif avec negation forte [11].

2 Caractèrisation des algèbres de Nelson par des égalités

D'aprés D. Brignole et A. Monteiro [2] une algèbre de Nelson est un systéme $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ formé par: 1) un ensemble non vide, A; 2) un élément $1 \in A$; 3) un opérateur monaire $\sim$ défini sur A; 4) trois opérations binaires $\wedge, \vee$ et $\rightarrow$ définies sur A tel que les axiomes suivant soient vérifés:

A1) $x \vee 1 = 1$

A2) $x \wedge (x \vee y) = x$

A3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

A4) $\sim\sim x = x$

A5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

A6) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$

A7) $x \rightarrow x = 1$

A8) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\sim x \vee y)$

A9) $(x \wedge y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$

A10) $(x \rightarrow y) \wedge (\sim x \vee y) = \sim x \vee y$

A11) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$

Nous nous proposons d'indiquer dans cette note d'autres définitions d'algèbre de Nelson au moyen d'axiomes indépendants.

Voyons que les axiomes A1, A10 et A11 sont une conséquence de A2-A9. Pour cela nous démontrerons les lemmes suivants:

Lemme 2.1 $x \vee 1 = 1$ (Axiome A1).

Dém. On peut indiquer trois démonstrations

1. D'aprés A7 et A8 on peut écrire:

$$x \wedge 1 = x \wedge (x \rightarrow x) = x \wedge (\sim x \vee x) = x$$

2. On utilisant sucesivement A7, A2, A8, A2 et A7 on a:

$$x \vee 1 = x \vee (x \rightarrow x) = (x \wedge (\sim x \vee x)) \vee (x \rightarrow x) =$$

$$(x \wedge (x \rightarrow x)) \vee (x \rightarrow x) = x \rightarrow x = 1.$$

3. D'aprés A2, A8, A7 et A2, on a:

$$x \vee 1 = (x \wedge (\sim x \vee x)) \vee 1 = (x \wedge (x \to x)) \vee 1 = (x \wedge 1) \vee 1 = 1$$

□

Lemme 2.2 *Si $a \to b = 1$ alors $a = a \wedge (\sim a \vee b)$.*

Dém. En utilisant l'hypothèse et l'axiome A8 on a:

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (a \to b) = a \wedge (\sim a \vee b)$$

□

Lemme 2.3 $\sim x \vee y \leq x \to y$ (Axiome A10).

Dém. En utilisant sucesivement A9, A8, A9 et A7 on a:

$$(\sim x \vee y) \to (x \to y) = (x \wedge (\sim x \vee y)) \to y =$$

$$(x \wedge (x \to y)) \to y = (x \to y) \to (x \to y) = 1,$$

et alors par le lemme 2.2

$$\sim x \vee y = (\sim x \vee y) \wedge (\sim (\sim x \vee y) \vee (x \to y)$$

et d'aprés A4 et A5 on a

$$\sim x \vee y = (\sim x \vee y) \wedge ((x \wedge \sim y) \vee (x \to y))$$

cest-à-dire

$$\sim x \vee y \leq (x \wedge \sim y) \vee (x \to y) \leq x \vee (x \to y)$$

et alors

$$\sim x \vee y = (\sim x \vee y) \wedge (x \vee (x \to y)) = ((\sim x \vee y) \wedge x) \vee ((\sim x \vee y) \wedge (x \to y))$$

On tenant compte de A8 on a finalement:

$$\sim x \vee y = (x \wedge (x \to y)) \vee ((\sim x \vee y) \wedge (x \to y)) = (x \vee \sim x \vee y) \wedge (x \to y) \leq (x \to y).$$

□

Lemme 2.4 $y \leq x \to y$

Dém. Est une conséquence du lemme 2.3. □

Lemme 2.5 *Si $x \leq y$ alors $y \to z \leq x \to z$.*

Dém. Par hypothèse $x = x \wedge y$, alors par A9 on peut écrire

$$x \to z = (x \wedge y) \to z = x \to (y \to z) \tag{1}$$

D'après le lemme 2.4 on a:

$$y \to z \leq x \to (y \to z), \tag{2}$$

et alors de (1) et (2) on déduit:

$$y \to z \leq x \to z$$

□

Lemme 2.6 *Pour toute couple ordonné (x, y)d'éléments de A il existe l'implication intuitionniste $x \Rightarrow (\sim x \vee y)$ et en outre:*

$$x \Rightarrow (\sim x \vee y) = x \to y.$$

Dém. Pour cela on doit démontrer que dans la famille d'éléments z tels que $x \wedge z \leq \sim x \vee y$ il existe un élément maximal et que cet élément est $x \to y$, c'est-à-dire que:

I1) $x \wedge (x \to y) \leq \sim x \vee y$.

I2) Si $x \wedge z \leq \sim x \vee y$ alors $z \leq x \to y$.

La condition I1) est une conséquence de A8. Démontrons alors I2). Par le lemme 2.3 on a:

$$\sim x \vee y \leq x \to y$$

et en tenant compte de l'hypothèse on peut écrire:

$$x \wedge z \leq x \to y \tag{3}$$

d'où par le lemme 2.5 et l'axiome A7:

$$1 = (x \to y) \to (x \to y) \leq (x \wedge z) \to (x \to y)$$

c'est-à-dire $1 = (x \wedge z) \to (x \to y)$, et par A9 nous avons

$$1 = (x \wedge z) \to (x \to y) = z \to (x \to (x \to y)) = z \to ((x \wedge x) \to y) = z \to (x \to y)$$

donc on tenant compte du lemme 2.2, on peut écrire

$$z \leq \sim z \vee (x \to y)$$

d'où

$$z = z \wedge z \leq (z \wedge \sim z) \vee (z \wedge (x \to y))$$

et par A6 on a: $z \wedge \sim z \leq x \vee \sim x$, donc

$$z \leq x \vee \sim x \vee (z \wedge (x \to y)) \leq x \vee \sim x \vee (x \to y)$$

Mais par le lemme 2.3: $\sim x \leq x \to y$, alors on a: $z \leq x \vee (x \to y)$, c'est-à-dire $z = z \wedge (x \vee (x \to y)) = z \wedge ((x \wedge z) \vee (x \to y))$, et alors en tenant compte de (3) on a $z = z \wedge (x \to y)$ c'est- à-dire $z \leq x \to y$. □

Lemme 2.7 $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ (Axiome A11).

Dém. Pour démontre l'axiome A11, on procède comme dans [2], pag. 282.

$$x \to (y \wedge z) = x \Rightarrow (\sim x \vee (y \wedge z)) = x \Rightarrow ((\sim x \vee y) \wedge (\sim x \vee z)) =$$

$$= (x \Rightarrow (\sim x \vee y)) \wedge (x \Rightarrow (\sim x \vee z)) = (x \to y) \wedge (x \to z).$$

□

R. Maronna [6] a demontré qu'un réticulé de De Morgan peut être caracterisé comme un systéme $(A, \sim, \wedge)$ formé par un ensemble non vide, A, un opération monaire $\sim$ et une opération binaire $\wedge$, que verifient les axiomes:

A12) $x = x \wedge \sim (\sim x \wedge \sim y)$

A13) $x \wedge \sim (\sim y \wedge \sim z) = \sim (\sim (z \wedge x) \wedge \sim (y \wedge x))$

Alors il est claire que:

Lemme 2.8 *Pour que le systéme $(A, 1, \sim, \wedge, \to)$ soit une algèbre de Nelson il faut et il suffit que les conditiones suivantes soient vérifiées: A12, A13 et*

A14) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge \sim (y \wedge \sim y)$

A15) $x \wedge (x \to y) = x \wedge \sim (x \wedge \sim y)$

A7) $x \to x = 1$

A9) $(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z)$

Les algèbres de Łukasiewicz trivalentes peuvent être caracterisés d'après A. Monteiro [9] (pag. 7, Lemme 3.3) comme des algèbres de Nelson que verifient la condition:

$$x \vee (x \to 0) = 1$$

Cet axiome peut être écrit sous les deux formes suivants:

A16) $x \vee (x \to \sim 1) = 1,$

A17) $\sim (\sim x \wedge \sim (x \to \sim 1)) = 1.$

- **Exemple** E_6: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ $(x \rightarrow y = \sim x \vee y.)$ sont données par les tables suivantes:

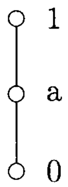


Fig. 3

$\rightarrow$	0	a	1	$\sim$
0	1	1	1	0
a	a	a	1	a
1	0	a	1	0

- **Exemple** E_7: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	a	1	$\sim$
0	1	1	1	0
a	1	1	1	a
1	a	a	1	0

- **Exemple** E_8: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	a	1	$\sim$
0	1	1	1	0
a	1	1	a	a
1	0	a	1	0

- **Exemple** E_9: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	a	1	$\sim$
0	1	1	1	0
a	1	a	1	a
1	0	a	1	0

3 Les exemples

Soit $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ un système formé par 1) un ensemble A, qui contient *tout au moins deux éléments distincts*; 2) un élément $1 \in A$; 3) une opération monaire $\sim$ définie sur A et 4) trois opérations binaires $\wedge, \vee, \rightarrow$, définies sur A. Pour chacun des examples nous indiquerons les tables des opérateurs $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$.

- **Exemple** E_1: 1) $\sim x = x$; 2) $x \wedge y = x \vee y = x \rightarrow y = 1$.
- **Exemple** E_2: 1) $\sim x = x$; 2) $x \wedge y = x \vee y = x$; 3) $x \rightarrow y = 1$.
- **Exemple** E_3: Soit $(A, \wedge, \vee)$ un réticulé distributif ayant un dernier élément 1, et posons : $\sim x = x \rightarrow y = 1$.
- **Exemple** E_4: Soit $(A, 1, \wedge, \vee)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 1. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

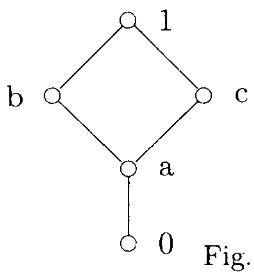


Fig. 1

$\rightarrow$	0	a	b	c	1	$\sim$
0	1	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	1	a
b	c	c	1	c	1	c
c	b	b	b	1	1	b
1	0	a	b	c	1	0

- **Exemple** E_5: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 2. Posons 1) $\sim 0 = 1$, $\sim a = a$, $\sim b = b$, $\sim 1 = 0$ et 2) $x \rightarrow y = -x \vee \sim x \vee y$, où $-x$ est le complément booléen de x.

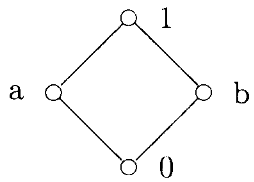


Fig. 2

- **Exemple** E_{10}: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé dont le diagramme est indiqué sur la figure 4. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

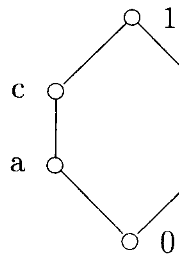


Fig. 4

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1	$\sim$
0	1	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	d	1	d
b	c	c	1	c	1	1	c
c	d	1	d	1	d	1	b
d	c	c	1	c	1	1	a
1	0	a	b	c	d	1	0

- **Exemple** E_{11}: Soit $(A, \wedge, \vee,)$ le réticulé distributif dont le diagramme est indiqué sur la figure 5. Les opérations $\sim$ et $\rightarrow$ sont données par les tables suivantes:

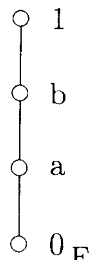


Fig. 5

$\rightarrow$	0	a	b	1	$\sim$
0	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	b
b	a	a	1	1	a
1	0	a	b	1	0

- **Exemple** E_{12}: Soit A la droite numerique et posons par définition $\sim x = -x$, alors $(A, \wedge, \vee, \sim)$ est une algèbre de Kleene. Posons par définition $x \rightarrow y = 1$.

- **Exemple** E_{13}: Soit $A = \{0, 1\}$ une chaine où $0 < 1$. Posons $\sim x = 0$, pour tout $x \in A$, et $x \rightarrow y = 1$.

4 Axiomes indépendants.

A) **Algèbres de Nelson**. Système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ et axiomes A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 et A9.

B) **Algèbres de Nelson**. Système $(A, 1, \sim, \wedge, \rightarrow)$ et axiomes A12, A13, A14, A15, A7 et A9.

C) **Algèbres de Łukasiewicz.** Système $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ et axiomes A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 et A16.

D) **Algèbres de Łukasiewicz**. Système $(A, 1, \sim, \wedge, \rightarrow)$ et axiomes A12, A13, A14, A15, A7, A9 et A17.

E) **Algèbres de De Morgan**. Système $(A, 1, \sim, \wedge)$ et axiomes A12, A13 et A18 $(x \wedge 1 = x.)$

F) **Algèbres de Kleene**. Système $(A, 1, \sim, \wedge)$ et axiomes A12, A13, A14 et A18 $(x \wedge 1 = x.)$

Dans la table suivante, pour chaque example E_i, $1 \leq i \leq 13$ nous notérons avec le symbol "+" que l'axiome A_j, $1 \leq j \leq 18$ est verifié, et avec le symbol "•" que l'axiome A_j n'est pas vérifié. Alors on peut voir d'après beaucoup de calculs que les axiomatiques indiquées sont formés par d'axiomes indépendants.

	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18
E_1	•	+	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	•
E_2	+	•	+	+	+	+	+	+	+	•	+	+	•	•	+
E_3	+	+	•	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+
E_4	+	+	+	•	+	+	+	+	•	•	+	•	+	•	+
E_5	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+
E_6	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	+	•	•	+
E_7	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	•	+	+	+
E_8	+	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	+	+
E_9	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+	+	+	+	+
E_{10}	+	•	+	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	+
E_{11}	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	•	•	+
E_{12}	+	+	+	+	+	+	•	+	+	+	+	•	•	•	•
E_{13}	+	+	•	+	+	+	•	+	•	+	+	•	+	•	+

Bibliographie

[1] Brignole D., *Equational characterization of Nelson Algebras.* Notre Dame J. of Formal Logic 10 (1969) 285-297. Notas de Lógica Matemática 9, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[2] Brignole D. et Monteiro A., *Caractérisation des algèbres de Nelson par de égalités I et II.* Proc. of Japan Academy A3 (1967), 279-283; 284-285. Notas de Lógica Matemática 20, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[3] Kalman J., *Thèse de Doctorat.* Harvard University, (1955).

[4] Kalman J., *Lattices with involution.* Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), 485-491.

[5] Kleene S. C., *On notation for ordinal numbers.* J. of Symbolic Logic,3 (1938), 150-155.

[6] Maronna R., *A characterization of Morgan Lattices.* Portugalia Mathematica. Vol. 23-Fasc. 3(1964),pp. 169-171. Notas de Lógica Matemática 18, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[7] Moisil, Gr. C., *Recherches sur l'algèbre de la logique.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 22 (1935), 1-117.

[8] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Hilbert et de Tarski.* Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[9] Monteiro A., *Construction des Algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques I.* Math. Japonicae, 12 (1967), 1-23. Notas de Lógica Matemática 11, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[10] Monteiro A., *Les éléments réguliers d'un $\mathcal{N}$-lattice.* Textos e Notas 15,, CMAF, Lisboa, Portugal (1978). Informes Técnicos Internos Nro. 43, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1995.

[11] Rasiowa H., *$\mathcal{N}$-lattices and constructive logic with strong negation.* Fund. Math. 46 (1958), 61-80.

[12] Scholander M., *Postulates for distributive lattices*, Canadian Journal of Mathematics, v. 3(1951), pp. 28,30.

Algèbres de Stone libres

A. MONTEIRO et L. MONTEIRO

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1995

Este trabajo fue realizado en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, y los resultados indicados en el §7 fueron presentados a la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina de 1968. *Ver A. Monteiro A. y L. Monteiro L., Algebras de Stone con n generadores libres, Revista de la Unión Matemática Argentina, 23, Nro. 4 (1968), p.201, donde sólo aparece la fórmula indicada al final del §7.*

En 1970 y 1975 aparecieron otros resultados relacionados con este tema:

- R. Balbes and A. Horn, Stone lattices, Duke Math. J., 37 (1970), 537- 546.
- J. Berman and Ph. Dwinger, *Finitely generated pseudocomplemented distributive lattices*, The Journal of the Australian Math. Soc. 19 (Series A), part 2 (1975), 238-246.
- T. Katrinák, A new description of free Stone algebras, Algebra Universalis, 5 (1975), 179-189.

Dejamos al cuidado del lector la comparación de los métodos utilizados en los trabajos citados precedentemente, con los de estas notas.

Dr. Luiz F. Monteiro
Director
INMABB-UNS-CONICET
Agosto, 1995

Algèbres de Stone libres

Antonio Monteiro et Luiz F. Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1968 [1]
Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Soit A un réticulé ayant un premier (0) et un dernier (1) élément. Nous dirons d'après G. Birkhoff [1] que l'élément $x \in A$ a un complément orthogonal s'il existe un élément $\sim x \in A$ tel que:

1) $x \wedge \sim x = 0$,

2) Si $y \in A$ est tel que $x \wedge y = 0$, alors $y \leq \sim x$.

On voit de suite que l'élément $\sim x$ est univoquement derterminé dans le cas où il existe.

Définition 1.1 *Un réticulé distributif A ayant un premier* (0) *et un dernier* (1) *élément sera dit orthocomplementé si chaque élément de A a un orthocomplément.*

Lemme 1.1 *Dans un tel réticulé sont valables les règles de calcul suivantes:*

R1) $\sim 0 = 1$

R2) $\sim 1 = 0$

R3) $x = x \wedge \sim\sim x$

R4) Si $x \leq y$ *alors* $\sim y \leq \sim x$

R5) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

R6) $\sim x \vee \sim y \leq \sim (x \wedge y)$

R7) $\sim\sim\sim x = \sim x$

R8) $\sim\sim (x \wedge y) = \sim\sim x \wedge \sim\sim y$

[1] *Les résultats du* §*7 ont été exposés dans la "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina," 1968,* [11]

R9) $\sim\sim(x \vee y) = \sim\sim(\sim\sim x \vee \sim\sim y)$

R10) $\sim(x \vee \sim x) = 0$

R11) $x \wedge \sim x = 0.$

Remarquons que la loi distributive intervient seulment dans les démonstrations de R5) et R10). Daprès P. Ribenboim [14], les égalités R3), R5), R8) et R11) sont caractéristiques pour l'opération $\sim$ qu'on suppose définie sur un réticulé distributif ayant un premier et dernier éléments. D'autres propriétés caractéristiques on été indiquées par K. Matsumoto [4]. Nous nous proposons d'étudier dans cette note le cas particulier indiqué dans la définition suivante:

Définition 1.2 *Un réticulé orthocomplementé A sera dit une* algèbre de Stone *si:* $\sim x \vee \sim\sim x = 1$, *quelque soit* $x \in A$.

Lemme 1.2 *Dans une algèbre de Stone on a:*

$$\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y, \quad \text{quelques soient } x, y \in A.$$

K. Matsumoto [4]

Dém. Indiquons une démonstration distincte de celle de Matsumoto. Comme:

$$\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim(x \wedge y) = 0,$$

nous avons d'après R8):

$$\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x \wedge \sim\sim y = 0,$$

donc

$$(\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x \wedge \sim\sim y) \vee \sim y = \sim y,$$

$$((\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x) \vee \sim y) \wedge (\sim\sim y \vee \sim y) = \sim y,$$

$$(\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x)) \vee \sim y = \sim y,$$

c'est-à-dire

$$\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x \leq \sim y,$$

donc

$$\sim x \vee (\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x) \leq \sim x \vee \sim y.$$

Mais $\sim x \vee \sim y \geq \sim x \vee (\sim(x \wedge y) \wedge \sim\sim x) = (\sim x \vee \sim(x \wedge y)) \wedge (\sim x \vee \sim\sim x) = (\sim x \vee \sim(x \wedge y)) \wedge 1 = \sim x \vee \sim(x \wedge y) \geq \sim(x \wedge y)$, et alors en tenant compte de R6), le lemme est démontré.

Indiquons an outre démonstration, plus simples et plus élégante, en utilisant la thèorie des filtres. D'après R6) on a : $\sim x \vee \sim y \leq \sim(x \wedge y)$, pour tout $x, y \in A$. Supposons qu'il existent $x, y \in A$ tels que $\sim x \vee \sim y < \sim (x \wedge y)$, Alors il existe un filtre premier P tel que:

$$\text{(a)} \quad \sim (x \wedge y) \in P \ \text{ et } \ \text{(b)} \quad \sim x \vee \sim y \notin P.$$

En particulier

$$\text{(c)} \quad \sim x \notin P \ \text{ et } \ \text{(d)} \quad \sim y \notin P.$$

De $\sim x \vee \sim\sim x = 1 \in P$ et (c) on déduit $\sim\sim x \in P$. D'une façon analogue on démontre que $\sim\sim y \in P$. Nous pouvons donc affirmer en tenant compte de R6) et que P est un filtre, que:

$$\sim\sim (x \wedge y) = \sim\sim x \wedge \sim\sim y \in P$$

et alors, en utilisant (a) nous aurons:

$$0 = \sim (x \wedge y) \wedge \sim\sim (x \wedge y) \in P.$$

Cette contradiction termine la démonstration. □

Dans l'étude des algèbres de Stone on peut, eventuallement, se proposer de suprimer les hypothèses inutiles a la validité des raisonements.

Nous allons donc indiquer un ensemble d'axiomes indépendants pour les algèbres de Stone; et si l'on peut considérer, avec raison, que ce n'est pass necessaire on peut auusi dire que ce n'est pas nuisible.

Soit $(A, 0, 1, \sim, \wedge, \vee)$ un système formé par deux éléments $0, 1 \in A$, une opération unaire $\sim$ et deux opèrations $\wedge$ et $\vee$ définies sur A. Nous dirons que ce système est une algèbre de Stone si les axiomes suivants sont vérifiés:

S1) $x \wedge (x \vee y) = x$

S2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

S3) $1 \vee x = 1$

S4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

S5) $x \wedge \sim x = 0$

S6) $\sim 0 = 1.$

D'après M. Sholander [15] les axiomes S1) et S2) montrent que le système $(A, \wedge, \vee)$ est un réticulé distributif. D'après S3), 1 est le dernier élément du réticulé A. Montrons maintenant que:

S7) $0 \vee x = x.$
En effet comme A est un réticulé nous aurons $x \vee (x \wedge y) = x$. En remplaçant dans la formule antérieure y par $\sim x$, et en tenant compte de S5), nous obtenons S7), donc 0 est le premier élément de A.

S8) *Si* $x \wedge y = 0$ *alors* $y \leq \sim x$.
De $x \wedge y = 0$, on déduit par S4) et S6) que $\sim x \vee \sim y = 1$, donc $y \wedge (\sim x \vee \sim y) = y \wedge 1 = y$, d'où $y \wedge \sim x = y$, c'est-'a-dire $y \leq \sim x$.

Les conditions S5) et S8 montrent que $\sim x$ est l'orthocomplément de x, donc A est un réticulé distributif orthocomplémenté. Montrons maintenant que:

S9) $\sim x \wedge \sim\sim x = 1$. En effet $1 = \sim 0 = \sim (x \wedge \sim x) = \sim x \;\; \sim\sim x$, et S9) montre que A est une algèbre de Stone.

2 Indépendance des Axiomes S1-S6

- **Indépendance de S1**. Soit A un ensemble avec deux éléments distincts 0 et 1. Définons sur A les opérations $\vee$, $\wedge$ et $\sim$, parmi les tables suivants:

$\vee$	0	1	$\wedge$	0	1	$\sim$
0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

  Alors on voit de suite que les axiomes S2)-S6) sont vérifiés, tandis que S1) ne l'est pas car: $1 \wedge (1 \vee 0) = 0 \neq 1$.

- **Indépendance de S2**. Soit A le réticulé dont le diagramme est indiqué sur la figure 1. Posons par définition: $\sim 0 = 1$, $\sim a = b$, $\sim b = a$, $\sim c = d$, $\sim d = c$ et $\sim 1 = 0$. Alors tous les axiomes sont vérifiées a exception de S2) car: $a \wedge (c \vee d) = a \wedge 1 = a$ et $(d \wedge a) \vee (c \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$.

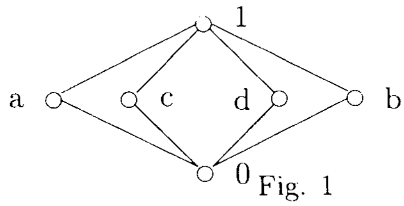


Fig. 1

- **Indépendance de S3**. Soit A le réticulé dont le diagramme est indiqué sur la figure 2. Posons par définition: $\sim 0 = 1$, $\sim 1 = \sim c = 0$. S3) n'est pas vérifiée car: $1 \vee c = c \neq 1$.

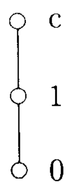


Fig.2

- **Indépendance de S4**. Soit A le réticulé dont le diagramme est indiqué sur la figure 3. Posons : $\sim 0 = 1$, et $\sim x = 0$ si $x \in A - \{0\}$. S4) n'est pas valable car: $\sim (a \wedge b) = \sim 0 = 1$ et $\sim a \vee \sim b = 0 \vee 0 = 0$.

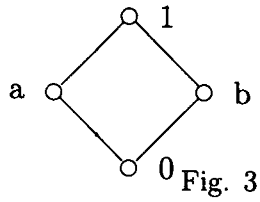


Fig. 3

- **Indépendance de S5**. Considérons encore le réticulé de la figure 3. Alors si l'on pose par définition $\sim 0 = 1 \quad \sim a = a \quad \sim b = b$ et $\sim 1 = 0$. S5) n'est pas valide car $a \wedge \sim a = a \wedge a = a \neq 0$.

- **Indépendance de S6**. Soit A le réticulé indiqué dans la figure 4. Si nous posons $\sim x = 0$ pour tout $x \in A$, S6) n'est pas vérifié car $\sim 0 = 0 \neq 1$.

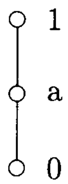


Fig. 4

3 Sous-algèbres

Un sous-ensemble S d'une algèbre de Stone A est une sous-algèbre de A, si S est un $(0,1)$-sous-réticulé A tel que si $s \in S$ alors $\sim s \in S$.
Si X est un sous-ensemble de l'algèbre de Stone A, nous notérons par $ST(X)$ la sous-algèbre de Stone de A engendrée par X. Si S est une sous-algèbre de Stone de A et $\sim a \in A$, nous notérons $ST(S, \sim a)$ au lieu de $ST(S \cup \{\sim a\})$.

Lemme 3.1 $ST(S, \sim a) = \{x \in A : x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a), s_1, s_2 \in S\}$.

Dém. Soit $Q = \{x \in A : x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a), s_1, s_2 \in S\}$.
Soit $s \in S$, comme $s = s \vee 0 = s \vee (\sim a \wedge \sim\sim a) = (s \vee \sim a) \wedge (s \vee \sim\sim a)$ alors $S \subseteq Q$. En outre $\sim a = \sim a \wedge 1 = (0 \vee \sim a) \wedge (1 \vee \sim\sim a)$, alors $\{\sim a\} \subseteq Q$, donc (1) $S \cup \{\sim a\} \subseteq Q$. Montrons que (2) Q est une sous-algèbre de A. Comme $0, 1 \in S$ et $S \subseteq Q$ alors $0, 1 \in Q$. Si $x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a)$ où $s_1, s_2 \in S\}$, alors:

$$\sim x = (\sim s_1 \wedge \sim\sim a) \vee (\sim s_2 \vee \sim a) =$$

$$(\sim s_1 \vee \sim s_2) \wedge (\sim s_1 \vee \sim a) \wedge (\sim s_2 \vee \sim\sim a) \vee (\sim\sim a \vee \sim a) =$$

$$((\sim s_1 \vee \sim s_2)) \vee (\sim a \wedge \sim\sim a)) \wedge (\sim s_1 \vee \sim a) \wedge (\sim s_2 \vee \sim\sim a) =$$

$$[((\sim s_1 \vee \sim s_2) \wedge \sim s_1) \vee \sim a] \wedge [((\sim s_1 \vee \sim s_2) \wedge \sim s_2) \vee \sim\sim a] =$$

$$(\sim s_1 \vee \sim a) \wedge (\sim s_2 \vee \sim\sim a).$$

Si $x, y \in Q$, c'est-'a-dire $x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a)$, $y = (t_1 \vee \sim a) \wedge (t_2 \vee \sim\sim a)$ où $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$, alors on montre que :

$$x \wedge y = ((s_1 \wedge t_1) \vee \sim a) \wedge ((s_2 \wedge t_2) \vee \sim\sim a)$$

et

$$x \vee y = ((s_1 \vee t_1) \vee \sim a) \wedge ((s_2 \vee t_2) \vee \sim\sim a)$$

Nous vénons ainsi de montrer que (2) Q est une sous-algèbre de A. De (1) et (2) on a: $ST(S, \sim a) \subseteq Q$.
Montrons que $Q \subseteq ST(S, \sim a)$. En effet, si $x \in Q$ alors $x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a)$ où $s_1, s_2 \in S$, donc $s_1, s_2 \in S \subseteq S \cup \{\sim a\} \subseteq ST(S, \sim a)$. Comme $\sim a \in S \cup \{\sim a\} \subseteq ST(S, \sim a)$, on a aussi que $\sim\sim a \in ST(S, \sim a)$. Alors $x = (s_1 \vee \sim a) \wedge (s_2 \vee \sim\sim a) \in ST(S, \sim a)$. □

4 Images homomorphes d'un réticulé distributif

Soient A et A' des réticulés distributifs et h un homomorphisme de A sur A', c'est-à-dire une fonction de A sur A' qui vérifie:

$$\text{H1)} \ \ h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y), \quad \text{H2)} \ \ h(x \vee y) = h(x) \vee h(y).$$

Nous dirons alors que A' est une image homomorphe de A.
Il est important de savoir déterminer toutes les images homomophes d'un réticulé distributif. A. Monteiro a indiqué une construction qui permettre déterminer toutes les images homomorphes d'un réticulé distributif. Ces démonstrations n'on pas été publiés mais elles on été exposées dans deux cours realizés a l'Universidad Nacional del Sur [7], [8] et dans le "Simposio Panamericano de Matemática Aplicada" [9]. Nous indiquons ici ces résultats.
Soit $\mathbf{P}'$ la famille de tous les filtres premiers de A'. Si $P' \in \mathbf{P}'$ on voit de suite que $P = h^{-1}(P')$ est un filtre premier de A, donc $\mathbf{Q} = h^{-1}(\mathbf{P}')$ est une famille de filtres premiers de A (*qui peut d'ailleurs être vide, si* $\mathbf{P}'$ *est vide, c'est-à-dire si* A' *a un seul élément).* On voit de suite que:

Lemme 4.1 $h(a) = h(b)$ *si et seulement si:* $\{Q \in \mathbf{Q} : a \in Q\} = \{P \in \mathbf{Q} : b \in P\}$

Cette observation conduit à la construction suivante. Soit $\mathbf{Q}$ une famille de filtres premiers de A. Nous écrirons $a \equiv b$, (mod. $\mathbf{Q}$) ou plus simplesment (si $\mathbf{Q}$ est fixée) $a \equiv b$, pour indiquer que la condition du lemme 4.1 est vérifiée, alors on montre de suite que "$\equiv$" est une relation d'équivalence compatible avec les opérations $\wedge$ et $\vee$, c'est-'a-dire "$\equiv$" est une congruence définie sur A. Soit $|a|$ la classe d'équivalence qui contiente l'élément $a \in A$, c'est-à-dire $|a| = \{x \in A : x \equiv a\}$, et soit $A' = A/\equiv$ l'ensemble quotient de A par la relation "$\equiv$". Algèbrisons A' en définisant les opérations $\wedge$ et $\vee$ sur A' par les formules:

$$|a| \wedge |b| = |a \wedge b| \quad \text{et} \quad |a| \vee |b| = |a \vee b|.$$

Dans ces conditions la transformation $h(a) = |a|$ vérifie les conditions H1 et H2 d'où l'on déduit de suite que $(A', \wedge, \vee)$ est un réticulé distributif, et que A' est une image homomorphe de A. Nous écrirons $A/\mathbf{Q}$ pour représenter le réticulé distributif obtenu de cette manière. On vérifie facilement, en utilisant le lemme 4.1, que toutes les images homomorphes A' d'un réticulé distributif A peuvent être obtenues de la manière que nous venons d'indiquer. Pour cela soit $\mathbb{P}'$ la famille des filtres premiers de A' et $\mathbf{Q} = h^{-1}(\mathbf{P}')$, alors on peut montrer de suite que le réticulé quotient $A/\mathbf{Q}$ est isomorphe à A'.
Il peut naturellement arriver qu'il existent deux familles $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ de filtres premiers de A telles que $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{Q}_2$, mais que $A/\mathbf{Q}_1$ soit isomorphe à $A/\mathbf{Q}_2$. Il suffit de remarquer que si $\mathbf{Q}_1 = \{P_1\}$ et $\mathbf{Q}_2 = \{P2\}$, où P_1 et P_2 sont deux filtres premiers A telles $P_1 \neq P_2$, alors les réticulés $A/\mathbf{Q}_1$, et $A/\mathbf{Q}_2$ sont isomorphes au réticulé $\{0, 1\}$ où $0 < 1$.

Remarquons que dans l'étude des réticulés distributifs ayant un premier et un dernier élément, pour définir un homomorphism h on doit supposer H1, H2 , H3) $h(0) = 0$, et H4) $h(1) = 1$. Dans le cas actuel on peut affirmer que étant donnée une famille $\mathbf{Q}$ de filtres premiers de A, alors:

$$F = \bigcap_{P \in \mathbf{Q}} P \neq \emptyset,$$

el il est clair que F est la classe d'équivalence $|1|$, mod. $\mathbf{Q}$ et $1' = |1|$ sera le dernier élément de $A/\mathbf{Q}$. De même nous aurons:

$$|0| = C(\bigcup_{P \in \mathbf{Q}} P) \neq \emptyset.$$

Les résultats precédents s'appliquent naturellement aux algèbres de Boole, car dans ce cas les homomorphismes peuvent être définies para les conditions H1, H2, H3 et H4. Remarquons que dans les algèbres de Boole il suffit connaître le filtre F, pour detérminer le quotient $A/\mathbf{Q}$, mais cette affirmation n'est pas exacte dans les cas précédents. Nous voyons ainsi que la détermination des images homomorphes d'un réticulé distributif n'est pas aussi simples que dans le cas des algèbres de Boole.
On peut encore démontrer le résultat suivant:

Lemme 4.2 *Si A est un réticulé distributif fini, $\mathbf{Q}$ une famille de filtres premiers de A, et $\mathbf{Q}'$ la famille de filtres premiers du quotient $A/\mathbf{Q}$, alors les ensembles ordonés $(\mathbf{Q}, \subseteq)$ et $(\mathbf{Q}', \subseteq)$ sont isomorphes.*

Ces resultats on été généralissés par A. Monteiro [7], [8] pour le cas des algèbres de De Morgan, et étendues par M. Tourasse Teixeira [16] au cas des M-algèbres.

5 Les filtres premiers d'une algèbre de Stone

Si R est un réticulé distributif, nous répresenterons par $\mathbf{F}(R)$ l'ensemble de tous les filtres de R. Il est bien connue que $(\mathbf{F}(R), \subseteq)$ est un ensemble ordonée. Soit $\mathbf{U}(R)$ l'ensemble de tous les éléments maximales de l'ensemble ordonné $\mathbf{F}(R)$, nous appelerons *ultrafiltres* de R, ces éléments. Nous répresenterons par $\mathbf{P}(R)$ l'ensemble de tous les filtres premiers de R.
La relation la plus simple que puisse existir entre les filtres premiers et les ultrafiltres de R est indiquée dans la définition suivante:

Définition 5.1 *Nous dirons que R a une arithmétique normal si chaque filtre premier P est contenu dans un seul ultrafiltre.* A. Monteiro [5], [6], [10].

Théorème 5.1 *Pour que A ait une arithmétique normal il faut et il suffit qu'étant donnés deux éléments $a, b \in A$ tels que $a \wedge b = 0$ il existent des éléments $a', b' \in R$ tels que $a \wedge b' = a' \wedge b = 0$ et $a' \vee b' = 1$.* [5], [6], [10].

Corollaire 5.1 *Pour qu'un réticulé distributif R orthocomplenté soit une algèbre de Stone il faut et il suffit que R ait une arithmétique normal.*

Dém. Soit R une algèbre de Stone et soient $a, b \in R$ tels que (1) $a \wedge b = 0$. Posons $a' = \sim\sim a$, $b' = \sim a$, alors nous avons $a \wedge b' = a \wedge \sim a = 0$, et comme, par (1) $b \leq \sim a = b'$ alors $a' \wedge b \leq a' \wedge b' = \sim\sim a \wedge \sim a = 0$, donc $a' \wedge b = 0$. En outre $a' \vee b' = \sim a \vee \sim\sim a = 1$, et alors d'après le théorème 5.1, R a une arithmétique normal.
Supposons maintenant que le réticulé orthocomplementé R ait une arithmétique normal. Si $b = \sim a$ alors $a \wedge b = 0$ et il existent d'après le théorème 5.1 des éléments $a', b' \in R$ tels que $a \wedge b' = a' \wedge b = 0$ et $a' \vee b' = 1$. De $a \wedge b' = 0$ on déduit (1) $b' \leq \sim a$. De $0 = a' \wedge b = a' \wedge \sim a$ on déduit (2) $a' \leq \sim\sim a$ et alors de (1) et (2) il résulte $1 = a' \vee b' \leq \sim a \vee \sim\sim a$. Donc $\sim a \vee \sim\sim a = 1$. □

On peut aussi démontrer directement le résultat précedent. Dans [5], pag. 87 est indiqué une démonstration direct du résultat dual du corollaire 5.1.

Si A est une algèbre de Stone, et $X \subseteq M$, soit $N^{-1}(X) = \{x \in A : \sim x \in X\}$. Si $P \in \mathbf{P}(A)$ alors en utilisant les propriétés S1,S2,S5,S6, S7 et S8 on demontre facilement que $I = N^{-1}(P)$ est un idéal premier, donc $\varphi(P) = \mathcal{C}N^{-1}(P)$ est un filtre premier de A, où $\mathcal{C}Y$ répresente le complément de l'ensemble $Y \subseteq A$ para rapport à l'ensemble A. [16]. La transformation φ, s'appelle transformation de Birula-Rasiowa, [3], [8], [16].

Observation 5.1 *$x \notin \varphi(P)$ si et seulement si $\sim x \in P$.*

Lemme 5.1 *Si $P \in \mathbf{P}(A)$ alors $P \subseteq \varphi(P)$.*

Dém. Supposons que $P \not\subseteq \varphi(P)$, alors il existe un élément (1) $a \in P$ tel que $a \notin \varphi(P)$, c'est-à-dire (2) $\sim a \in P$. De (1) et (2) nous avons $0 = a \wedge \sim a \in P$, cet qui est impossible parceque P est un filtre propre. □

Lemme 5.2 *Si* $P, Q \in \mathbf{P}(A)$ *alors:*

1) Si $P \subseteq Q$ *alors* $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

2) $\varphi^2(P) = \varphi(P)$.

Dém.

1) De $P \subseteq Q$ on a $N^{-1}(P) \subseteq N^{-1}(Q)$ et alors $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

2) Comme P est un filtre premier alors $P \subseteq \varphi(P)$, et par conséquent $\varphi^2(P) \subseteq \varphi(P)$. D'un autre côté comme $\varphi(P)$ est un filtre premier nous avons par le lemme 5.1: $\varphi(P) \subseteq \varphi(\varphi(P)) = \varphi^2(P)$.

□

Lemme 5.3 *Tout filtre premier d'une algèbre de Stone A est contenu dans un seul ultrafiltre.*

Dém. Soit P un filtre premier et supposons que $U, M \in \mathbf{U}(A)$ sont tels que (1) $U \neq M$, (2) $P \subset U$ et (3) $P \subset M$. D'après (1) il existe (4) $u \in U - M$ ou il existe (5) $v \in M - U$. Supposons que (4) est verifiée. Comme $u \notin M$, il existe $m \in M$ tel que (6) $u \wedge m = 0$, et alors (7) $\sim u \vee \sim m = 1 \in P$. Comme P est un filtre premier alors $\sim u \in P$ où $\sim m \in P$. Si $\sim u \in P$, on a aussi $\sim u \in U$ et alors $0 = u \wedge \sim u \in U$, cet qui est impossible. Analoguement si $\sim m \in P$ on arrive a une contradiction. Si (5) est verifiée on arrive aussi a une contradiction. □

Lemme 5.4 *Si A est une algèbre de Stone,* $\varphi(P)$ *est un ultrafiltre quelque soit* $P \in \mathbf{P}(A)$.

Dém. Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{P}(A)$, tel que $\varphi(P)$ n'est pas un ultrafiltre, alors il existe un ultrafiltre U de A, tel que: (1) $\varphi(P) \subset U$.
Soit $x \in A$, tel que (2) $x \in U$ et $x \notin \varphi(P)$, alors (3)$\sim x \in P$. Comme (4) $P \subseteq \varphi(P)$, de (3), (4) et (1) on déduit (5) $\sim x \in U$, d'où par (2) nous avons $0 = x \wedge \sim x \in U$, c'est qui est impossible. □

Nous venons ainsi de montrer que:
Si P est un filtre premier d'une algèbre de Stone A, alors $\varphi(P)$ *est l'unique ultrafiltre de A qui contient P.*

J. Varlet [17] a montré que: *Un réticulé distributif orthocomplenté est une algèbre de Stone si et seulement si chaque filtre premier est contenu dans un seul ultrafiltre.*

6 Images homomorphes d'une algèbre de Stone

Soit A une algèbre de Stone et P un filtre premier de A, nous savons que $\varphi(P)$ est un filtre premier de A.
Soit $\mathbf{Q}$ une famille non vide de filtres premiers de A tels que $\varphi(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$, c'est-à-dire:

$$(*) \quad \text{si} \quad P \in \mathbf{Q} \quad \text{alors} \quad \varphi(P) \in \mathbf{Q}.$$

Dans ces conditions la relation "$\equiv$" définie au §4 est compatible avec l'opération $\sim$. Nous pouvons donc definir sur $A/\equiv$ une structure d'algèbre de Stone en posant $\sim |x| = | \sim x|$. Si nous représentons par $A' = A/\mathbf{Q}$ l'algèbre de Stone ainsi obtenue, on peut affimer que $h(a) = |a|$ est un homomorphisme, *l'homomorphisme naturel*, de A sur A'. Alors toutes les images homomorphes A peuvent être obtenues de la manière indiquée précedament.

Si $h : A \to A'$ est un homomorphisme de l'algèbre de Stone A dans l'algèbre de Stone A', *le noyeau* de h, est l'ensemble $N(h) = \{x \in A : h(x) = 1\}$.

Dans l'étude des algèbres qui peuvent être definies par des égalités il est très important de savoir determiner les algèbres sous-directement irréductibles.

Il est évident que toute algèbre de Boole est une algèbre de Stone. L'exemple le plus simple d'une algèbre de Stone qui n'est pas une algèbre de Boole, est le suivant: Soit $\mathbf{T} = \{0, 1/2, 1\}$ une chaîne, où $0 < 1/2 < 1$, et posons par définition: $\sim 0 = 1$, $\sim 1/2 = 0$, et $\sim 1 = 0$. L'ensemble $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ de $\mathbf{T}$ est une sous- algèbre de T, qui est aussi une algèbre de Boole.

Lemme 6.1 *Si P est un filtre premier d'une algèbre de Stone A et $\mathbf{Q}(P) = \{P, \varphi(P)\}$ alors l'algèbre quotient $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe a B ou T.*

Dém. Comme P un filtre premier de A nous savons que et $\varphi(P)$ est l'unique ultrafiltre qui contient P. Il est évident que $\mathbf{Q}(P) = \{P, \varphi(P)\}$ verifie la condition (*) indiquée précedement.
Si $P = \varphi(P)$, c'est-à-dire si P est un ultrafiltre alors $A/\mathbf{Q}(P)$ a seulement deux éléments $|1| = P > |0| = A - P$ et $\sim |1| = |0|$. Alors $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe a $\mathbf{B}$.
Si $P \subset \varphi(P)$, c'est-à-dire si P n'est pas un ultrafiltre alors $A/\mathbf{Q}(P)$ a seulement trois éléments $|1| = P$, $|0| = A - \varphi(P)$ et $|x| = \varphi(P) - P$, où $x \in \varphi(P) - P$. On a $|1| > |x| > |0|$, et $\sim |1| = \sim |x| = |0|$, $\sim |0| = |1|$, donc $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe a $\mathbf{T}$.
Alors dans les deux cas nous pouvons affirmer que $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathbf{T}$. □

Théorème 6.1 *Si A est une algèbre de Stone contenant plus d'un élément alors A est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit cartésien d'algèbres $\mathbf{T}$.*

Dém. Pour chaque $P \in \mathbf{P}(A)$ posons $\mathbf{Q}(P) = \{P, \varphi(P)\}$. Nous avons vue que quelque soit $P \in \mathbf{P}(A)$ alors $A/\mathbf{Q}(P)$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathbf{T}$. Soit

$$A' = \prod_{P \in \mathbf{P}(A)} A/\mathbf{Q}(P),$$

Pour chaque $P \in \mathbf{P}(A)$ soit h_P l'homomorphisme naturel de A sur $A/\mathbf{Q}(P)$. Chaque élément $a' \in A'$ peut être representé par:

$$a' = (a_P)_{P \in \mathbf{P}(A)} \text{ où } a_P \in A/\mathbf{Q}(P).$$

Étant donné $f \in A$ considérons la fonction $F : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{T}$ définie par l'égalité:

$$F(P) = h_P(f) \in \mathbf{T}.$$

Il est claire que $F \in A'$. Soit $\mathcal{S}$ la transformation de A dans A' définie par $\mathcal{S}(f) = F$. Il est facile a voir que S est un homomorphisme de A dans A'. Montrons que S est un isomorphisme. Supposons que $f, g \in A$ et que $f \neq g$, alors nous aurons soit (i) $f \not\leq g$, soit (ii) $g \not\leq f$. Supposons, par example que (i) est vérifiée. Alors il existe un filtre $P \in \mathbf{P}(A)$ tel que $f \in P$ et $g \notin P$, alors $F(P) = 1$ et $G(P) \neq 1$, cela montre que $F \neq G$, c'est-a-dire $\mathcal{S}(f) \neq \mathcal{S}(g)$. □

Corollaire 6.1 *Les seuls algèbres de Stone sous-directement irréductibles sont* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{T}$.

Remarquons que $h(0) = 0$, $h(1/2) = 1$, $h(1) = 1$ est un homomorphisme de $\mathbf{T}$ sur $\mathbf{B}$, donc $\mathbf{T}$ n'est pas une algèbre simples. En outre $\mathbf{B}$ est la seule algèbre de Stone simples. Donc les seules algèbres de Stone semi-simples sont les algèbres de Boole. Cela montre que les algèbres de Stone ne sont en géneral semi-simples.

7 Détermination de l'algèbre de Stone avec un nombre fini n de générateurs libres.

La notion d'algèbre de Stone libre se définit à la manière habituelle, c'est-à-dire:

Définition 7.1 *Si α est un nombre cardinal ($\alpha > 0$) nous dirons que l'algèbre de Stone L est une algèbre avec α générateurs libres, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

L1) L contient un ensemble G de puissance α, telle que L soit la sous-algèbre de L engendrée par G, c'est-à-dire $ST(G) = L$.

L2) Si f est une application de G dans une algèbre de Stone A, alors il existe un homomorphisme h_f de L dans A que prolonge f, c'est-à-dire tel que $h_f(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$.

Lorsque nous voudrons mettre en èvidence le nombre cardinal α nous ècrirons $L = L(\alpha)$. Si n est un nombre entier ($n > 0$) nous écrirons $L(n)$ pour indiquer l'algèbre de Stone avec n générateurs libres.
Comme les algèbres Stone sont défines par des égalités, l'existence et l'unicité (a moins d'isomorphisme) de l'algèbre de Stone $L(n)$, est conséquence d'un théorème de G. Birkhoff. On a aussi que l'homomorphisme h_f indiquée dans L2) est unique. Nous nous proposons maintenat de déterminer $L(n)$, et pour cela nous allons utiliser une

technique que L. Monteiro a introduite dans [12], [13].

Soit $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ l'ensemble des générateurs libres de $L(n)$, et $f : G \to \mathbf{T}$, alors d'après la définition de $L(n)$ il existe un (unique) homomorphisme $h_f : L(n) \to \mathbf{T}$, tel que $h_f(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$. Soit P_f le noyau de h_f, c'est-à-dire $P_f = N(h_f)$. On voit de suite que P_f est un filtre premier de $L(n)$.
Si P est un filtre premier de $L(n)$ et $\mathbf{Q} = \{P, \varphi(P)\}$ alors d'après le lemme 6.1 $C = L(n)/\mathbf{Q}$ est isomorphe á $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{T}$. Soit $h : L(n) \to C$, l'homorphisme naturel et f la restriction de h a l'ensemble G, alors $f : G \to \mathbf{T}$. Il est clair que le prolongement h_f de f vérifie $h_f = h$ et que $N(h_f) = N(h)$.

Lemme 7.1 *Si $e, f \in \mathbf{T}^G$ sont tels que $N(h_e) = N(h_f)$ alors $e = f$.*

Dém. Comme $P_e = N(h_e)$ et $P_f = N(h_f)$ sont des filtres premiers de $L(n)$ et $P_e = P_f$ alors $L(n)/\{P_e, \varphi(P_e)\} = L(n)/\{P_f, \varphi(P_f)\} = C$ et par le lemme 6.1, C est isomorphe á $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{T}$. Alors nous avons deux cas à considerer.

- *Premier cas* $C = \mathbf{B}$, alors si $x \in P_e = P_f$ nous avons $h_e(x) = h_f(x) = 1$ et pour $x \in L(n) - P_e = L(n) - P_f$, $h_e(x) = h_f(x) = 0$, alors $h_e(x) = h_f(x)$ pour tout $x \in L(n)$, en particulier nous avons $h_e(g) = h_f(g)$ pour tout $g \in G$, et comme $h_e(g) = e(g)$ et $h_f(x) = f(g)$ pour tout $g \in G$, nous avons $e(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire $e = f$.

- *Second cas* $C = \mathbf{T}$. Soient $U_e = \varphi(P_e)$ et $U_f = \varphi(P_f)$ les ultrafiltres qui contient P_e et P_f respectivement. Alors $U_e = U_f$, parceque si $U_e \neq U_f$, le filtre premier $P_e = P_f$ serait contennu dans deux ultrafiltres distincts, ce qui est impossible. Alors nous avons:

$$h_e(x) = h_f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in P_e = P_f, \\ 1/2, & \text{si } x \in U_e - P_e = U_f - P_f, \\ 1 & \text{si } x \in L(n) - U_e = L(n) - U_f. \end{cases}$$

  c'est-à-dire $h_e = h_f$, d'où l'on déduit que $e = f$.

□

Nous avons ainsi qu'il existe une correspondance biunivoque de $\mathbf{T}^G$ sur l'ensemble $\mathbf{P}(L(n))$ des filtres premiers de $L(n)$. Comme $\mathbf{T}^G$ a 3^n éléments, l'ensemble $\mathbf{P}(L(n))$ est aussi fini et alors d'après le théorème 6.1 on peut affirmer que l'algèbre $L(n)$ est finie.
Comme $L(n)$ est un réticulé distributif fini, donc tous les filtres F de $L(n)$ sont des filtres principaux, c'est-à-dire pour chaque filtre F de $L(n)$ il existe un élément $f \in L(n)$ tel que $F = \{x \in L(n) : f \leq x\}$. Dans ces conditions nous dirons que f est le générateur du filtre F, ou que F est le filtre engendré par l'élément f et nous écrirons $F = F(f)$.
Pour qu'un filtre P d'un $(0,1)$-réticulé distributif fini, soit un filtre premier il faut el il suffit que le générateur p de P soit un élément premier, c'est-à-dire que: 1) $p \neq 0$, 2) Si $p = a \vee b$ alors $p = a$ ou $p = b$.

D'après un résultat de G. Birkhoff [2] un $(0,1)$-réticulé distributif fini est déterminé à moins d'un isomorphisme par l'ensemble ordonné de ses éléments premiers. Dans ces conditions pour déterminer $L(n)$ il nous suffit de connaître l'ensemble ordonné $\mathbf{p}(n)$ des éléments premiers de $L(n)$.
Nous avons vue que toute application $f : G \to \mathbf{T}$ peut être prolongée a un homomorphisme $h_f : L(n) \to \mathbf{T}$. Remarquons que $h_f(L(n)) = S(f(G))$, c'est-à-dire $h_f(L(n))$ est la sous-algèbre de $\mathbf{T}$ engendré par $f(G)$. Nous savons que $\mathbf{B} = \{0,1\}$ et $\mathbf{T}$ sont les seules sous-algèbres de $\mathbf{T}$. Nous allons indiquer les conditions necessaires et suffisantes pour que $h_f(L(n))$ soit égale à $\mathbf{B}$ ou à $\mathbf{T}$.

Lemme 7.2 *$h_f(L(n)) = \mathbf{B}$ si et seulement si pour tout $g \in G$ on a $f(g) \neq a$.*

Dém.

$\Rightarrow$) Si $h_f(L(n)) = \mathbf{B}$, alors $h_f(x) \in \{0,1\}$ quelque soit $x \in L(n)$, en particulier $f(g) = h_f(g) \neq a$, pour tout $g \in G$.

$\Leftarrow$) Supposons que $f(g) \neq a$, pour tout $g \in G$, alors $a \notin f(G)$ et par conséquence $f(G) \subseteq \mathbf{B}$, d'où l'on déduit que $S(f(G)) = \mathbf{B}$, c'est-à-dire $h_f(L(n)) = \mathbf{B}$.

□

D'après le lemme 7.2 nous pouvons affirmer que:

Lemme 7.3 *$h_f(L(n)) = \mathbf{T}$ si et seulement si il existe au moins un élément $g \in G$ tel que $f(g) = a$.*

Soit $f : G \to \mathbf{T}$, alors il existe un homomorphisme $h_f : L(n) \to \mathbf{T}$, tel que $h_f(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$. Soit P_f le noyau de h_f, alors nous savons que P_f est un filtre premier de $L(n)$, et qu'il existe $p_f \in \mathbf{p}(n)$ tel que $F(p_f) = P_f$.

Lemme 7.4 *La transformation $H(f) = p_f$ que a chaque $f \in \mathbf{T}^G$, fait correspondre l'élément $p_f \in \mathbf{p}(n)$, est une transformation biunivoque de $\mathbf{T}^G$, sur $\mathbf{p}(n)$.*

Dém.

- *H est surjective.* Etant donné un élément $p \in \mathbf{p}(n)$, soit $P = F(p)$, alors P est premier et par conséquence $C = L(n)/\{P, \varphi(P)\}$ est isomorphe a $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{T}$. Soit h l'homomorphisme naturel de $L(n)$ sur C, et f sa restriction à G, alors $f \in \mathbf{T}^G$. Il est evident que h est l'extension de f et que $P_f = P \cap \varphi(P) = P$, c'est-à-dire $H(f) = p_f = p$.

- *H est biunivoque.* Supposons que $H(e) = H(f)$ ou $e, f \in \mathbf{T}^G$, c'est-à-dire $P_e = P_f$, alors par le lemme 7.1 nous avons que $e = f$.

□

Comme $\mathbf{T}^G$ a 3^n éléments, alors l'ensemble ordonné $\mathbf{p}(n)$ a 3^n éléments. Pour connaître $\mathbf{p}(n)$ il suffit de déterminer la relation d'ordre entre les éléments de $\mathbf{p}(n)$.
Pour connaître $f \in \mathbf{T}^G$, il suffit de connaître les valeurs $f(g_i) = f_i \in \mathbf{T}^G$ pour $1 \leq i \leq n$. Nous pouvons representer f par la succession $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et par le lemme 7.4 nous pouvons encore utiliser cette succession pour représenter l'élément p_f.
Si P est un ultrafiltre de $L(n)$ alors son générateur p est un élément minimal (un atome) de $\mathbf{p}(n)$. Caracterisons les successions qui representent les éléments minimales de $\mathbf{p}(n)$.

Lemme 7.5 *Pour que p_f soit un élément minimal de $\mathbf{p}(n)$ il faut et il suffit que $f_i \in \mathbf{B} = \{0, 1\}$.*

Dém. Si p_f est un élément minimal de $\mathbf{p}(n)$, $P_f = F(p_f)$ est un ultrafiltre de $L(n)$ et alors $L(n)/\{P_f, \varphi(P_f)\} = \mathbf{B}$ c'est-à-dire $f_i = 0$ ou $f_i = 1$. Reciproquement si $f_i = 0$ ou $f_i = 1$, alors l'homomorphisme h_f, extension de f prendre seulement les valeurs 0 et 1, c'est-à-dire $h_f(L(n)) = \mathbf{B}$, ce qui demontre que P_f est un ultrafiltre et par conséquence p_f est un élément minimal de $\mathbf{p}(n)$. □

Théorème 7.1 *Pour que $p_e < p_f$ il faut et il suffit que les conditions suivantes soient verifiées:*

I) $f(g) = 0$ *si et seulement si* $e(g) = 0$.

II) $f(g) \leq e(g)$ *pour tout* $g \in G$.

III) *Il existe au moins un élément* $g \in G$ *tel que* $e(g) \neq f(g)$.

Dém.

$\Rightarrow$) Supposons que (1) $p_e < p_f$, alors $F(p_f) = P_f \subset P_e = F(p_e)$. Nous savons que $U = \varphi(P_e)$ est le seul ultrafiltre qui contient P_f. Comme $P_e \subseteq \varphi(P_e) \subseteq \varphi(P_f)$ et par consequant $\varphi(P_e) = \varphi(P_f) = U$. Alors :

1) $e(x) = 0$ si et seulement si $x \in L(n) - U$.

2) $e(x) = 1/2$ si et seulement si $x \in U - P_e$.

3) $e(x) = 1$ si et seulement si $x \in P_e$.

1') $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in L(n) - U$.

2') $f(x) = 1/2$ si et seulement si $x \in U - P_f$.

3') $f(x) = 1$ si et seulement si $x \in P_f$.

D'après (1) et (1') on déduit I), et de (2), (3), (2'), (3') et (4) $U - Pf = (P_e - P_f) \cup (U - P_e)$ on déduit II). Si $e(g) = f(g)$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire $e = f$, alors comme H est une fonction nous avons $p_e = H(e) = H(f) = p_f$, contradiction. Alors III) est vérifiée.

$\Leftarrow$) Soient $e, f \in \mathbf{T}^G$ verifiant les conditions I, II et III, et demontrons que $p_e < p_f$, ce qui est équivalent a montrer que $P_f \subset P_e$. Pour cela considérons les ensembles suivantes :

$$X = P_e \cap P_f; \quad Y = U_f \cap \mathcal{C}P_f \cap P_e; \quad Z = \mathcal{C}(U_e \cap U_f)$$

où $U_e = \varphi(P_e)$ et $U_f = \varphi(P_f)$ sont les ultrafiltres qui contienent a P_e et P_f respectivement. Alors

1) $x \in X$ si et seulement si $h_e(x) = h_f(x) = 1$.
2) $x \in Y$ si et seulement si $h_f(x) = 1/2$ et $h_e(x) \geq 1/2$.
3) $x \in Z$ si et seulement si $h_e(x) = h_f(x) = 0$.
4) X est un filtre.
5) Z est un idèal.
6) Les ensembles X, Y et Z sont disjointes deux à deux.

Voyons que Y n'est pas vide. En effet par III il existe $g \in G$ tel que $e(g) \neq f(g)$, d'où par I et II on a $h_e(g) = e(g) = 1$ et $h_f(g) = f(g) = 1/2$, c'est-à-dire $g \in P_e$ et $g \in U_f \cap \mathcal{C}P_f$.
Nous allons démontrer que l'ensemble $S = X \cup Y \cup Z$ est une sous-algèbre de $L(n)$ tel que $G \subseteq S$.
D'après (4) on peut affirmer que (7) $1 \in S$, et d'après (5) on tire que (8) $0 \in S$.
On voit tout de suite, en considerant tous les cas possibles (voir la table suivante) que: (9) l'ensemble X est fermé par rapport aux opérations $\wedge$, $\vee$ et $\sim$.

$x \in$	$y \in$	$\sim x \in$	$x \wedge y \in$	$x \vee y \in$
X	X	Z	X	X
X	Y	Z	Y	X
X	Z	Z	Z	X
Y	Y	Z	Y	Y
Y	Z	Z	Z	Y
Z	Z	X	Z	Z

Soient $G_0 = \{g \in G : h_f(g) = 0\}$, $G_{1/2} = \{g \in G : h_f(g) = 1/2\}$, et $G_1 = \{g \in G : h_f(g) = 1\}$, alors on a : $G_0 \subseteq Z$, $G_{1/2} \subseteq Y$ et $G_1 \subseteq X$ et par conséquent:

$$G = G_0 \cup G_{1/2} \cup G_1 \subseteq Z \cup Y \cup X = S.$$

Comme S est une sous-algèbre de $L(n)$ qui contient G, nous avons $S = L(n)$.
Finalement $P_f = P_f \cap L(n) = P_f \cap (X \cup Y \cup Z) = (P_f \cap X) \cup (P_f \cap Y) \cup (P_f \cap Z) = (P_f \cap P_e) \cup \emptyset \cup \emptyset = P_f \cap P_e$, c'est-à-dire $P_f \subseteq P_e$. D'après III, $f \neq g$ alors par le lemme 7.4 on a que $p_e = H(e) \neq H(f) = p_f$ et par conséquant $p_f \neq pe$, alors on peut affirmer que $P_f \subset P_e$.

□

Nous allons maintenant déterminer l'ensemble ordonné $\mathbf{p}(n)$, en tenant compte des propriétés caractéristiques de $\mathbf{p}(n)$; a savoir chaque élément $p \in \mathbf{p}(n)$ est precedé par un seul atome.
Nous nous proposons de determiner les composantes connexes de $\mathbf{p}(n)$, c'est-à-dire nous avons a determiner les atomes de $\mathbf{p}(n)$ et les composantes connnexes qui contienent les atomes.
Nous avons vu que m est un atome de $\mathbf{p}(n)$ si et seulement si $H(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ où chaque $a_i \in \{0,1\} = \mathbf{B}$. Cela signifie que les atomes de $\mathbf{p}(n)$ sont en correspondace biunivoque avec les applications de G dans $\mathbf{B} = \{0,1\}$. Nous avons donc 2^n atomes.
Soit $I = \{1, 2, \dots, n\}$ et m un atome de $\mathbf{p}(n)$ alors:

$$\begin{cases} a_i = 0, & \text{pour } \ i \in J(a) \subseteq I,, \\ a_i = 1, & \text{pour } \ i \in I - J(a). \end{cases}$$

Un élément premier $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ tel que $a < p$ doit verifier les conditions:

1) $p_i = 0$ pour $i \in J(a)$,

2) $p_i \in \{1/2, 1\}$ pour $i \in I - J(a)$,

3) Il existe $i \in I - J(a)$ tel que $p_i \neq a_i$ (il est clair qu'on doit avoir $a_i = 1$ et $p_i = 1/2$).

Il est clair que la famille $C(a) = \{p \in \mathbf{p}(n) : a \leq p\}$ est une composante connexe de $\mathbf{p}(n)$. Alors on a: les p_i pour $i \in I - J(a)$ ne peuvent prendre que les valeurs $1/2$ et 1, et dans $C(a)$ on doit ordonner les éléments coordonnées par coordonnées. Comme les coordonnés d'incide $j \in J(a)$ sont fixes et égales a 0, si $J(a)$ a k éléments $0 \leq k \leq n$, alors les $(n-k)$ coordonnées restantes de p varient sur l'ensemble ordonné $\{1/2, 1\}$, où $1/2 < 1$, alors la composante connexe $C(m)$ est une algèbre de Boole avec $(n-k)$ atomes, $0 \leq k \leq n$ que nous répresenterons par B_{n-k}. Il est claire que $B_{n-k} = \mathbf{B}^{n-k}$.
Le nombre de composantes connexes de cette nature est: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $0 \leq k \leq n$ alors:

$$\mathbf{p}(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \mathbf{B}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{B}^{k}.$$

Ou $\sum$ indique la somme cardinale d'ensembles ordonnés.
Rappellons que:

Lemme 7.6 *Si R est un $(0,1)$-réticulé distributif fini, non trivial, dont l'ensemble ordonné $\mathbf{p}(R)$ des éléments premiers de R est isomorphe à l'ensemble ordonné $X = X_1 + X_2$ et si R_i, $i = 1,2$ est un $(0,1)$-réticulé distributif dont l'ensemble des éléments premiers est isomorphe a X_i, $i = 1,2$ alors R* est isomorphe à $R_1 \times R_2$.

Nous savons que le $(0,1)$-réticulé distributif ayant pour éléments premiers l'ensemble ordonné $\mathbf{B}^k$ est le $(0,1)$-réticulé distributif $D(k)$ avec k générateurs libres donc:

$$L(n) = \prod_{k=0}^{n} [D(k)]^{\binom{n}{k}}.$$

Alors $L(1)$ a 6 éléments, $L(2)$ a 108 éléments et $L(3)$ a 233.280 éléments.

Bibliographie

[1] Birkhoff G., *On the combination of sub-algebras*, Proc. Cambridge Phil. Soc 29(1933), 441-464.

[2] Birkhoff G., *Rings of sets*, Duke Math. J., 3 (1937), 443-454.

[3] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-Boolean algebras*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 259-261.

[4] Matsumoto K.,*On a lattice relating to the intuitionistic logic*, Journal of the Osaka University of Sc. and Tech. 2 (1950), 97-107.

[5] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques.* Mémoire présenté à la Soc. Math. de France à l'occasion du jubilé de M. Frechet, (1950). Il a été imprimé dans [10].

[6] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques.* Segundo Symposium de Matemáticas, Villavicencio, Mendoza, Argentina, 21 al 25 Julio 1954, publié par l'Unesco, Montevideo, 1954, 129-161.

[7] Monteiro A., *Algebra de la Lógica III*, Cours réalisé à l'Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Argentina, (1962).

[8] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de De Morgan* , Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1966.

[9] Monteiro A., *Generadores de reticulados distributivos finitos*, Actas del Simposio Panamericano de Matemática Aplicada, Buenos Aires Argentina (1968) , p.465.

[10] Monteiro A., *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques I et II*, Notas de Lógica Matemática 29-30, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[11] Monteiro A. y Monteiro L., *Algebras de Stone con n generadores libres*, Revista de la Unión Matemática Argentina, 23, Nro. 4 (1968), p.201.

[12] Monteiro L., *Sur les algèbres de Heyting trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 19, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[13] Monteiro L., *Algèbre du calcul propositionnel trtivalent Heyting*, Fundamenta Mathematica 74 (1972), 99-109.

[14] Ribenboim P., *Characteriztion of the sup-complement in a distributive lattice with last element*, Summa Brasiliensis Mathematicæ, 2, fasc.4 (1949), 1-7.

[15] Scholander M., *Postulates for distributive lattices*, Canadian Journal of Mathematics, 3 (1951), pp. 28,30.

[16] Tourasse Teixeira M., *M-álgebras*, Faculdade de Filosofía Ciências e Letras do Rio Claro, São Paulo, Brasil, 1964.

[17] Varlet J. , *On the characterization of Stone lattices*, Acta Scientiarum Mathematicarum, 27 (1966), 81-84.

Les algèbres de Nelson semi-simples

A. MONTEIRO

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1995

Este trabajo fue presentado por su autor a la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina de 1963. Un resumen de apenas 26 líneas se encuentra en la Revista de la Unión Matemática Argentina, vol.21, nro. 3, 145-146.

Ha colaborado en la dactilografía del mismo el Lic. Ignacio Viglizzo, y en la corrección quien suscribe.

Dr. Luiz F. Monteiro
Director
INMABB-UNS-CONICET
Agosto, 1995

Les algèbres de Nelson semi-simples

António Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1963
Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Une logique constructive avec négation forte a été considérée par David Nelson [23] et par A. A. Markov [10]. Le calcul propositionnel correspondant a été étudié par H. H. Voroboviev [29], Helena Rasiowa [24], A. Białynicki-Birula et H. Rasiowa [1].
Un progres très important, au point de vue de l'algèbre, dans l'étude de cette logique a été l'introduction par H. Rasiova [25] de la notion de *N-lattice*, qui joue dans cette théorie un rôle analogue a celui des algèbres de Boole (Heyting) dans la logique classique (intuitioniste) et que peut être défine [3], [4] de la manière suivante:

Définition 1.1 *Un système* $(A, 1, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ *formé par: un ensemble non vide* A*, un élément* $1 \in A$*, une opération unaire* $\sim$ *(négation forte), et trois opérations binaires* $\wedge, \vee, \rightarrow$ *définies sur* A*, sera dit un N-lattice, ou une algèbre de Nelson, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

N1) $x \wedge (x \vee y) = x$

N2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

N3) $\sim\sim x = x$

N4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

N5) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$

N6) $x \rightarrow x = 1$

N7) $(x \rightarrow y) \vee (\sim x \vee y) = \sim x \vee y$

N8) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow z$

N9) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\sim x \vee y)$

N10) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$

N11) $x \vee 1 = 1$

Nous dirons, pour abréger, que A *est un N-lattice ou une algèbre de Nelson.*

Les axiomes N1) y N2) montrent, d'après M. Sholander [26], que A est un réticulé distributif par rapport aux opérations $\wedge$ et $\vee$. D'après N11) ce réticulé a le dernier

élément 1.
Nous poserons $0 = \sim 1$, et l'on voit facilement que 0 est le premier élément de A. Outre la négation forte ($\sim$) on peut définir les négations[1]:

$$\rceil x = x \rightarrow 0 \qquad\qquad \lceil x = \sim \lceil \sim x$$

entre les quelles nous avons les relations:

$$\rceil x \leq \sim x \leq \lceil x$$

Les égalités

$$\text{C1)} \quad x \wedge \sim x = 0 \quad \text{C2)} \quad x \wedge \lceil x = 0 \quad \text{C3)} \quad x \wedge \rceil x = 0$$

$$\text{T1)} \quad x \vee \sim x = 1 \quad \text{T2)} \quad x \vee \lceil x = 1 \quad \text{T3)} \quad x \vee \rceil x = 1$$

qui expriment, respectivement, le principe de contradiction et le principe du tiers exclu, pour chacune de ces négations, ne sont pas démontrables à partir des axiomes N1- N11. Les formules $x \leq \lceil\lceil x$; $\lceil\lceil x \leq x$; $\lceil x = \lceil\lceil\lceil x$ ne sont pas valables, mais nous avons $\lceil\lceil\lceil\lceil x = \lceil\lceil x$. Signalons encore le règle de calcul:

$$(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z).$$

Si nous posons par définition

$$x \leftarrow y = \sim (\sim x \rightarrow \sim y)$$

nous avons pour ces algèbres un *principe de dualité*, qu'on peut exprimer, sous une forme abrégée, par la table ci- jointe.

1	0
$\vee$	$\wedge$
$\rightarrow$	$\leftarrow$
$\sim$	$\sim$
$\rceil$	$\lceil$

Pour voir qu'il en est ainsi il suffit de montrer que les égalités duales de N1-N11 sont vérifiés.

Comme cas particulier des algèbres de Nelson, nous pouvons indiquer les algèbres de Boole. Si A est une algèbre de Boole, si $\sim x$ est le complément booléen de x et si nous posons $x \rightarrow y = \sim x \vee y$, alors les axiomes N1-N11 sont vérifiés.

[1]Dans les travaux de H. Rasiowa, et d'autres auteurs, l'élément $\lceil x$ est désigné par la notation $\rceil x$. Ce changement de notation sera justifié plus loin.

Théorème 1.1 *Pour que l'algèbre de Nelson A soit une algèbre de Boole il faut et il suffit que l'une quelconque des conditions suivantes soit vérifié:*

$$B1)\quad x \wedge \sim x = 0 \qquad B2)\quad x \wedge \lceil = 0$$

$$B1)\quad x \to y = \sim x \vee y \qquad B4)\quad x \wedge (x \to y) = x \wedge y$$

$$B5)\quad x \to y = \sim y \to \sim x \quad B6)\quad \lceil\lceil x = x.$$

Il en est de même pour les conditions duales de B1-B6. S'il en est ainsi, $\sim x$ *est le complément booléen de* x *et* $\lceil x = \sim x = \rceil x$.

La loi de contraposition B5) n'étant pas valable nous pouvons considérer avec D. Nelson [23] *l'implication contraposable*

$$x \rightarrowtail y = (x \to y) \wedge (\sim y \to \sim x)$$

Les formules

$$x \to y = x \rightarrowtail (x \rightarrowtail y),$$

$$x \vee y = \sim (\sim x \wedge \sim x),$$

$$1 = x \rightarrowtail x.$$

étant démontrables, il est possible de définir une algèbre de Nelson comme un système $(A, \sim, \wedge, \rightarrowtail)$ vérifiant des axiomes convenables [2]; mais l'opération $\rightarrowtail$ est moins maniable que $\to$.

Comme la formule B4), indiquée dans le théorème 1.1, n'est pas valable, l'opération $\to$ n'est pas une implication intuitioniste à moins qu'il s'agisse du cas très particulier des algèbres de Boole.

Si nous représentons par $a \Rightarrow b$ l'implication intuitioniste des éléments $a, b \in A$, dans le cas où elle existe, on peut démontrer que $a \Rightarrow (\sim a \vee b)$, existe pour tout couple $a, b \in A$ et en outre $a \to b = a \Rightarrow (\sim a \vee b)$.
Cette formule est très utile pour déterminer l'opération $\to$ dans le cas où A est une algèbre de Heyting sur laquelle on puisse définir une structure d'algèbre de Nelson [19].
Il convient de remarquer que, en général l'implication $\Rightarrow$ ne peut pas être définie, au moyen des opérations: $\vee, \wedge, \sim, \to$.
Les propriétés les plus remarquables des algèbres de Nelson ont été indiquées dans les travaux de Helena Rasiowa. Les algèbres de Nelson ont le même degré de complexité que les algèbres de Heyting et la symétrie des algèbres de Boole (dualitè).
Nous nous proposons, dans cette note, de déterminer et étudier les algèbres de Nelson semi-simples.

[2]Ce problème a été résolu en 1962 par Diana Brignole, dans un travail qui n'est pas encore publié.

2 Homomorphismes

La notion d'homomorphisme se définit à la manière habituelle. Nous nous proposons d'indiquer une construction permettant d'obtenir toutes les images homomorphes d'une algèbre de Nelson.

Définition 2.1 *Une partie D d'une algèbre de Nelson A sera dite:*

1) Un système déductif *si:*

$D1)$ $1 \in D$.

$D2)$ *Si* $a,\ a \to b \in D$ *alors* $b \in D$ (modus ponens).

2) Un système déductif contraposable *si:*

$C1)$ $1 \in D$.

$C2)$ *Si* $a,\ a \rightarrowtail b \in D$ *alors* $b \in D$ (modus ponens contraposable).

Un système déductif D sera dit propre *si* $D \neq A$.

Lemme 2.1 *Les notions de système déductif et système déductif contraposable sont équivalentes.*

Lemme 2.2 *Toute système déductif est un filtre.*

On peut montrer que la notion de système déductif est équivalente à celle de *filtre spécial de première espèce* introduite par H. Rasiowa [25].
D'après cet auteur il peut existir des filtres que ne soient pas des systèmes déductifs.

Si h est un homomorphisme de A sur A', le *noyau de h*, c'est-à-dire l'ensemble $D = h^{-1}(1')$ (où $1'$ est le dernier élément de A') est un système déductif. Pour que $h(x) = h(y)$ il faut et il suffit que:

$$(x \to y) \wedge (y \to x) \wedge ({\sim}\, x \to {\sim}\, y) \wedge ({\sim}\, y \to {\sim}\, x) \in D.$$

Théorème 2.1 *Si D est un système déductif de A et si nous posons $a \equiv b \pmod D$ pour indiquer que*

$$(a \to b) \wedge (b \to a) \wedge ({\sim}\, a \to {\sim}\, b) \wedge ({\sim}\, b \to {\sim}\, b) \in D$$

alors la relation $\equiv$, ainsi définie sur A, est une relation d'equivalence compatible avec les opérations définies sur A. La famille $A' = A/D$ des classes d'equivalence algébrisée de la façon naturelle est une algèbre de Nelson qu'on nomme algèbre quotient de A par D. Si $|a|$ est la classe d'equivalence qui contient l'élément $a \in A$, alors la transformation $h(a) = |a|$ est un homomorphisme (naturel) de A sur A'. Le noyau de cet homomorphisme, c'est-á-dire l'ensemble $N = h^{-1}(1')$ (ou $1'$ est le dernier élément de A') coïncide avec D. Réciproquement toute image homomorphe de A peut être obtenue de cette manière.

Ce théorème peut etre considéré comme un cas particulier d'un résultat que nous indiquerons au §5.
La détermination des images homomorphes de A se trouve ainsi réduite à la détermination des systèmes déductifs de A.
L'intersection de systèmes déductifs est un système deductif. Le système déductif engendré par une partie G de A est, par définition, l'intersection $D(G)$ de tous les systèmes déductifs qui contiennent G. Il est clair que $D(\emptyset) = \{1\}$.

Théorème 2.2 *Pour que $x \in D(G)$ (où $G \neq \emptyset$) il faut et il suffit qu'il existe des éléments $g_1, \ldots, g_n$ de G tels que*

$$(g_1 \wedge g_2 \wedge \ldots \wedge g_n) \rightarrow x = 1.$$

S'il en est ainsi nous écrirons $G \vdash x$ ou plus précisément:

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \vdash x$$

Nous conviendrons aussi d'écrire $\emptyset \vdash 1$.

Théorème 2.3 *Pour que $g_1, \ldots, g_n, a \vdash b$ il faut et il suffit que $g_1, \ldots, g_n \vdash (a \rightarrow b)$.*

D'où l'on déduit:

Théorème 2.4 (Théorème de la deduction) *Pour que $G, a \vdash b$ il faut et il suffit que: $G \vdash a \rightarrow b$.*

Théorème 2.5 *Si D est un système déductif et $a \in A$ alors le système déductif engendré par l'ensemble $G = D \cup \{a\}$ est l'ensemble de tous les $x \in A$ tels que $a \rightarrow x \in D$.*

3 Systèmes déductifs irréductibles

Parmi les systèmes déductifs il est important de distinguer ceux qui sont indiqués dans les définitions suivantes:

Définition 3.1 *Un système déductif D sera dit* irréductible *si:*

1. *D est propre;*

2. *Si D_1 et D_2 sont des systèmes déductifs tels que $D = D_1 \cap D_2$ alors: $D = D_1$ ou $D = D_2$,* (H. Rasiowa [25]).

Définition 3.2 *Un système déductif D sera dit* premier *si:*

1. *D est propre;*

2. $a \vee b \in D$ implique: $a \in D$ ou $b \in D$.

H. Rasiowa [25] a démontré que ces deux notions sont équivalentes et qu'il peut exister des filtres premiers qui ne soient pas des systèmes déductifs.
Il est aussi important de considérer la définition suivante:

Définition 3.3 *Un système déductif D est* complètement irréducible *si:*

1. *D est propre;*
2. *Etant donné une famille de systèmes déductifs $\{D_i\}_{i \in I}$ telle que $D = \bigcap_{i \in I} D_i$ il existe un indice $i \in I$ tel que $D = D_i$.*

La famille de tous les systèmes déductifs qui ne contiennent pas un élément $c \neq 1$ est inductive supérieurment.

Définition 3.4 *Un système déductif D sera dit* lié *à l'élément c si D est un système déductif maximal parmi ceux qui ne continnent pas c.*

Théorème 3.1 *Pour qu'un système déductif D soit complètement irréductible il faut et il suffit qu'il soit lié à un élément c.*

Théorème 3.2 *Pour que le système déductif D soit lié à c il faut et il suffit que*

1. *$c \notin D$;*
2. *$x \to c \in D$, pour tout $x \notin D$.*

Théorème 3.3 *Tout système déductif propre est l'intersection de systèmes déductifs complétement irréductibles.*

Ces deux derniers résultats jouent un rôle important au point de vue technique.

Théorème 3.4 *La famille $\mathcal{I}$ de tous les systèmes déductifs irréductibles, ordonnée par la relation d'inclusion est inductive supérieurment et inférieurment. Les éléments maximaux de $\mathcal{I}$ seront appelés:* systèmes déductifs maximaux.

Théorème 3.5 *Pour qu'un système déductif M propre soit maximal il faut et il suffit qu'une quelconque des conditions suivantes soit vérifiée:*

M1) Pour chaque x, $x \in M$ ou $\lceil x \in M$.

M2) Si $x, y \notin M$ alors $x \to y \in M$.

Les algèbres de Nelson simples se définissent à la manière habituelle.

Soit $\mathbf{T}$ un un ensemble formé par trois éléments $\mathbf{T} = \{0, a, 1\}$. Sur $\mathbf{T}$ on peut définir une seule structure d'algèbre de Nelson, déterminée par les tables:

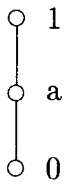
$\wedge$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

$\vee$	0	a	1
0	0	a	1
a	a	a	1
1	1	1	1

$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	1	1	1
1	0	a	1

x	$\sim x$
0	1
a	a
1	0

Il est claire que le réticulé $\mathbf{T}$ a le diagramme suivante:



L'ensemble $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ algébrisé par les mêmes tables est une algèbre de Boole, donc une algèbre de Nelson. $\mathbf{B}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{T}$.

Théorème 3.6 $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{T}$ *sont les seules algèbres simples.*

Corollaire 3.1 *Pour que le système déductif M soit maximal il faut et il suffit que A/M soit isomorphe à $\mathbf{B}$ ou à $\mathbf{T}$.*

4 Les algèbres de Nelson semi-simples

La définition suivante se présente d'une façon naturelle.

Définition 4.1 Le radical *de A est l'intersection, $Rad(A)$, de tous les sys tèmes déductifs maximaux de A. Un algèbre de Nelson A sera dit semi-simples si $Rad(A) = \{1\}$.*

Théorème 4.1 *Le radical de A est identique à chacun des ensembles suivants:*

1. *L'ensemble de tous les $x \in A$ tels que $\lceil\lceil x = 1$.*

2. *Le système déductif engendré par les éléments de la forme $x \vee \lceil x$, $x \in A$.*

3. *Le système déductif engendré par les éléments de la forme $((a \to b) \to a) \to a$, $a, b \in A$.*

Théorème 4.2 *L'algèbre $A/Rad(A)$ est semi-simple. Si une algèbre de Nelson semi-simple A' est une image homomorphe de A alors A' est une image homomorphe de $A/Rad(A)$.*

Théorème 4.3 *Pour qu'un système déductif premier D de A soit maximal il faut et il suffit qu'il contient le radical, c'est-'a-dire $Rad(A) \subseteq D$.*

Les algèbres de Nelson semi-simples peuvent être caractérisées de plusieurs manières.

Théorème 4.4 *Pour qu'une algèbre de Nelson soit semi-simples il faut et il suffit qu'une quelconque des conditions suivantes soit vérifiée:*

S1) $a \vee \lceil a = 1$;

S2) $(a \to b) \to a = a$;

S3) $a \to b = \lceil a \vee b$;

S4) Tout système déductif premier est maximal;

S5) Tout système déductif propre est l'intersection de systèmes déductifs maximaux.

D'où l'on déduit que:

Théorème 4.5 *Toute algèbre de Nelson semi-simple A, contenant tout au moins deux éléments, est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit cartésien d'algèbres* $\mathbf{T}$.

Indiquons la démonstration de ce théorème dans ses lignes générales.
Dans le cas des algèbres de Nelson semi-simples, les filtres premiers minimaux (c'est-à-dire les complémentaires des idéaux maximaux) coïncident avec les systèmes déductifs maximaux.

Soit $E = \{M\}$ l'ensemble des filtres premiers minimaux de A. Soit $\mathcal{F} = \mathbf{T}^E$ la famille de toutes les fonctions de E dans T algébrisées point par point. $\mathcal{F}$ est une algèbre de Nelson semi- simple. Pour chaque $M \in E$ soit m l'homomorphisme naturel de A dans l'algèbre quotient A/M (qui est une sous-algèbre de $\mathbf{T}$).

A chaque élément $f \in A$ faisons correspondre la fonction $\varphi(f) = F \in \mathcal{F}$ définie par la formule

$$F(M) = m(f) \in \mathbf{T}.$$

On voit de suite que φ est un homomorphisme de A dans $\mathcal{F}$ et de la semi-simplicité de A on déduit que φ est un isomorphisme.
Si A est un algèbre de Boole alors $A/M = \mathbf{B}$ et la démonstration précédente coïncide avec celle du théorème de M. Stone [28].

Nous allons maintenant montrer que le théorème de représentation 4.5 peut être identifié avec un théorème de Gr. C. Moisil. Pour cela nous avons besoins de rappeler la notion d'algèbre de Łukasiewicz (trivalente), introduite par Gr. C. Moisil [11], [12], [15] qu'on peut définir de la maniére suivante [18], [21]:

Définition 4.2 *Un système $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ formé par: un ensemble A; un élément $1 \in A$; deux opérations monaires $\sim, \nabla$ et deux opérations binaires $\wedge, \vee$ définies sur A, sera dit une algèbre de Lukasiewicz (trivalente) si les axiomes suivants sont vérifiés:*

A1) $x \wedge (x \vee y) = x$

A2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

A3) $\sim\sim x = x$

A4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

A5) $\sim x \vee \nabla x = 1$

A6) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$

A7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

Pour abréger nous dirons aussi que A est une algèbre de Lukasiewicz.

Pour comparer cette définition avec celle de Gr. Moisil on doit poser $\sim x = Nx; \nabla x = \mu x = Mx$.
Cette notion joue dans l'etude du calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz un rôle analogue à celui des algèbres de Boole dans l'etude du calcul propositionnel classique.

Théorème 4.6 *Si dans une algèbre de Lukasiewicz nous posons $x \to y = \nabla \sim x \vee y$ alors le système $(A, 1, \sim, \to, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Nelson semi-simple, et en outre: $\nabla x = \sim x \to 0$.*

Réciproquement:

Théorème 4.7 *Si $(A, 1, \sim, \to, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Nelson semi-simple et si nous posons $\nabla x = \sim x \to 0$, alors le système $(A, 1, \sim, \nabla, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Lukasiewicz et en outre $x \to y = \nabla \sim x \vee y$.*

Ces deux théorèmes montrent que nous pouvons identifier les algèbres de Nelson semi-simples avec les algèbres de Lukasiewicz trivalentes. Ce résultat est à comparer avec le théorème suivant: les algèbres de Heyting semi-simples coïncident les algèbres de Boole [16], page 157.
Le principe de dualité subsiste dans les algèbres de Nelson semi-simples puisque on peut démontrer la formule $x \wedge \rceil x = 0$ [dual de S1), théorème 4.4]. Dans le cas actuel les formules (C1), (T1), (C2), (T3) ne sont pas démontrables, mais nous avons $\lceil x = \lceil\lceil\lceil x$ et $\lceil\lceil x \leq x$.
D'après Gr. Moisil [13], [15] les algèbres de Lukasiewicz sont des algèbres de Heyting. On peut montrer que l'implication intuitioniste $a \Rightarrow b$ est donnée par la formule:

$$a \Rightarrow b = (a \to b) \wedge (\nabla a \to \nabla b) = \sim \nabla a \vee (\nabla \sim a \wedge \nabla b) \vee b.$$

Donc $\rceil x = \sim \lceil \sim x = \sim \nabla x = x \Rightarrow 0$ est la négation intuitioniste de x, ce qui explique le changement de notations que nous avons adopté d'après une suggestion de Gr. Moisil.

Dans l'algèbre $\mathbf{T}$, l'implication contraposable $\rightarrowtail$ est donnée par la table ci-jointe.

$\rightarrowtail$	0	a	1
0	1	1	1
a	a	1	1
1	0	a	1

Elle coïncide donc (en posant $a = \frac{1}{2}$) avec l'implication que Lukasiewicz a utilisée pour définir son calcul propositionnel trivalent.
Les formules:

$$x \vee y = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail y$$

$$x \wedge y = \sim (\sim x \vee \sim y)$$

$$x \rightarrow y = x \rightarrowtail (x \rightarrowtail y)$$

$$1 = x \rightarrowtail x$$

valables dans toute algèbre de Nelson semi-simple montrent que les opératins $\rightarrow, \vee, \wedge$ et la constante 1 peuvent s'exprimer au moyen des opérations $\rightarrowtail$ et $\sim$, sui sont les connectifs que J. Lukasiewicz [8], [9] a utilisé pour décrire son calcul propositionnel trivalente.

5 Les algèbres libres

Nous nous proposons maintenant d'indiquer la répercussion des résultats précédents sur le calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz.
La notion d'algèbre de Nelson (Lukasiewicz) libre se définit à la maniére habituelle. Etant donné que les algèbres de Nelson et de Lukasiewicz peuvent êtrê définies au moyen d'egalités, on en déduit, par un théorème de G. Birkhoff [2], l'existence et l'unicité, à moins d'un isomorphisme, des algèbres de cette nature avec un nombre donné $c > 0$ de générateurs libres.

Le calcul propositionnel constructif avec négation forte a été défini de la maniére suivante: *L'alphabet* de ce calcul est constitué par: $1^{\underline{o}}$) un ensemble G, non vide, de *variables propositionnelles* $G = \{g_i\}_{i \in I}$; $2^{\underline{o}}$) Les connectifs: $\sim, \lceil, \rightarrow, \wedge, \vee$; $3^{\underline{o}}$) Les *symboles auxiliares* (,). L'ensemble $\mathcal{L}$ des *formules* (bien formées) se définit à la maniére habituelle. Nous poserons pour abréger $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.
Une formule est un *axiome* si elle a une des formes sivantes (où x, y, z sont des formules).

A1) $(x \rightarrow (y \rightarrow x))$

A2) $((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)))$

A3) $((x \wedge y) \to x)$

A4) $((x \wedge y) \to y)$

A5) $((z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to (x \wedge y))))$

A6) $(x \to (x \vee y))$

A7) $(y \to (x \vee y))$

A8) $((x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z)))$

A9) $((x \to \lceil y) \to (y \to \lceil x))$

A10) $(\lceil x \to (x \to y))$

A11) $(\sim x \to (x \to y))$

A12) $(\sim (x \to y) \leftrightarrow (x \wedge \sim y))$

A13) $(\sim (x \wedge y) \leftrightarrow (\sim x \vee \sim y))$

A14) $(\sim (x \vee y) \leftrightarrow (\sim x \wedge \sim y))$

A15) $(\sim \lceil x \leftrightarrow x)$

A16) $(\sim\sim x \leftrightarrow x)$

Une partie D de $\mathcal{L}$ ser dite un système déductif si: D1) D contient tous les axiomes; D2) D vérifie le *modus ponens* c'est-á-dire: si $x, x \to y \in D$ alors $y \in D$. L'ensemble $\mathcal{T}$ des théses de $\mathcal{L}$ est, par définition, l'intersection de tous les systèmes déductifs.
Etant donné un système déductif D posons, avec Helena Rasiowa, $a \equiv b \pmod D$ si $(a \to b) \wedge (b \to a) \wedge (\sim a \to\sim b) \wedge (\sim b \to\sim a) \in D$.
D'après cet auteur la relation binaire $\equiv$ ainsi définie sur $\mathcal{L}$ est une relation de congruence compatible avec les opérations $\sim, \lceil, \wedge, \vee, \to$ définies sur $\mathcal{L}$.
Soit $|a|_D$ la classe d'equivalence (module D) qui contient l'élément $a \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}/D$ l'ensemble des classes d'equivalence. En définissant les opérations $\sim, \lceil, \wedge, \vee, \to$ sur $\mathcal{L}/D$ de la façon naturelle, nous obtenons une algèbre de Nelson qu'on appelle l'algèbre *quotient* de $\mathcal{L}$ par D. La transformation $h(l) = |l|_D$ est un homomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}/D$.
Si $d \in D$ alors $|d|_D = 1$ est le dernier élément de $\mathcal{L}/D$. Le noyau de l'homomorphisme h, c'est-á-dire l'ensemble $h^{-1}(1)$ coincide avec D.
Si $D = \mathcal{T}$ alors l'algèbre quotient $\mathcal{L}/\mathcal{T} = L$, qu'on nomme l'*algèbre de Lindebaum* de $\mathcal{L}$, est une algèbre de Nelson (H. Rasiowa [24], [25]) et l'on peut montrer plus précicément que les $|g_i|_D$ sont des générateurs libres de L.
Nous voyons ainsi que la syntaxe du calcul propositionnel constructif avec négation forte permet de décrire l'algèbre de Nelson ayant autant de générateurs libres qu'il y a de variables propositionelles.

Remarquons que les axiomes schémes A1)-A10) avec la régle de *Modus Ponens* caractérisent le calcul propositionnel intuitionniste, donc le calcul propositionnel constructif avec négation forte peut être considéré comme l'extension du calcul propositionnel intuitionniste qu'on obtient en ajoutant un noveau connectif (à son alphabet) et les axiomes schémes A11)-A16), tout en conservant comme seule régle celle de *Modus Ponens*.
D'aprés un résultat de H. Vorobiev [29], [30] cette extension est *conservative*, c'est-á-dire les formules de $\mathcal{T}$ dans lesquelles ne figure le connectif $\sim$ coincident avec les thèses du calcul propositionnel intuitionniste. Cependant cette extension n'est pas simple (single-valued) *au sens de* Smetanic [27] car, d'après H. Vorobiev [29], les formules de la forme:

$$\text{(S)} \quad (((x \to y) \wedge (y \to x)) \to ((\sim x \to\sim y) \wedge (\sim y \to\sim x)))$$

ne sont pas des théses de $\mathcal{L}$.
Remarquons maintenant que si l'on ajoute aux axiomes schéma A1)-A10) du calcul propositionnel intuitionniste l'axiome schéma

$$\text{A0)} \ (\lceil x \vee x)$$

tout en conservant comme seule régle celle de Modus Ponens, nous obtenons le calcul propositionnel classique; donc d'après les théorèmes 4.4 et 4.7 nous pouvons affirmer que:

Théorème 5.1 *Si l'on ajoute aux axiomes schéma A1)-A16) du calcul propositionnel constructif avec négation forte l'axiome schéma A0) et si $\mathcal{T}'$ est l'ensemble des théses du calcul ainsi obtenu alors l'algèbre quotient $L' = \mathcal{L}/\mathcal{T}'$ est l'algèbre de Nelson semi-simple ayant autant de générateurs libres qu'il y a de variables propositionnelles.*

En tenant compte du théorème 4.5 on voit de suite que **T** est une matrice caractéristique pour le calcul propositionnel indiqué dans la théorème 5.1, d'où l'on déduit que:

Corollaire 5.1 *Les axiomes schéma A0)-A16) avec la régle de Modus Ponens caractérisent le calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz.*

L'algèbre de Łukasiewicz avec un générateur libre a été determinée par Gr. Moisil [12]. Nous ne savons pas si le résultat suivant est connu ou non.

Théorème 5.2 *Le nombre d'éléments de l'algèbre de Łukasiewicz L_n avec n générateurs libres, est donné par la formule:*

$$N(L_n) = 3^{3^n - 2^n} 2^{2^n}$$

Plus précisément L_n est isomorphe au produit cartésien de $3^n - 2^n$ algèbres T et 2^n algèbres B.

6 Relations du calcul propositionnel de Łukasiewicz avec d'autres calculus

Les résultats précédents montrent que le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz peut être considéré comme une extension du calcul propositionnel classique (formulé au moyen de schémas A0)-A10) et de la régle de Modus Ponens), moyennant l'adjonction du connectif $\sim$ (à son alphabet) et des axiomes shémas A11)-A16).
Cette extension est *conservative*, c'est-á-dire toutes les formules de $\mathcal{T}'$ dans lesquelles ne figure pas le connectif $\sim$ sont des théses du calcul propositionnel classique, mais elle n'est pas *simple au sens de* Smetanic, car les formules de la forme (S) n'appartiennent pas á $\mathcal{T}'$.
Remarquons encore que si l'on définit le radical de L comme l'intersection $Rad(L)$ de tous les systèmes déductifs maximaux de L, alors:

Théorème 6.1 *$L/Rad(L)$ est isomorphe à l'algèbre de Lindenbaum du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz.*

Il est bien connu que si l'on ajoute l'axiome schéma $x \vee \sim x$ à ceux du calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz, nous obtenons comme extension un calcul propositionnel équivalent au calcul propositionnel classique et il est clair que cette extension n'est pas conservative.
L'important résultat de Gr. Moisil d'après lequel les algèbres de Łukasiewicz sont des algèbres de Heyting lui a permis de montrer [12], [15] que le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz peut être considéré comme une extension du calcul propositionnel intuitionniste (plus précisément du calcul propositionnel positif au sense de Hilbert-Bernays) moyennant l'adjonction du connectif "$\sim$" á son alphabet, et des axiomes schémas convenables; en outre on doit ajouter à la régle de Modus Ponens pour l'implication intuitinneste la régle:

R2) Si $x \Rightarrow y$ est une thése alors $\sim y \Rightarrow \sim x$ est une thése.

Cette extension n'est pas conservative, mais on peut montrer qu'il s'agit d'une extension conservative du calcul propositionnel trivalent, considérée par A. Heyting, et dont l'étude a été développée par Łukasiewicz [8], [9] , L. Monteiro [20] et d'autres auteurs.
Cette extension n'est pas simple, au sens de Smetanic, car, si nous posons $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$, les formules de la forme:

$$((x \Leftrightarrow y) \Rightarrow (\sim x \Rightarrow \sim y))$$

n'appartiennent pas à $\mathcal{T}'$ (Pour l'étude des extensions simples du calcul propositionnel trivalent de Heyting voir les travaux de Smetanic).
Le calcul propositionnel modal S5, [7] - dont l'alphabet contient les connectifs: $\rightarrow$

$, \vee, \wedge, \lceil, \Delta$ (Nous représentons le symbole de nécessité par Δ), et les symboles auxiliares (,) - peut être caractérisé (K. Gödel [5]) par les axiomes schéma A0)-A10) et

$$\begin{array}{ll} \Delta 1) & (\Delta x \to x) \\ \Delta 2) & (\Delta(x \to y) \to (\Delta x \to \Delta y)) \\ \Delta 3) & (\lceil \Delta x \to \Delta \lceil \Delta x) \end{array}$$

en ajoutant à la régle du Modus Ponens la

Régle R2) Si x est une thése alors Δx est une thése.

Si dans le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz nous posons:

$$\Delta x = \sim \nabla \sim x = \sim \lceil x,$$

alors les axiomes A0)-A10) $\Delta 1) - \Delta 3)$ et les régles R1) et R2) sont valables, et cela montre que ce calcul est une extension de S5.
Cette extension n'est pas conservative, car les formules de la forme:

$$(\Delta(g_i \vee g_j) \to (\Delta g_i \vee \Delta g_j))$$

appartiennent á $\mathcal{T}'$ et ne sont pas des théses de S5; et, en outre, elle n'est pas une extension simple.
L'implication stricte doit être définie dans le calcul de Łukasiewicz par la formule:

$$x \twoheadrightarrow y = \Delta(x \to y) = \Delta(\nabla \sim x \vee y) = \nabla \sim x \vee \Delta y$$

En résumé: le calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz peut être considéré comme une extension des calculs propositionnels classique, trivalent de Heyting et modal S5, tout en étant un cas particulier du calcul propositionnel constructif avec négation forte.

Dans un autre travail nous montrerons que le calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz peut être aussi obtenu dans le calcul fonctionnel monadique classique [6], ce qui montre son intêret, même dans le cadre de la logique classique.

Bibliographie

[1] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On constructive falsity in the contructive logic with strong negation.* Colloquium Mathematicum, 6 (1958), 287-310.

[2] Birkhoff G., *Lattice Theory.* Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, 3rd ed., Providence (1967).

[3] Brignole D., *Equational characterization of Nelson Algebras.* A paraître.

[4] Brignole D. et Monteiro A., *Caractérisation des algèbres de Nelson par de égalités.* A paraître.

[5] Gödel K., *Zum intuitionischen Aussgenkalkul.* Ergebnisse eines mathem. Kollogu-imus 4 (1933), 40.

[6] Halmos P., *Algebraic logic I. (Monadic Boolean algebras.)*, Compositio Mathematica, 12 (1954-56), 217-249.

[7] Lewis C. I. and Langford C. H., *Symbolic Logic.* New York, (Century Co.), 1932.

[8] Łukasiewicz J., *O logike trojwartosciowej.* Ruch Filozoficzny 5 (1920), 170.

[9] Łukasiewicz J., *Elementy logiki matematyczej.* Warzawa, 1929.

[10] Markov A. A., *A contructive Logic.* Matematiceskih Nauk (N.S.), 5 (1950), 187-188.

[11] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes.* Annales Sc. de l'Université de Jassy, 26 (1940), 431- 466.

[12] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysippiennes.* Annales Sc. de l'Université de Jassy, 27 (1941), 86-98.

[13] Moisil Gr. C., *Logique Modale.* Disquisitiones Mathematicae et Physicae, Buc. 2 (1942), 3 -98.

[14] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algèbres de Łukasiewicz trivalentes.* Analele Universitatii C. I. Parhon, Serie Acta Logica, 3 (1960), 83-95.

[15] Moisil Gr. C., *Les logiques non-chrysippiennes et leurs applications.* Acta Philos. Fenn. 16 (1963), 137-152.

[16] Monteiro A. , *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques.* Colóquio de Villavicencio, 21-25 julio 1954, publié par l'UNESCO, Montevideo (1954), 129-161.

[17] Monteiro A., *Relations between Łukasiewicz three-valued algebras and monadic Boolean algebras.* International Congress for Logic, Methodology and Phylosophy of Science. Program and Abstract. The Hebrew University, Jerusalem, (1964), 16-17.

[18] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes.* A paraître dans le Bulletin de la Société des Sciences Mathématiques de la Rep. Pop. Roumaine.

[19] Monteiro A., *Construction des algèbres de Nelson finies.* A paraître.

[20] Monteiro L., *Sur les algèbres de Heyting trivalentes.* A paraître.

[21] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentès.* A paraître dans le Bulletin de la Société des Sciences Mathématiques de la Rep. Pop. Roumaine.

[22] Monteiro L. et González Coppola L., *Sur une construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes.* A paraître dans Portugaliae Mathematica.

[23] Nelson D., *Constructible falsity.*, Journal of Symbolic Logic 14 (1949), 16-26.

[24] Rasiowa H., *Algebraic Charakterisierung Intuitionistischen Logik mit starker negation.* Constructivity in Mathematics. Proceedings of the Colloquium hold at Amsterdam, (1957) edited by A. Heyting. Studies in Logic and Fundations of Mathematics. Amsterdam 1959.

[25] Rasiowa H., *N-lattices and constructive logic with strong negation.* Fund. Math. 46 (1958), 61-80.

[26] Sholander M., *Postulates for distributive lattices.* Canadian J. of Math. 3 (1951), 28-30.

[27] Smetanic Y. S., *On statement calculi with an additional operation.* Doklady, Academy of Sciences of the URSS 139 (1961), 309-312.

[28] Stone M. H., *The theory of representation of Boolean algebras.* Trans. A.M.S. 40 (1936), 37-111.

[29] Vorobiev H. H., *A constructive propositional calculus with strong negation.* Doklady Akademii Nauk SSSR. 85 (1952), 465-468.

[30] Vorobiev H. H., *The problem of deducibility in the constructive propositional calculus with strong negation.* Doklady Akademii Nauk SSSR. 85 (1952), 689-692.

Les algèbres de Hilbert linéaires

A. MONTEIRO

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1996

Este trabajo fue expuesto en un Seminario sobre Lógica Algebraica realizado en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur en 1961. Una primera redacción del mismo fue realizada por L. Monteiro ese mismo año.

La redacción actual se debe a L. Monteiro. En el dactilografiado ha colaborado el Lic. Ignacio Viglizzo.

Les Algèbres de Hilbert linéaires

Antonio Monteiro

Seminaire de Logique Algèbrique [1]

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1961
Bahía Blanca - Argentina

1 Introduction

Définition 1.1 *Soit $(A, \rightarrow, 1)$ un système formé par un ensemble non vide A, une opération binaire $\rightarrow$ définie sur A et un élément $1 \in A$, qui vérifie les axiomes suivants:*

H1) $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$.

H2) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$.

H3) $a \rightarrow 1 = 1$.

H4) Si $a \rightarrow b = 1$ *et* $b \rightarrow a = 1$ *alors* $a = b$.

Nous dirons alors que A est une algèbre de Hilbert. [5], [1], [2].

Nous pouvons donc affirmer que A est un modèle implicatif au sens de L. Henkin, [3].

Lemme 1.1 *Dans une algèbre de Hilbert, est valable:*

H5) $a \rightarrow a = 1$

Définition 1.2 *Nous écrirons* $a \leq b$, *pour indiquer que* $a \rightarrow b = 1$. [3].

Lemme 1.2 *La relation* $\leq$ *est une relation d'ordre, et* $x \leq 1$, *pour tout* $x \in A$. [3].

Nous dirons que $\leq$ est l'ordre induit par l'opération $\rightarrow$, ou plus simplesment que $\leq$ est l'ordre induit.

[1] Une première redaction de cettes notes a été faite par L. Monteiro, dans cette Seminaire.

Exemple 1.1 *Remarquons que si* $(A, \leq)$ *est un ensemble totalement ordonné contenant un dernier élément* 1 *et se nous posons :*

$$a \to b = \begin{cases} 1 & si \;\; a \leq b, \\ b & si \;\; a > b. \end{cases}$$

alors A *est une algèbre de Hilbert par raport a l'opération binaire* $\to$ *que nous venons de définir sur* A *et en outre l'ordre induit coïncide avec l'ordre initial (A. Tarski).*

Lemme 1.3 *Dans une algèbre de Hilbert sont valables:*

H6) $1 \to a = a$.

H7) $a \to (a \to b) = a \to b$.

H8) $a \to b = 1$ *si et seulement si* $a \to (a \to b) = 1$.

H9) Si $b \leq c$ *alors* $a \to b \leq a \to c$.

H10) Si $a \leq b$ *alors* $b \to c \leq a \to c$.

H11) Si $a \to (b \to c) = b \to (a \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$.

H12) $a \to ((a \to b) \to b) = 1$.

Définition 1.3 *Nous dirons qu'un sous-ensemble* D *d'une algèbre de Hilbert* A, *est un système déductif, si:*

D1) $1 \in D$,

D2) Si $a \in D$ *et* $a \to b \in D$ *alors* $b \in D$, *(modus ponens).*

Si $D \neq A$ *nous dirons que* D *est un système déductif propre.*

Il est claire que $D = \{1\}$ est un système déductif. Toute système déductif D d'une algèbre de Hilbert A est une section supérieure de l'ensemble ordonné $(A, \leq)$, c'est-à-dire " Si $x \in D$ et $x \leq y$ alors $y \in D$".

Définition 1.4 *Si* H *est un sous-ensemble d'une algèbre de Hilbert* A, *nous donnerons le nom de système déductif engendré par* H *a l'intersection* $D(H)$ *de tous les systèmes déductifs, qui contiennent l'ensemble* H.

Si $H = \{a\}$, nous notérons $D(a)$ au lieu de $D(\{a\})$, et si D est un système déductif d'une algèbre de Hilbert A, et $a \in A$, alors nous notérons $D(D, a)$ au lieu de $D(D \cup \{a\})$.

Lemme 1.4 *1)* $D(a) = \{x \in A : a \to x = 1\}$.

2) Si $H = \{a, b\}$, *alors* $D(H) = \{x \in A : a \to (b \to x) = 1\}$.

3) $D(D, a) = \{x \in A : a \to x \in D\}$.

Définition 1.5 *Un système déductif D d'une algèbre de Hilbert A, sera dit:*

I) Irréductible, *si: I1) D est propre, et I2) Si D_1, D_2 sont des systèmes déductifs tels que $D = D_1 \cap D_2$, alors $D = D_1$ ou $D = D_2$.*

C) Complètement irréductible, *si: C1) D est propre, et C2) Etant donnée une famille $\{D_i\}_{i \in I}$ de systèmes déductifs telles que $D = \bigcap\limits_{i \in I} D_i$, alors il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $D = D_{i_0}$.*

M) Maximal, *si : M1) D est propre et M2) Si C est un système déductif tel que $D \subseteq C$ alors $C = D$ ou $C = A$.*

F) Un Fil, *si : F1) D est propre et F2) La famille de tous les systèmes déductifs propres qui contiennent D est une chaîne .*

Il est clair que tout système déductif complètement irréductible est irréductible, mais dans certaines algèbres de Hilbert il y a des systèmes déductifs irréductibles qui ne sont pas complètement irréductibles.

Exemple 1.2 *Soit* **R** *l'ensemble des nombres réels, et* $[0, 1] = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$. *Comme* $[0, 1]$ *est une chaîne avec dernier élément* 1, *si nous considèrons l'opération binaire* $\to$ *définie comme dans l'exemple 1.1, alors* $([0, 1], \to, 1)$ *est une algèbre de Hilbert. Soit a tel que $0 < a < 1$, alors l'ensemble $[a) = \{x \in [0, 1] : a \leq x\}$ est un système déductif irréductible qui n'est pas complètement irréductible, car si $0 < \varepsilon < a$ alors:*

$$[a) = \bigcap_{0<\varepsilon<a} [a - \varepsilon)$$

et $[a - \varepsilon) \neq [a)$, *pour tout* ε, $\quad 0 < \varepsilon < a$.

Observation 1.1 *Remarquons que l'ensemble* $(0, 1] = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x \leq 1\} \subset [0, 1]$ *est un système déductif maximal, et* $(0, 1]$ *est d'ailleurs le seul système déductif maximal de* $[0, 1]$. *Alors il est clair que dans l'algèbre de Hilbert* $((0, 1], \to, 1)$ *il n'existe aucun système déductif maximal.*

Lemme 1.5 *Soit D un système déductif propre d'une algèbre de Hilbert A, $h \in A - D$ (donc $h \neq 1$), et $\mathbf{C}$ la famille de tous les systèmes déductifs C de A qui vérifient:*

$$(1)\ D \subseteq C,\ \ (2)\ h \notin C,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{C} = \{C \in \mathcal{D} : D \subseteq C,\ h \notin C\}.$$

Alors $\mathbf{C}$ est inductive supérieurement.

Les systèmes déductifs maximaux de la famille $\mathbf{C}$ seront dites des *systèmes déductifs liés à h.*

Théorème 1.1 *Pour qu'un système déductif D soit complètement irréductible il faut et il suffit que D soit lié à un élément h, $(h \notin D)$.*

Théorème 1.2 *Tout système déductif propre est l'intersection de systèmes déductifs complètement irréductibles.*

Corollaire 1.1 *Tout système déductif propre est l'intersection de systèmes déductifs irréductibles.*

Théorème 1.3 *Pour qu'un système déductif propre C soit complètement irréductible, il faut et il suffit qu'il existe un élément $c \notin C$ tel que pour tout $a \notin C$ l'on ait $a \to c \in C$.*

Théorème 1.4 *Si C est un système déductif lié à l'élément $a \to c$, alors $a \in C$.*

Théorème 1.5 *Pour qu'un système déductif propre D soit irréductible, il faut et il suffit qu'étant donnés deux éléments $a, b \notin D$ il existe un élément $c \notin D$ tel que $a \to c \in D$, $b \to c \in D$.*

Théorème 1.6 *Pour qu'un système déductif M soit maximal, il faut et il suffit que: 1) M soit propre, et 2) Si $a, b \notin M$ alors $a \to b \in M$.* [2]

2 Algèbres de Hilbert linéaires

Définition 2.1 *Une algèbre de Hilbert A sera dite un fil ou une chaîne si l'ordre induit est total, c'est-à-dire si $(A, \leq)$ est une chaîne.*

Etant donnée une famille non vide $\{L_i : i \in I\}$ de chaînes (chacune desquelles a un dernier élément 1_i, $i \in I$), soit $L = \prod_{i \in I} L_i$, le *produit direct ou cartésien* des algèbres L_i, $i \in I$, alors L est une algèbre de Hilbert.

[2]Les démonstrations de tous les résultats précédants se trouvent dans les notes du cours de A. Monteiro [5], voir aussi [6].

Définition 2.2 *Nous donnerons le nom d'algèbre de Hilbert linéaire a toute sous-algèbre de L.*

Théorème 2.1 *Si A est une algèbre de Hilbert linéaire alors:*

$$(\mathcal{L}) \quad ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) = 1,$$

quelques soient $a, b, c \in A$.

Dém. On reconnâit facilement que $(\mathcal{L})$ est verifiée dans une chaîne, avec un dernier élément 1, d'où l'on déduit que $(\mathcal{L})$ est verifiée dans A. □

Nous nous proposons de demontrer le théorème suivant:

Théorème 2.2 *Pour qu'une algèbre de Hilbert soit linéaire il faut et il suffit que la condition $(\mathcal{L})$ soit verifiée.*

Dém. Il est claire que la condition est necessaire. Dans le §7 nous montrérons que la condition es suffisante. □

3 Caractérisation des algèbres linéaires au moyen d'une propriété des systèmes déductifs complètement irréductibles

Nous allons traduire la condition $(\mathcal{L})$ au moyen d'une propriété des systèmes déductifs complètement irréductibles.

Théorème 3.1 *Si A est une algèbre linéaire alors la famille de touts les systèmes déductifs qui contiennent un système déductif complètement irréductible C, ordonée par la rélation d'inclusion, est une chaîne.*

Dém. Soit C un système déductif complètement irréductible et supposons qu'il existent deux systèmes déductifs propres D_1, D_2 contenant C et que soient incomparables. D'aprés le théorème 1.1, le système déductif C est un système déductif *maximal* parmi ceux que ne contiennent pas un certain élément $c \in A - C$. Alors nous pouvons affirmer que $c \in D_1 \cap D_2$. Soit $a \in D_1 - D_2$, et $b \in D_2 - D_1$. De $b \leq a \to b$ et $b \in D_2$ on déduit que:

$$(1) \ \ a \to b \in D_2,$$

en outre nous pouvons affirmer que:

$$(2) \ \ a \to b \notin D_1,$$

car autrement de $a \in D_1$ et $a \to b \in D_1$, on déduirait $b \in D_1$ c'est qui est impossible par hypothèse.
D'une façon analogue on démontre que:

$$(3)\ \ b \to a \in D_1, \qquad \text{et} \qquad (4)\ \ b \to a \notin D_2.$$

En particulier nous pouvons affirmer que:

$$(5)\ \ a \to b \notin C, \qquad \text{et} \qquad (6)\ \ b \to a \notin C.$$

De (5) et (6), en tenant compte du théorème 1.3, on déduit respectivement:

$$(7)\ \ (a \to b) \to c \in C, \qquad (8)\ \ (b \to a) \to c \in C.$$

De (7) et ($\mathcal{L}$) il resulte:

$$(9)\ \ ((b \to a) \to c) \to c \in C.$$

De (8) et (9) on déduit que $c \in C$, et cette contradiction termine la démonstration. □

Nous allons maintenant démontrer que la propriété des systèmes complètement irréductibles indiquée dans le théorème 3.1 est caractéristique pour les algèbres linéaires, c'est-à-dire:

Théorème 3.2 *Si A est une algèbre de Hilbert telle que la famille des systèmes déductifs qui contiennent un système déductif complètement irréductible C forment une chaîne, alors A est une algèbre linéaire.*

Dém. Supposons que la condition ($\mathcal{L}$) n'est pas vérifiée, cela veut dire q'uil existent des éléments $a, b, c, \in A$ telles que:

$$(1)\quad ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \neq 1.$$

Soit D le système déductif engendré par les éléments $(a \to b) \to c$ et $(b \to a) \to c$, nous savons, voir lemme 1.4,2), que D est la famille de tous les $x \in A$ tels que:

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to x) = 1,$$

d'où l'on déduit que $c \notin D$, car autrement on aurait

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) = 1,$$

ce que est impossible par hypothèse.
Soit C un système déductif maximal, parmi ceux qui contiennent D sans contenir l'élément c, et $D_1 = D(C, a) = \{x \in A : a \to x \in C\}$, donc $b \notin D_1$, car si $b \in D_1$, alors $a \to b \in C$ et comme $(a \to b) \to c \in C$ on aurait $c \in C$ cet qui est impossible.
Si $D_2 = D(C, b) = \{x \in A : b \to x \in C\}$, alors d'une façon annalogue on démontre que $a \notin D_2$.
Dans ces conditions C serait contenu dans deux systèmes déductifs incomparables D_1 et D_2, et cette contradiction termine la démonstration. □

4 Caractérisation des algèbres linéaires par des propriétés des systèmes déductifs irréductibles

Les résultats indiqués dans le § 3 sont suffisants pour élaborer la théorie de représentation que nous allons indiquer dans le §7; mais pour l'étude des algèbres linéaires libres nous aurons besoin d'indications plus complètes sur les propiétés des systèmes déductif irréductibles, etant donné que dans une algèbre de Hilbert linéaire il peuvent existir des systémes déductifs irréductibles que ne sont pas complètement irréductibles.

Théorème 4.1 *Si D est un système déductif d'une algèbre de Hilbert ayant la propriété suivante:*

- [Propriété $\mathcal{P}$] :Si $a, b \notin D$ alors ou bien $a \to b \in D$ ou bien $b \to a \in D$.

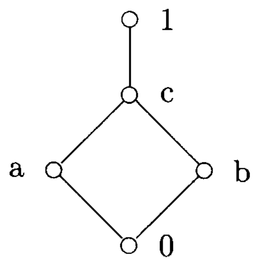
alors D est irréductible.

Dém. Soit D un système déductif ayant la propriété $\mathcal{P}$ et supposons que D soit réductible, c'est-à-dire qu'il existent deux systèmes déductifs D' et D'' tels que:

$$(1)\quad D = D' \cap D'' \qquad \text{et} \qquad (2)\quad D \neq D',\ \ D \neq D''.$$

Il est clair que D' et D'' étant deux ensembles incomparables, donc il existent des éléments $a \in D' - D''$, $b \in D'' - D'$, en particulier $a, b \notin D$. De la proprieté $\mathcal{P}$ on déduit que nous aurons soit $a \to b \in D$, soit $b \to a \in D$.
Si $a \to b \in D$, alors de $a \in D'$ et $a \to b \in D'$ on déduit $b \in D'$ ce qui est impossible par hyphothèse. On arrive aussi à une contradiction si l'on suppose que $b \to a \in D$. Nous pouvons donc affirmer que D est irréductible. $\square$

Dans une algèbre de Hilbert il peuvent exister des systèmes déductifs irréductibles qui n'ont pas la propriété $\mathcal{P}$.
En effet considèrons le réticulé distributif fini A dont le diagramme est indiqué dans la figure suivante.



Il est bien connu que tout réticulé distributif fini est une algèbre de Heyting, donc A est aussi une algèbre de Hilbert. Dans ce cas nous avons $a \to b = b$, $b \to a = a$. L'ensemble $D = \{1\}$ est un système déductif irréductible que n'a pas la propriété $\mathcal{P}$.

Nous allons démontrer que cette circonstance ne se présente pas dans les algèbres linéaires.

Théorème 4.2 *Dans une algèbre linéaire tout système déductif irréductible a la propriété $\mathcal{P}$.*

Dém. Soit A une algèbre linéaire, P un système irréductible de A, $a, b \notin P$ et supposons que $a \to b \notin P$ et $b \to a \notin P$. Soient:

$$(1) \quad D' = D(P, a \to b) = \{x \in A : (a \to b) \to x \in P\}$$

et

$$(2) \quad D'' = D(P, b \to a) = \{x \in A : (b \to a) \to x \in P\}$$

Comme P est irréductible nous pouvons affirmer que $P \subset D' \cap D''$, alors il existe un élément $c \in (D' \cap D'') - P$. De $c \in D'$ et de (1) on déduit que $(3)(a \to b) \to c \in P$. De $c \in D''$ et de (2) on déduit que (4) $(b \to a) \to c \in P$. De (3) et $(\mathcal{L})$ on déduit (5) $(((b \to a)) \to c) \to c \in P$. De (4) et (5) il résulte que $c \in P$. Cette contradiction termine la démonstration. $\square$

Corollaire 4.1 *Dans une algèbre linéaire pour qu'un système déductif P soit irréductible il faut et il suffit qu'il ait la propriété $\mathcal{P}$.*

Nous allons maintenant montrer que les algèbres linéaires sont les seules algèbres de Hilbert où les systèmes déductifs irréductibles peuvent être caractérisés par la propriété $\mathcal{P}$.

Théorème 4.3 *Si A est une algèbre de Hilbert ayant la propriété suivante:*

- [Propriété $\mathcal{E}$] : Pour qu'un système déductif P soit irréductible il faut el il suffit que P ait la propriété $\mathcal{P}$,

alors A est une algèbre linéaire.

Dém. Si A n'est pas une algèbre linéaire, il existe d'après le théorème 3.2, un système déductif complètement irreductible C qui est contenu dans deux systèmes déductifs incomparables D' et D''. Soient $a \in D' - D''$, $b \in D'' - D'$. Comme C est un système irréductible, des conditions $a, b \notin C$ on déduit, en tenant compte de la propriété $\mathcal{E}$ (que nous supposons vérifiée dans A) , que ou $a \to b \in C$ ou $b \to a \in C$. Si $a \to b \in C$, de $a \in D'$ et $a \to b \in D'$ on déduit $b \in D'$, ce qui est impossible. De même de $b \to a \in C$ on déduit aussi une contradiction. Cela montre bien que A est une algèbre linéaire. $\square$

Démontrons maintenant que:

Théorème 4.4 *Dans une algèbre linéaire tout système déductif irréductible est un fil.*

Dém. Supposons que dans une algèbre linéaire il existe un système déductif irreductible P que soit contennu dans deux systèmes déductifs incomparables D' et D''. Soient $a \in D' - D''$, $b \in D'' - D'$. Alors de $a, b \notin P$ on déduit, voir théorèmes 4.1 et 4.2, que l'on a: soit $a \rightarrow b \in P$ soit $b \rightarrow a \in P$. Dans le premier cas de a, $a \rightarrow b \in D'$, on déduit $b \in D'$ ce qui est impossible, de même dans le second cas, et la démonstration est terminée. □

Finalement nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Théorème 4.5 *Pour qu'une algèbre de Hilbert soit une algèbre linéaire il faut et il suffit que tout système déductif irréductible soit un fil.*

Dém. C'est une consequence immédiate des théorèmes 4.4, 3.1, et 3.2. □

5 Nouvelle caractérisation des algèbres linéaires

En utilisant les résultats précèdentes nous allons obtenir une nouvelle caractérisation des algèbres linéaires.

Remarquons qu'en général dans une algèbre de Hilbert, deux éléments a et b n'ont pas une borne supérieure, mais lorsque cette borne existe nous la representerons par $a \vee b$.

Théorème 5.1 *Pour qu'une algèbre de Hilbert A soit une algèbre linéaire il faut et suffit que $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$, pour tout couple $a, b \in A$.*

Dém. *La condition est necessaire.* Supposons que A soit une algèbre linéaire et que $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \neq 1$. Cela signifie qu'il existe un élément $x \neq 1$ tel que:

$$(1) \quad a \rightarrow b \leq x \ ; \ (2) \quad b \rightarrow a \leq x.$$

De $x \neq 1$ on déduit qu'il existe un système déductif complètement irréductible P, et alors irréductible, que ne contiennent pas l'élément x. De $b \leq a \rightarrow b$ et de (1) on déduit que (3) $b \notin P$, (3') $a \rightarrow b \notin P$. De même on voit que : (4) $a \notin P$, (4') $b \rightarrow a \notin P$. De (3), (4) et du théorème 4.2, on déduit que l'on a, soit $a \rightarrow b \notin P$, soit $b \rightarrow a \notin P$ ce que est en contradiction avec (3') et (4'). Cela montre bien que: $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$. *La condition est suffisante.* Supposons que :(1) $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$, et que A ne soit pas une algèbre linéaire. D'après le théorème 3.2, il existe un système complètement irréductible C que n'est pas un fil, c'est-à-dire C a les propriétés suivantes:

(2) C est un système déductif maximal parmi ceux que ne contiennent pas un élément c.

(3) Il existent deux systèmes déductifs incomparables D' et D'', qui contiennent C.

Des conditions (2) et (3) on déduit:

$$(4) \quad c \in D' \qquad \text{et} \qquad c \in D''.$$

De la condition (3) on déduit qu'il existent des éléments a et b tels que:

$$(5) \quad a \in D' - D'', \qquad (6) \quad b \in D'' - D'.$$

Montrons que:

$$(7) \quad a \to b, \ \ b \to a \notin C.$$

En effet, si $a \to b \in C$, comme $C \subseteq D'$ alors $a \to b \in D'$ et comme $a \in D'$ on déduit par *modus ponens* que $b \in D'$, c'est qui est en contradiction avec (6). Analoguement on montre que $b \to a \notin C$. De (2) et (7) on déduit, d'après le théorème 1.3 :

$$(8) \quad (a \to b) \to c \in C, \qquad (9) \quad (b \to a) \to c \in C.$$

Considérons l'élément:

$$x = ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) = ((b \to a) \to c) \to (((a \to b) \to c) \to c).$$

D'après H12), nous avons:

$$b \to a \leq ((b \to a) \to c) \to c \leq x \quad ; \quad a \to b \leq ((a \to b) \to c) \to c \leq x.$$

d'où, en tenant compte de (1): (10) $x = 1 \in C$. De (9) et (10) on déduit:

$$(11) \quad ((a \to b) \to c) \to c \in C$$

et alors de (8) et (11) on déduit $c \in C$, et cette contradiction termine la démonstration. □

6 Le radical linéaire

Nous donnerons le nom de *radical* d'une algèbre de Hilbert A, à l'intersection $\mathcal{R}(A)$ de tous les systèmes déductifs maximaux de A. Dans le cas où A n'a aucun système déductif maximal alors $\mathcal{R}(A) = A$.
En général une algèbre de Hilbert A n'est pas linéaire. Nous nous proposons de déterminer les images homomorphes de A que sont linéaires. Pour cela nous avons besoin d'un certain nombre de notions.

Définition 6.1 *Le radical linéaire d'une algèbre de Hilbert A est l'intersection $\mathcal{RL}(A)$ de tous le fils de A.*

Comme les systèmes déductifs maximaux sont des fils, on peut afirmer que:

Lemme 6.1 *Le radical linéaire de A est contenu dans le radical de A, c'est-à-dire* $\mathcal{RL}(A) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Démontrons maintenant que:

Théorème 6.1 *Le radical linéaire de A est identique au système déductif engendré par tous les éléments de la forme:*

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c),$$

où $a, b, c \in A$.

Dém. (I) $((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \in \mathcal{RL}(A)$, quelques soient $a, b, c \in A$. Supposons qu'il existent des éléments $a, b, c \in A$, tels que:

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \notin \mathcal{RL}(A),$$

alors il existe un fil F tel que:

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \notin F$$

Des rélations (voir H12):

$$a \leq b \to a \leq ((b \to a) \to c) \to c \leq ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c),$$

on déduit que $b \to a \notin F$.
Remarquons maintenat que:

$$((b \to a) \to c) \to (((a \to b) \to c) \to c) = ((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \notin F,$$

et alors des rélations:

$$b \leq a \to b \leq ((a \to b) \to c) \to c \leq ((b \to a) \to c) \to (((a \to b) \to c) \to c),$$

on déduit que $a \to b \notin F$.
Soit $D' = D(F, a) = \{x \in A : a \to x \in F\}$. Comme $a \to b \notin F$, on voit que $b \notin D'$. D'une façon analogue on voit que $a \notin D'' = D(F, b)$. Dans ces conditions F serait contenu dans deux systèmes déductifs incomparables D' et D'', ce qui est impossible car F est un fil et cette contradiction démontre (I).
(II) Le systéme déductif D^* engendré par les éléments de la forme

$$((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c)$$

coïncide avec $\mathcal{RL}(A)$.
D'après (I) nous pouvons affirmer que $D^* \subseteq \mathcal{RL}(A)$. Supposons que $D^* \neq \mathcal{RL}(A)$, et soit $c \in \mathcal{RL}(A) - D^*$. Parmi les systèmes déductifs que contiennent D^*, sans contenir c, il existe un C que est maximal, donc C est un système déductif complètement irréductible liè à c. Comme C n'est pas un fil il existent deux systèmes déductifs incomparables D' et D'' que contiennent C et il est clair que $c \in D' \cap D''$. Soient $a \in D' - D''$, $b \in D'' - D'$, alors $a \to b \in D'' - D'$ et $b \to a \in D' - D''$, d'où l'on déduit que $a \to b$, $b \to a \notin C$ et par conséquant $(a \to b) \to c$, $(b \to a) \to c \in C$.
Comme $((a \to b) \to c) \to (((b \to a) \to c) \to c) \in C$ nous pouvons affirmer que $((b \to a) \to c) \to c \in C$ d'où l'on déduit, en apliquant de nouveau le *modus ponens*, que $c \in C$. Cette contradiction montre que $D^* = \mathcal{L}(A)$. $\square$

7 Réprésentation des algèbres linéaires

Soient A et A' des algèbres de Hilbert et h un homomorphisme de A sur A', c'est-à-dire une fonction de A sur A' qui vérifie:

$$\text{H)} \quad h(x \to y) = h(x) \to h(y).$$

Nous dirons alors que A' est une image homomorphe de A. Observons que $h(1) = h(x \to x) = h(x) \to h(x) = 1'$.
Soit $D = h^{-1}(1') = \{x \in A : h(x) = 1'\}$. D s'appelle *le noyau de l'homomorphisme h.* Il est facile a voir que D est un système déductif de A.
Il est important de savoir déterminer toutes les images homomorphes d'une algèbre de Hilbert.
Soit D un système déductif d'une algèbre de Hilbert A. Nous écrirons $a \equiv b$, (mod. D) ou plus simplesment (si D est fixée) $a \equiv b$, pour indiquer que $a \to b, b \to a \in D$, alors il est bien connu [5], [1], [2] que "$\equiv$" est une congruence définie sur A. Soit $|a|$ la classe d'équivalence qui contiente l'élément $a \in A$, c'est-à-dire $|a| = \{x \in A : x \equiv a\}$, et soit $A' = A/\equiv$ l'ensemble quotient de A par la relation "$\equiv$". Algèbrisons A' en définissant l'opération $\to$ sur A' par le formule: $|a| \to |b| = |a \to b|$. Soit $1^{'} = |1|$. Dans ces conditions la transformation $h(a) = |a|$ vérifie la condition H) d'où l'on déduit de suite que $(A', \to, 1^{'})$ est une algèbre de Hilbert, et que A' est une image homomorphe de A. Nous écrirons A/D pour représenter l'algèbre de Hilbert obtenue de cette manière. On vérifie facilement, les images homomorphes A' d'une algèbre de Hilbert A peuvent être obtenues de la manière que nous venons d'indiquer. [5]

Lemme 7.1 *Si A, A' sont des algèbres de Hilbert, $h : A \to A'$ un homomorphisme de A sur A', $P = \{x \in A : h(x) = 1\}$ le noyau de h, et D un système déductif de A, alors:*

1) *Si $P \subseteq D$, $h(D)$ est un système déductif de A'.*

2) *Si D' est un système déductif de A', alors $D = h^{-1}(D')$ est un système déductif de A qui contient P.*

3) *Si D est un système déductif de A qui contient P, alors $h^{-1}(h(D)) = D$.*

4) *Soit $\mathbf{D}(A, P)$ l'ensemble de tous les systèmes déductifs de A qui contienent P, et $\mathbf{D}(A')$ l'ensemble de tous les systèmes déductifs de A'. Alors la transformation h est un isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(\mathbf{D}(A, P), \subseteq)$ et $(\mathbf{D}(A'), \subseteq)$.*

Dém.

1) Comme $1 \in D$ alors $1' = h(1) \in h(D)$. Supposons que a', $a' \to b' \in h(D)$, alors $a' = h(a)$ où (i) $a \in D$ et $a' \to b' = h(d)$ où $d \in d$. Comme h est suryective $b' = h(b)$ où $b \in A$. Donc $h(a \to b) = h(a) \to h(b) = h(d) \in h(D)$. Donc $a \to b \in P$ et comme $P \subseteq D$ on a (ii) $a \to b \in D$. De (i) et (ii) on déduit que $b \in D$, donc $b' = h(b) \in h(D)$.

2) Comme $h(1) = 1' \in D'$, alors $1 \in h^{-1}(D')$. Supposons que a, $a \to b \in h^{-1}(D')$, alors $h(a) \in D'$ et $h(a) \to h(b) = h(a \to b) \in D'$, donc comme D' est un système déductif $h(b) \in D'$ c'est-à-dire $b \in h^{-1}(D')$. Si $p \in P$, c'est-à-dire $h(p) = 1' \in D'$ alors $p \in h^{-1}(D')$.

3) D'après l'hypothèse et 1) $h(D)$ est un système déductif de A', donc d'aprés 2) $h^{-1}(h(D))$ est un système déductif de A qui contient P. En outre $D \subseteq h^{-1}(h(D))$. Montrons maintenant que $h^{-1}(h(D)) \subseteq D$. En effet soit $x \in h^{-1}(h(D))$, c'est-à-dire $h(x) = x' \in h(D)$. Alors il existe (i) $d \in D$ tel que $h(d) = x'$, donc $h(d \to x) = h(d) \to h(x) = x' \to x' = 1'$, c'est-à-dire $d \to x \in P$ et comme $P \subseteq D$ on a (ii) $d \to x \in D$. De (i) et (ii) on déduit $x \in D$.

4) D'après 1) $h : (\mathbf{D}(A,P), \subseteq) \to (\mathbf{D}(A'), \subseteq)$. Soit $D' \in \mathbf{D}(A')$, d'après 2) $D = h^{-1}(D') \in \mathbf{D}(A,P)$, donc d'après 1) $h(D) = h(h^{-1}(D')) \in \mathbf{D}(A')$, et comme h est une fonction de A sur A' on a $h(h^{-1}(D')) = D'$, alors on a que h est une suryection de $(\mathbf{D}(A,P), \subseteq)$ dans $(\mathbf{D}(A'), \subseteq)$. Montrons que si D_1, D_2 sont des systèmes déductifs tels que $P \subseteq D_1, D_2$ alors $D_1 \subseteq D_2$ si et seulement si $h(D_1) \subseteq h(D_2)$. En effet, si $d' \in h(D_1)$ alors $d' = h(d)$ où $d \in D_1$, donc $d \in D_2$ et alors $d' = h(d) \in h(D_2)$. Reciproquement soit $d_1 \in D_1$ alors $d' = h(d_1) \in h(D_1) \subseteq h(D_2)$, donc $d' \in h(D_2)$. Alors $d' = h(d_2)$ où $d_2 \in D_2$, donc $h(d_2 \to d_1) = 1'$, c'est-à-dire $d_2 \to d_1 \in P$ et comme $P \subseteq D_2$, alors $d_2 \to d_1 \in D_2$ et comme $d_2 \in D_2$ on a finalement $d_1 \in D_2$.

□

D'après le lemme 7.1 et le théorème 4.4 nous avons:

Lemme 7.2 *Si P est un système déductif irréductible d'une algèbre de Hilbert linéaire A, alors $Q = A/P$ est une chaîne.*

Théorème 7.1 *Toute algèbre de Hilbert linéaire A, avec plus d'un élément est isomorphe a une sous-algèbre d'un produit cartésien d'algèbres de Hilbert que sont chaînes.*

Dém. Soit $\mathcal{I}$ la famille des systèmes déductifs irréductibles de A. Pour chaque $P \in \mathcal{I}$ soit $Q_P = A/P$. Nous avons vue que A/P est une chaîne. Soit

$$A' = \prod_{P \in \mathcal{I}} A/P.$$

Pour chaque $P \in \mathcal{I}$, soit h_P l'homomorphisme naturel de A sur A/P. Chaque élément $a' \in A'$ peut être representé par:

$$a' = (a_P)_{P \in \mathcal{I}} \text{ où } a_P \in A/P.$$

Étant donné $f \in A$ considérons la fonction $F : \mathcal{I} \to A/P$ définie par l'égalité:

$$F(P) = h_P(f) \in A/P.$$

Il est claire que $F \in A'$. Soit S la transformation de A dans A' définie par $S(f) = F$. Il est facile a voir que S est un homomorphisme de A dans A'. Montrons que S est un isomorphisme. Soient $f, g \in A$ tels que $f \neq g$, alors nous aurons soit (i) $f \not\leq g$, soit (ii) $g \not\leq f$. Si (i) est vérifiée, alors il existe un système déductif irréductible P tel que $f \in P$ et $g \notin P$, alors $F(P) = 1$ et $G(P) \neq 1$, cela montre que $F \neq G$, c'est-à-dire $\mathcal{S}(f) \neq \mathcal{S}(g)$. Si (ii) est vérifiée la démonstration est analogue. □
Cet dernier résultat montre que la condition du théorème 2.2 est suffisante.

Nous avons ajouté des references bibliographique, posteriéures a 1961.

Bibliographie

[1] Diego, A., *Sobre álgebras de Hilbert*, Notas de Lógica Matemática 12, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1965.

[2] Diego, A., *Sur les algèbres de Hilbert*, Collection de Logique Mathématique, Série A, 23, Gauthiers-Villars, Paris (1966). Traduction du travail précédent.

[3] Henkin L., *An algebraic characteriztion of quantifiers*, Fund. Math., 37 (1950), 63-74.

[4] Hilbert D., *Die Logischen Grundlagen der Mathematik*, Math. Ann., 88 (1923), 151-165.

[5] Monteiro A., *Cours sur les algèbres de Hilbert et de Tarski*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[6] Monteiro A., *Sur les algèbres de Heyting Symétriques*, Portugaliae Mathematica, 39 (1980), 1-237.

[7] Tarski A., *Fundamentale Begrif der methodologie der deduktiven Wissenschaftent*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 37 (1930), 361-400.

[8] Tarski A., *Logic, Semantics and Methamathematics* (papers from 1923 to 1938) Translated by J.W. Woodger, Oxford, 1956.