NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

5

ROMAN SIKORSKI

Teorías Matemáticas Formalizadas

1968
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

TEORIAS MATEMATICAS FORMALIZADAS

por

Roman Sikorski

Universidad Nacional del Sur
Instituto de Matemática
Bahía Blanca - 1960

Apuntes de las lecciones sobre "Teorías Matemáticas Formalizadas", dictados por el profesor Roman Sikorski en la Universidad Nacional del Sur durante el período mayo-julio de 1958, redactados por Antonio Diego.

TEORIAS MATEMATICAS FORMALIZADAS

1. INTRODUCCION

Una teoría matemática formalizada es una teoría matemática axiomática con un lenguaje estrictamente descripto y significados lógicos definidos estrictamente.

Destacamos tres aspectos en la definición de una teoría matemática formalizada:

LENGUAJE FORMALIZADO

LOGICA

AXIOMAS

Vamos ahora a detenernos en la explicación informal de estos aspectos:

I - LENGUAJE FORMALIZADO:

Es cosa sabida que el lenguaje corriente es, además de ambiguo, contradictorio. Hay, en efecto, muchos ejemplos de contradicciones encubiertas en el lenguaje usual; se les suele llamar "paradojas lógicas". Veamos una de ellas, conocida como la "paradoja del barbero".

En un pueblo hay un barbero que afirma:

"Yo afeito a todas las personas de este pueblo que no se afeitan ellas mismas".

La dificultad aparece cuando uno se pregunta: ¿Se afeita el barbero ?

Más precisamente, la afirmación del barbero puede expresarse así:

"el barbero afeita a x equivale a x no afeita a x"

Si x es en particular el barbero, tendremos:

"el barbero afeita al barbero equivale a el barbero no afeita al barbero".

Lo que muestra que la afirmación del barbero es, en realidad, contradictoria.

La tendencia a excluir el uso del lenguaje corriente es característica en las matemáticas. Así, en un libro de aritmética elemental encontramos gran parte de su texto ocupado por fórmulas sustituyendo a enunciados cuya formulación en términos del lenguaje corriente sería igualmente posible. En una teoría matemática formalizada se excluye completamente el lenguaje corriente substituyéndolo con un lenguaje construído expresamente para el tratamiento de la teoría en cuestión: <u>un lenguaje formalizado</u> .

En un lenguaje formalizado distinguiremos:

1) <u>Alfabeto</u>

2) <u>Términos</u> (nombres)

3) <u>Fórmulas</u> (sentencias y funciones proposicionales).

1) <u>Alfabeto</u>

Es un conjunto fijo de signos. Estos signos son usados con diferentes finalidades de denotación, lo cual nos permite clasificarlos en las siguientes categorías:

a) <u>Variables individuales</u>: Signos para designar individuos (elementos) no especificados.

b) <u>Funtores</u>: Signos para designar funciones (de cualquier número de argumentos) de individuos a individuos.

c) <u>Predicados</u>: Signos para designar relaciones (binarias, ternarias, etc. ...) entre individuos.

d) Conectivos lógicos: Signos que corresponden a los conectivos lógicos del lenguaje corriente, por ejemplo

"....$\cup$...." corresponde a "....ó...."

"....$\cap$...." " " "....y...."

"....$\rightarrow$...." " " "si...., entonces...."

" $-$...." " " "no.... "

e) Cuantificadores: Signos que corresponden a las siguientes expresiones del lenguaje corriente:

"Para todo x, ..."

"Existe un x tal que, ..."

Usaremos, respectivamente, para las expresiones anteriores los signos: "$\bigcap_x$" , "$\bigcup_x$" , donde la "x" subscripta es una variable individual. Así pues, a cada variable individual "x" corresponde un cuantificador "$\bigcap_x$", llamado cuantificador universal, y un cuantificador "$\bigcup_x$", llamado cuantificador existencial.

f) Signos auxiliares: "(", ")", ",". Paréntesis inicial y final y coma.

Observación: Las constantes individuales (designaciones de objetos distinguidos) pueden ser consideradas como funtores de cero argumentos (designaciones de funciones constantes).

Como un ejemplo clasifiquemos los siguientes signos en un texto de aritmética elemental:

a) "x", "y", "z", "a", "b", "c",... son variables individuales.

b) "0", "1", "2", "3",... son constantes individuales.

c) "+" y "." son funtores.

d) "=", "$<$", "$\leqslant$" son predicados.

Puede ocurrir, en particular, que alguna de las clases de signos enumeradas antes sea vacía (por ejemplo que no haya funtores o no haya predicados).

El alfabeto es el material para la construcción del lenguaje formalizado.

2) <u>Términos</u>

Sucesiones de signos del alfabeto que designarán individuos especificados o no, serán llamadas <u>nombres</u> o <u>términos</u>.

Las variables individuales y las constantes individuales son, en particular, términos.

Sea "φ" un funtór, por ejemplo de dos argumentos. Como "φ" corresponde a la designación de una función de individuos a individuos, si "x", "y" son dos términos, esto es designación de individuos, "$\varphi(x,y)$" designa un individuo (valor de la función). Así pues, sucesiones de signos del tipo "$\varphi(x,y)$", serán, en particular, términos.

Por ejemplo en la aritmética "x + y", "x . y" son términos. Por costumbre se adopta en los textos la notación "x + y" en lugar de "+(x,y)" y "x . y" en lugar de ".(x,y)".

3) <u>Fórmulas</u>

Ciertas sucesiones de signos se hacen corresponder a enunciados o afirmaciones del lenguaje corriente. Así por ejemplo si "ρ" es un predicado designando una cierta relación binaria entre individuos y si x,y son términos, la sucesión de signos "$\rho(x,y)$" corresponde a la expresión del lenguaje corriente "la relación ρ vale entre los individuos x e y".

Si "τ" es un predicado, denotando por ejemplo una relación ternaria, cabe considerar la expresión:

"Si τ vale entre x, y, z entonces ρ vale entre x e y", cuya traducción en términos de nuestro lenguaje formalizado sería

$$\tau(x,y,z) \rightarrow \rho(x,y).$$

Sucesiones de signos de este tipo se dicen <u>fórmulas</u>.

Con la introducción de conectivos lógicos y nuevos predicados cabe considerar fórmulas más complicadas, por ejemplo:

$$((\tau(x,y,z) \rightarrow \rho(x,y)) \cup \lambda(x,z)) \cup \mu(y,x)$$

Anteponiendo a una fórmula un cuantificador obtendremos también una fórmula, por ejemplo:

$$\bigcap_y (\rho(x,y,z) \rightarrow \sigma(x,y))$$

A título de ejemplo consideremos las siguientes fórmulas en la aritmética:

$$(x = y)$$

$$(x < y)$$

$$\bigcap_x ((x = y) \rightarrow (x \leq y))$$

$$\bigcap_x \bigcup_y (((x+2 = y) \cap (y < 5)) \rightarrow (y = 2)))$$

Por un <u>lenguaje formalizado</u>, entenderemos un sistema $\mathcal{L} = \langle S,T,F \rangle$ donde S es el conjunto de signos (alfabeto), T el conjunto de términos y F el conjunto de fórmulas.

II - LOGICA

Desde un punto de vista intuitivo, decimos que una sentencia α es una <u>consecuencia</u> de un conjunto A de sentencias cuando, de la hipótesis de que todas las sentencias de A son verdaderas, debemos inferir necesariamente que α es verdadera.

Esta noción de consecuencia deberá ser establecida estrictamente en un lenguaje formalizado de modo de respetar su sentido intuitivo. Aclararemos este punto más adelante.

Si A es un conjunto de fórmulas, designaremos por $C_n(A)$ al conjunto de todas las fórmulas α que son consecuencia del conjunto A de fórmulas.

C_n es entonces un operador del conjunto 2^F, de todos los subconjuntos $A \subset F$, en él mismo.

Este operador C_n será llamado operador de consecuencia. Llamaremos un sistema deductivo al par $\langle \pounds, C_n \rangle$.

III - AXIOMAS

Fijado un conjunto A de fórmulas de $\pounds$ diremos que la terna $\mathcal{T}_A = \langle \pounds, C_n, A \rangle$ es una teoría matemática cuyos axiomas son las fórmulas de A.

Toda fórmula perteneciente al conjunto $C_n(A)$ se dirá un teorema de la teoría $\mathcal{T}_A$, o que es una fórmula derivable en la teoría.

2. DESCRIPCION EXACTA DEL LENGUAJE

1. Vamos a precisar aquí las nociones presentadas en la introducción. Digamos previamente, que sólo trataremos el caso de las así llamadas "teorías elementales"(o de "primer orden"), es decir teorías en cuyo alfabeto se presentan los signos enumerados antes. Se estudian también otras teorías "no elementales"(o de "orden superior"), en cuyo alfabeto hay otros signos por ejemplo cuantificadores para predicados y funtores.

Sea dado un conjunto S de signos que suponemos descompuesto en partes disjuntas de las siguientes categorías:

a) Variables individuales

b) Funtores (incluso constantes individuales)

c) Predicados

d) Conectivos lógicos

e) Cuantificadores

f) Signos auxiliares

Supondremos que a) el conjunto de las variables individuales es infinito, b) el conjunto de los funtores puede ser vacío y c) el conjunto de los predicados no es vacío.

Con cada funtor φ está asociado un entero m $\geqslant 0$ tal que:

Si m = 0, φ es una constante individual.

Si $m > 0$ y $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son variables individuales $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es lo que llamaremos un término elemental.

Según sea el entero $m \geqslant 0$, cabe distinguir funtores de 0,1,2,..., etc., argumentos.

DEFINICION: El conjunto T de los términos es el más pequeño conjunto de sucesiones finitas de signos, tal que

i) todas las variables individuales y funtores de 0-argumentos (constantes) son términos.

ii) si $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in T$ y φ es un funtor de n-argumentos entonces

$$\varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in T.$$

Con todo predicado ρ está asociado un entero $m > 0$ (m se dice el número de argumentos del predicado). Si $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son variables individuales $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es lo que llamaremos una fórmula primitiva.

DEFINICION: El conjunto F de fórmulas es el más pequeño conjunto de sucesiones finitas de signos, tal que

i) Si $\rho(x_1,\ldots,x_m)$ es una fórmula primitiva y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ son términos, $\rho(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in F$.

ii) Si $\alpha, \beta \in F$ y "$\circ$" es un conectivo lógico binario $(\alpha \circ \beta) \in F$.

iii) Si $\alpha \in F$, $(-\alpha) \in F$.

iv) Si $\alpha \in F$ y x es una variable individual $(\bigcap_x \alpha)$, $(\bigcup_x \alpha) \in F$.

Consideremos el lenguaje formalizado $\pounds = \langle S,T,F \rangle$. Sea α una fórmula de $\pounds$. Supongamos que α contiene entre sus signos un cuantificador, por ejemplo $\bigcap_x$, en un lugar bien determinado de α, a esa **aparición** del signo $\bigcap_x$ se llama una <u>ocurrencia</u> del cuantificador $\bigcap_x$ en la fórmula α.

Se sigue de la definición de fórmula que esta ocurrencia del cuantificador $\bigcap_x$ está precedida inmediatamente por un paréntesis inicial "(", y seguida inmediatamente por una fórmula β (subfórmula de α) y, siguiendo todos los signos de β, un paréntesis final ")". Esto es, que el aspecto de α es el siguiente:

$$(\text{--------}\ (\bigcap_x \beta)\ \text{--------})$$

En particular podría no haber ningún signo precediendo o siguiendo a $(\bigcap_x \beta)$ en α.

La fórmula β se dice el <u>alcance</u> de la ocurrencia en cuestión del cuantificador $\bigcap_x$.

Consideremos una determinada ocurrencia de la variable individual x en la fórmula α y una determinada ocurrencia del cuantificador $\bigcap_x$. Si esta ocurrencia de x está en la fórmula β , alcance de la referida ocurrencia de $\bigcap_x$, pero no está en el alcance de otra ocurrencia cualquiera en β

(diferente) de los cuantificadores $\bigcap_x$ ó $\bigcup_x$, diremos que dicha ocurrencia de x está <u>ligada</u> por la ocurrencia de $\bigcap_x$ en cuestión, y análogamente para el cuantificador $\bigcup_x$.

Si una ocurrencia de x no está ligada por ninguna ocurrencia de los cuantificadores $\bigcap_x$, $\bigcup_x$ se dice que <u>la ocurrencia es libre</u>.

Ilustremos estas nociones con la fórmula siguiente

$$((\overset{(1)}{\bigcap_x}(\bigcup_y((\overset{(2)}{\bigcap_x}(\overset{(3)}{x}=x))\cup(\overset{(4)}{x}=y))))\cup(\overset{(5)}{x}=z))$$

Los números (1),(2),... se han colocado sobre ciertos signos de la fórmula con el objeto de referirnos más claramente a las ocurrencias de estos signos.

El alcance de la ocurrencia (1) del cuantificador $\bigcap_x$ es la fórmula

$$(\bigcup_y((\bigcap_x(x=x))\cup(x=y)))$$

El alcance de la ocurrencia (2) del cuantificador $\bigcap_x$ es la fórmula:

$$(x=x)$$

La ocurrencia (3) de la variable individual x está ligada por la ocurrencia (2) del cuantificador $\bigcap_x$.

La ocurrencia (4) de la variable x está ligada por la ocurrencia (1) del cuantificador $\bigcap_x$.

La ocurrencia (3) de la variable x <u>no</u> está ligada por la ocurrencia (1) del cuantificador $\bigcap_x$.

La ocurrencia (5) de la variable x no está ligada por ningún cuantificador, $\bigcap_x$ ó $\bigcup_x$, es, pues, una ocurrencia libre de la variable x.

2. El sistema deductivo $\langle \pounds, C_n \rangle$

Veamos ahora cómo se introduce en $\pounds = \langle S, T, F \rangle$ el operador C_n de consecuencia, para constituir el sistema deductivo $\langle \pounds, C_n \rangle$.

La forma usual para caracterizar C_n es la siguiente:

a) Se da un conjunto de fórmulas especiales a las que llamaremos axiomas lógicos.

b) Se indican ciertas reglas de inferencia, esto es, esquemas fijos de la forma:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

que significan que β se infiere directamente a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$. Indiquémoslo explícitamente:

a) Axiomas Lógicos:

Adoptaremos como axiomas lógicos las fórmulas en $\pounds$ construídas de la forma siguiente:

Sea γ una fórmula del cálculo proposicional, γ es una sucesión finita de signos donde intervienen variables proposicionales $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$, y conectivos lógicos $\rightarrow, \cap, \cup, -$. Substituyendo en γ cada variable proposicional $a_1, a_2, \ldots, a_n$ por fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ de $\pounds$, se obtiene una sucesión de signos de S, γ', que es una fórmula de F. Por ejemplo

$$\gamma = ((a_1 \rightarrow a_2) \cup a_3)$$

$$\gamma' = ((\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \cup \alpha_3)$$

Adoptaremos como axiomas lógicos a todas las substituciones γ' efectuadas sobre tautologías γ del cálculo proposicional clásico.

Observación: La introducción como axiomas de las tautologías del cálculo proposicional intuicionista, daría lugar a otro operador de consecuencia C_n'.

De acuerdo a la definición, las siguientes, entre otras fórmulas, son axiomas lógicos:

$$(\beta \rightarrow \beta)$$
$$(((\alpha \rightarrow \beta) \cap \alpha) \rightarrow \beta)$$
$$((\alpha \cap \beta) \rightarrow \beta)$$
$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$$

b) <u>Reglas de inferencia</u>

i) <u>La regla "Modus Ponens"</u>

$$\frac{(\alpha \rightarrow \beta), \alpha}{\beta}$$

ii) <u>La regla de substitución para variables individuales:</u>

Sea α una fórmula y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables individuales (pudiendo aparecer o nó en α) y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ términos de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$.

Consideremos en α todas las ocurrencias libres de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (¡sólo ocurrencias libres de estas variables!).

Reemplazando <u>simultáneamente</u> las variables $x_1, \ldots, x_n$ por los términos $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, respectivamente, en la fórmula α, obtenemos una fórmula α'. Es claro que α y α' presentan los mismos cuantificadores. Sólo en el caso en que cada ocurrencia de cada cuantificador en α' ligue exactamente las mismas ocurrencias de variables individuales que en α, diremos que α' es una substitución de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, respectivamente en α.

La regla de substitución para variables individuales se expresa en la forma:

$$\frac{\alpha}{\alpha'}$$

Por ejemplo:

$$\alpha = \bigcap_z ((\bigcap_x (x = y)) \cup (y = z))$$

La única variable que puede substituirse en α es la variable libre y.

No se obtiene una substitución "lícita" si reemplazamos "y" por el término "z+t" pues en

$$\alpha' = \bigcap_z ((\bigcap_x (x = z+t)) \cup (z+t = z))$$

la ocurrencia inicial de $\bigcap_z$ liga ocurrencias de z que no se presentan en α.

iii) <u>La regla de introducción de cuantificadores existenciales</u>:

$$\frac{(\alpha \rightarrow \beta)}{((\bigcup_x \alpha) \rightarrow \beta)}$$

donde β no contiene ocurrencias libres de la variable individual x.

iv) <u>La regla de introducción de cuantificadores universales</u>:

$$\frac{(\alpha \rightarrow \beta)}{(\alpha \rightarrow (\bigcap_x \beta))}$$

donde α no contiene ocurrencias libres de la variable individual x.

v) <u>La regla de eliminación de cuantificadores existenciales</u>:

$$\frac{((\bigcup_x \alpha) \rightarrow \beta)}{(\alpha \rightarrow \beta)}$$

donde β no contiene ocurrencias libres de la variable individual x.

vi) La regla de eliminación de cuantificadores universales.

$$\frac{(\alpha \rightarrow (\bigcap_x \beta))}{\alpha \rightarrow \beta}$$

donde α no contiene ocurrencias libres de la variable individual x.

Sea B un conjunto de fórmulas, $B \subset F$.

El conjunto B se dice cerrado respecto de la regla de inferencia:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

si de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in B$, se tiene que $\beta \in B$.

Definamos ahora C_n:

Para cualquier conjunto A de fórmulas $C_n(A)$ es el conjunto más pequeño de fórmulas tal que:

c_1) $A \subset C_n(A)$

c_2) $C_n(A)$ contiene todos los axiomas lógicos.

c_3) $C_n(A)$ es cerrado con respecto a las reglas de inferencia i),ii),iii),iv),v) y vi).

Tal conjunto existe porque es la intersección de la familia de todos los conjuntos de fórmulas que verifican c_1) c_2) c_3), familia que no es vacía desde que contiene a F, el conjunto de todas las fórmulas.

Si $\alpha \in C_n(A)$ diremos que α es una consecuencia del conjunto de hipótesis (o premisas) A.

El conjunto A puede, en particular, ser vacío. $C_n(\emptyset)$ es el conjunto de fórmulas "absolutamente ciertas", esto es, fórmulas que deben admitirse como verdaderas con prescindencia de toda hipótesis, o, como se dice, verdaderas por su **forma lógica.**

$C_n(\emptyset)$ juega en $\mathcal{L}$ el papel de las tautologías en el cálculo proposicional.

Las fórmulas de $C_n(\emptyset)$ se llaman también predicados tautológicos.

El lenguaje $\mathcal{L}$ más la lógica introducida en $\mathcal{L}$ mediante C_n, constituye el sistema deductivo $\langle \mathcal{L}, C_n \rangle$.

El conjunto $C_n(A)$ puede también ser caracterizado de la manera indicada en el teorema siguiente:

TEOREMA 1: Una fórmula α es una consecuencia de A (es decir $\alpha \in C_n(A)$), si y solo si existe una sucesión finita de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tales que

1) $\alpha_n = \alpha$

2) Para cualquier $j (j = 1,2,\dots,n)$ ó bien $\alpha_j \in A$, o bien α_j es un axioma lógico, o bien α_j se obtiene de algunas fórmulas de la sucesión $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$, con $i_1, i_2, \dots, i_k < j$, mediante alguna de las reglas de inferencia i), ii),...,vi) asumidas.

(Una sucesión $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ en las condiciones 1), 2) se dice una prueba formal de α relativa a las hipótesis A).

Demostración: Sea K(A) el conjunto de todas las fórmulas α para las cuales existe una prueba formal relativa a A.

Veamos que $K(A) = C_n(A)$.

a) Si $\alpha \in K(A)$, $\alpha \in C_n(A)$, esto es, $K(A) \subset C_n(A)$.

La prueba es por inducción sobre el número de fórmulas en la prueba formal de α.

Si $n = 1$, $\alpha_1 = \alpha$ de acuerdo a la condición 1) o bien $\alpha \in A$ ó α es un axioma lógico, de acuerdo a la condición 2).

De una u otra forma $\alpha \in C_n(A)$.

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n$ ($\alpha_n = \alpha$) una prueba formal de α.

La sucesión parcial $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ es, evidentemente, una prueba formal de α_k.

Supongamos que para todo $k < n$ es $\alpha_k \in C_n(A)$.

Para α_n se tiene, o bien (1) $\alpha_n \in A$, ó (2) α_n es un axioma lógico, ó (3) existen $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ con $i_1, i_2, \ldots, i_r < n$ tales que α_n se obtiene de $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ por alguna de las reglas de inferencia i)-vi):

$$\frac{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}}{\alpha_n}$$

En los casos 1) y 2) $\alpha_n \in C_n(A)$; en el caso 3) también $\alpha_n \in C_n(A)$, porque $C_n(A)$ es cerrado respecto de las reglas de inferencia i)-vi) y, por hipótesis inductiva, $\alpha_{i_1}, \ldots$ $\ldots, \alpha_{i_r} \in C_n(A)$.

b) Si $\alpha \in C_n(A)$, $\alpha \in K(A)$, esto es, $C_n(A) \subset K(A)$.

Basta observar que $K(A)$ es cerrado por las reglas de inferencia i)-iv), que $A \subset K(A)$, y que todos los axiomas lógicos pertenecen a $K(A)$.

Sea
$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}{\alpha}$$

una cierta regla de inferencia.

Supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in K(A)$.

Entonces si

$$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \ldots, \alpha_{1,k_1}$$
$$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \ldots, \alpha_{2,k_2}$$

$$\alpha_{r,1},\ \alpha_{r,2},\ \alpha_{r,3},\ldots,\ \alpha_{r,k_r}$$

son pruebas formales de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, respectivamente, es fácil ver que

$$\alpha_{1,1},\ \alpha_{1,2},\ldots,\ \alpha_{1,k_1},\ \alpha_{2,1},\ \alpha_{2,2},\ldots,\ \alpha_{2,k_2},\ldots$$
$$\ldots,\alpha_{r,1},\ \alpha_{r,2},\ldots,\ \alpha_{r,k_r}$$

es una prueba formal de α. Esto es que $\alpha \in K(A)$

Si α es una fórmula de A ó un axioma lógico, la sucesión cuyo único elemento es α es una prueba formal de α, luego $\alpha \in K(A)$. Probamos así que $A \subset K(A)$ y que K(A) contiene a los axiomas lógicos.

3. INTERPRETACION DEL LENGUAJE

Vamos a ver ahora que cuando se da una "interpretación" a los signos del lenguaje $\mathcal{L}$, las reglas de inferencia se traducen correctamente, desde el punto de vista intuitivo, como reglas que permiten pasar de ciertos enunciados verdaderos a otro enunciado verdadero.

Sea $J \neq \emptyset$ un conjunto fijo de elementos, a los cuales podemos llamar individuos.

A cada predicado ρ de m argumentos de $\mathcal{L}$ hagamos corresponder una relación r de m argumentos definida en J.

A cada funtor φ de m argumentos de $\mathcal{L}$ hagamos corresponder una función f de m argumentos de J en J (es decir una función f de $\underbrace{J \times J \times \ldots \times J}_{m\text{-veces}}$ en J)

Decimos que se ha dado una <u>interpretación</u> I de £ cuando se han fijado J y las correspondencias entre predicados y funtores con relaciones y funciones del modo indicado precedentemente.

Dada una fórmula α del lenguaje £, reemplazando en α los signos de predicados y funtores por las designaciones de las funciones correspondientes en la interpretación I y las variables individuales por signos variables que designen elementos no especificados de J, obtenemos una función proposicional concreta α_I (¡α_I no está en £ !).

Supongamos por ejemplo que la fórmula α de £ sea como sigue:

$$\rho(\ \varphi_1(x,y),\ \ \varphi_2(x,y))$$

y sea J el conjunto de los enteros positivos.

Interpretando ρ como " = ", φ_1 como "+" y φ_2 como ".", tenemos α_I

$$(+(x,y)) = (.(x,y))$$

o bien con la notación habitual,

$$(x+y) = (x.y)$$

De una función proposicional concreta decimos que es verdadera, relativamente a la interpretación I fijada, si las proposiciones que resultan al substituir las ocurrencias libres de variables por designaciones de individuos cualesquiera de la clase J $\neq \emptyset$, son todas verdadera

Esta noción puede precisarse más en la forma siguiente:

Sea $\gamma(x_1,\ldots,x_n)$ una función proposicional concreta, donde se han puesto en evidencia las variables libres x_1, $x_2,\ldots,x_n$.

Sea B el álgebra de Boole de 2 elementos $\wedge$, $\vee$.

Si reemplazamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente por designaciones de individuos bien determinados $j_1, j_2, \ldots, j_n$

$$\gamma(j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

será una proposición bien determinada, verdadera o falsa.

Escribiremos:

$$\gamma^{\circ}(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \begin{cases} \bigvee, & \text{si } \gamma(j_1, j_2, \ldots, j_n) \text{ es verdadera} \\ \bigwedge, & \text{si } \gamma(j_1, \ldots, j_n) \text{ no es verdadera} \end{cases}$$

Se verifica sin dificultad, teniendo en cuenta el valor de verdad que se atribuye a las proposiciones concretas que si γ_1, γ_2 son funciones proposicionales concretas relativas a una misma interpretación I del lenguaje $\mathcal{L}$,

$$(\gamma_1 \rightarrow \gamma_2)^{\circ} = \gamma_1^{\circ} \rightarrow \gamma_2^{\circ}$$

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)^{\circ} = \gamma_1^{\circ} \cup \gamma_2^{\circ}$$

$$(\gamma_1 \cap \gamma_2)^{\circ} = \gamma_1^{\circ} \cap \gamma_2^{\circ}$$

$$(-\gamma_1)^{\circ} = -\gamma_1^{\circ}$$

Los signos $\rightarrow$, $\cup$, $\cap$, $-$ en los segundos miembros son los signos de las operaciones en el álgebra de Boole B.

Sea $\gamma_{(x)}$ una función proposicional concreta, donde hemos puesto en evidencia la variable individual x, que es libre en $\gamma_{(x)}$. La función proposicional concreta

$$(\bigcup_x \gamma_{(x)})$$

(es decir, existe un x tal que $\gamma_{(x)}$ es verdadera si y solo si existe, efectivamente, un $j \in J$ tal que $\gamma_{(j)}$ es verdadera.

Asimismo:

$$(\bigcap_x \gamma_{(x)})$$

es verdadera si y solo si para todo $j \in J$, $\gamma_{(j)}$ es verdadera.

Tenemos en consecuencia:

$$(\bigcup_{x} \gamma_{(x)})^{\circ} = \bigcup_{j \in J} \gamma^{\circ}_{(j)}$$

$$(\bigcap_{x} \gamma_{(x)})^{\circ} = \bigcap_{j \in J} \gamma^{\circ}_{(j)}$$

Los signos $\cap, \cup$ a la derecha son los signos de intersección y unión en el álgebra de Boole B de 2 elementos.

Sea I una interpretación de $\mathcal{L}$, $J \neq \emptyset$ el conjunto de individuos.

Una regla de inferencia

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

debe satisfacer el siguiente requisito (conforme a la intuición):

Si $\alpha_{1_I}, \alpha_{2_I}, \ldots, \alpha_{n_I}$ son verdaderas, entonces β_I es verdadera. Es decir, si $\alpha^{\circ}_{1_I} = V, \alpha^{\circ}_{2_I} = V, \ldots, \alpha^{\circ}_{n_I} = V$ entonces $\beta^{\circ}_I = V$.

Las reglas de inferencia i), ii),...,vi) satisfacen esta exigencia, como **es fácil constatar.**

Veamos a título de ejemplo la verificación para la regla iii),

$$\frac{(\alpha \rightarrow \beta)}{((\bigcup_{x} \alpha) \rightarrow \beta)}$$

donde β no contiene ocurrencias libres de x.

Escribamos $\alpha_{(x)}$ en lugar de α para indicar la, eventual, aparición de la variable x en α.

Sea

$$(\alpha_{(x)} \rightarrow \beta)^{\circ}_I = V$$

$$(\alpha(x) \rightarrow \beta)^{\circ}_{I} = (\alpha(x)_I \rightarrow \beta_I)^{\circ} =$$
$$= \alpha(x)^{\circ}_{I} \rightarrow \beta^{\circ}_{I} = V$$

Esto es, en B:

$$\alpha(x)^{\circ}_{I} \leq \beta^{\circ}_{I}$$

Esto significa que, para todo $j \in J$:

$$\alpha(j)^{\circ}_{I} \leq \beta^{\circ}_{I}$$

Luego:

$$\bigcup_{j \in J} \alpha^{\circ}(j)_I \leq \beta^{\circ}_{I}$$

Esto es:

$$\bigcup_{j \in J} \alpha^{\circ}(j)_I \rightarrow \beta^{\circ}_{I} = V,$$

o sea:

$$((\bigcup_{x} \alpha_{(x)}) \rightarrow \beta)^{\circ}_{I} = V,$$

con lo que la verificación termina.

Supongamos que las fórmulas de un conjunto A sean verdaderas en una interpretación I.

El conjunto $C_n(A)$ contiene únicamente fórmulas verdaderas en la interpretación I. En efecto, los axiomas lógicos son siempre verdaderos, independientemente de la interpretación I, en cuanto "provienen" de tautologías del cálculo proposicional. El conjunto $V_I(A)$ de todas las fórmulas verdaderas en la interpretación I es cerrado respecto de las reglas de inferencia según hemos visto y como $A \subset V_I(A)$, y $V_I(A)$ contiene a los axiomas lógicos es $C_n(A) \subset V_I(A)$, como queríamos demostrar.

En particular, si $A = \emptyset$, el conjunto de los predicados-tautológicos $C_n(\emptyset)$ contiene sólo fórmulas verdaderas en cualquier interpretación I.

Se plantea naturalmente el muy importante* problema de saber si, dada una fórmula α verdadera para cualquier interpretación I, será α un predicado tautológico.

La respuesta es afirmativa, pero la prueba no es simple. La veremos más adelante.

4. OTRAS REGLAS DE INFERENCIA EN $\langle \pounds, C_n \rangle$

Conviene indicar otras reglas de inferencia para simplificar las deducciones en £. Estas reglas no son reglas nuevas en rigor, sino que se obtienen de las ya indicadas i) - vi). La introducción de ellas no alterará el operador C_n pues son más bien abreviaciones de un proceso que puede obtenerse también utilizando exclusivamente las reglas i) - vi).

vii) La regla de generalización:

$$\frac{\alpha}{(\bigcap_x \alpha)}$$

Esta regla no varía el operador C_n, basta observar que $C_n(A)$ es cerrado respecto de la regla vii).

En efecto, sea $\alpha \in C_n(A)$. Consideremos el axioma lógico

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

y sea β una fórmula de $C_n(A)$ que no contenga ocurrencias libres de x (siempre es posible elegir una fórmula β en tales condiciones pues el número de variables individuales en £ es infinito). Por la regla de "modus ponens"

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)}{\beta \rightarrow \alpha}$$

Como $\alpha, (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \in C_n(A)$ es $(\beta \rightarrow \alpha) \in C_n(A)$.

Por la regla de introducción de cuantificadores universales,

$$\frac{(\beta \rightarrow \alpha)}{(\beta \rightarrow (\bigcap_x \alpha))}$$

Como $(\beta \rightarrow \alpha) \in C_n(A)$, $(\beta \rightarrow (\bigcap_x \alpha)) \in C_n(A)$ (¡β no contiene ocurrencias libres de x !).

Aplicando la regla de "modus ponens":

$$\frac{\beta, (\beta \rightarrow (\bigcap_x \alpha))}{(\bigcap_x \alpha)}$$

Como $\beta \in C_n(A)$ y $(\beta \rightarrow (\bigcap_x \alpha)) \in C_n(A)$ resulta que

$$(\bigcap_x \alpha) \in C_n(A)$$

viii) <u>Regla de reemplazo de partes equivalentes</u>:

Sean α, β, γ **fórmulas y** sea la fórmula β una parte de la fórmula α(α se obtiene de β agregando algunos, o ningún signos β_1, β_2 a izquierda y derecha, respectivamente, de β)

$$\alpha = \beta_1 \; \beta \; \beta_2$$

La regla es la siguiente:

$$\frac{\alpha, (\beta \rightarrow \gamma), (\gamma \rightarrow \beta)}{\delta}$$

Donde

$$\delta = \beta_1 \; \gamma \; \beta_2$$

Se puede probar, que $C_n(A)$ es cerrado respecto de la regla de reemplazo de partes equivalentes.

No damos la demostración que es algo engorrosa.

A los efectos de este curso asumiremos la validez de la regla viii).

ix) <u>Regla de substitución generalizada para variables individuales.</u>

Observemos en primer lugar que una fórmula del tipo $(\bigcap_x \alpha)$ es <u>equivalente</u> a una fórmula $(\bigcap_y \bar{\alpha})$, donde y es una variable individual que no aparece en $(\bigcap_x \alpha)$, y $\bar{\alpha}$ se obtiene de α por substitución (regla ii) de las ocurrencias libres de x en α (o sea ocurrencias ligadas de x por la ocurrencia inicial de $\bigcap_x$ en $(\bigcap_x \alpha)$) por la variable y

Es decir que

$$((\bigcap_x \alpha)\rightarrow(\bigcap_y \bar{\alpha})) \in C_n(\emptyset), \quad y$$
$$((\bigcap_y \bar{\alpha})\rightarrow(\bigcap_x \alpha)) \in C_n(\emptyset) ;$$

en efecto: la fórmula

$$((\bigcap_x \alpha)\rightarrow(\bigcap_x \alpha)) \in C_n(\emptyset)$$

pues es una substitución de la tautología $(a_1 \rightarrow a_1)$ del cálculo proposicional.

Aplicando la regla de eliminación de cuantificadores universales, tenemos

$$((\bigcap_x \alpha)\rightarrow \alpha) \in C_n(\emptyset)$$

Aplicando la regla de substitución para variables individuales a la fórmula anterior, substitución de x por y, donde y es una variable que no aparece en α, obtenemos

$$((\bigcap_x \alpha)\rightarrow \bar{\alpha}) \in C_n(\emptyset)$$

Aplicando la regla de introducción de cuantificadores universales:

$$((\bigcap_x \alpha)\rightarrow(\bigcap_y \bar{\alpha})) \in C_n(\emptyset)$$

Como α se obtiene de $\bar{\alpha}$ por substitución de la variable y (necesariamente libre en $\bar{\alpha}$) por la variable x, podemos con el mismo razonamiento probar que

$$((\bigcap_y \bar{\alpha})\rightarrow(\bigcap_x \alpha)) \in C_n(\emptyset)$$

De manera similar se prueba la equivalencia de $(\bigcup_{x}\alpha)$ y $(\bigcup_{y}\bar{\alpha})$ donde α y $\bar{\alpha}$ tienen el mismo significado indicado precedentemente.

Veamos ahora la regla de substitución generalizada para variables individuales. Sea dada una fórmula α, donde el cuantificador $\bigcap_{x}$ tenga una cierta ocurrencia, y sea β la subfórmula de α, alcance de esa ocurrencia del cuantificador $\bigcap_{x}$:

$$\alpha = \beta_1(\bigcap_{x}\beta)\beta_2$$

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables individuales y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ términos.

Consideremos una variable individual z que no aparezca en α y en ninguno de los términos $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ (una tal variable existe pues hay una infinidad de variables individuales en el lenguaje $\mathcal{L}$, y las variables individuales en α, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son en número finito).

Con la notación anterior, obtenemos la fórmula:

$$\alpha_1 = \beta_1(\bigcap_{z}\bar{\beta})\beta_2$$

Procediendo de esta forma es posible, paso a paso, "cambiar" los cuantificadores en α por cuantificadores suscriptos con variables $z, z_1, z_2, \ldots$ que no aparecen en α y en ninguno de los términos $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$.

Obtenemos así una fórmula α_o tal que si "$\bigcap_{t}$" aparece en α_o, t es una variable que no aparece ni en α, ni en $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. En este momento, substituimos en α_o $x_1, \ldots, x_n$ por $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, respectivamente, obteniendo la fórmula $\overset{\circ}{\alpha}$.

La regla de substitución generalizada para variables individuales se expresa escribiendo:

$$\frac{\alpha}{\alpha^{\circ}}$$

α° se dice una substitución generalizada de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, respectivamente, en α.

Notemos que esta substitución es siempre posible pero no está unívocamente determinada.

Probemos que C_n es cerrado respecto de esta regla de inferencia, es decir, que si $\alpha \in C_n(A)$, entonces $\alpha^{\circ} \in C_n(A)$.

De $\alpha \in C_n(A)$, resulta $\alpha_1 \in C_n(A)$ aplicando la regla de reemplazo de partes equivalentes (por la observación preliminar $(\bigcap_x \beta)$ y $(\bigcap_z \bar{\beta})$ son equivalentes)

$$\frac{\alpha, ((\bigcap_x \beta) \rightarrow (\bigcap_z \bar{\beta})),\ ((\bigcap_z \bar{\beta}) \rightarrow (\bigcap_x \beta))}{\alpha_1}$$

Por sucesivas aplicaciones de la regla de reemplazo de partes equivalentes tendremos $\alpha_{\circ} \in C_n(A)$.

Finalmente aplicando a $\alpha_{\circ}$, la regla (ii) de substitución de variables individuales para la substitución $x_1, \ldots, x_n$ por $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$

$$\frac{\alpha_{\circ}}{\alpha^{\circ}}$$

De $\alpha_{\circ} \in C_n(A)$ resulta $\alpha^{\circ} \in C_n(A)$.

Observación: El proceso previo de "cambiar" en α los cuantificadores por cuantificadores con variables suscriptas que no aparecen en α ni en los términos $\tau_1, \ldots, \tau_n$ tiene por finalidad hacer posible (lícita) la aplicación de la regla (ii) de substitución de variables individuales.

Sea α° una substitución generalizada del término τ por la variable individual x en la fórmula α.

Notemos que las fórmulas siguientes son predicados tautológicos

$$(\alpha^{\circ} \rightarrow (\bigcup_{x} \alpha))$$

$$((\bigcap_{x} \alpha) \rightarrow \alpha^{\circ})$$

En efecto:

$$(\bigcup_{x} \alpha) \rightarrow (\bigcup_{x} \alpha) \in C_n(\emptyset)$$

Eliminando el cuantificador

$$(\alpha \rightarrow (\bigcup_{x} \alpha)) \in C_n(\emptyset)$$

Por la regla de reemplazo de partes equivalentes

$$(\alpha_{\circ} \rightarrow (\bigcup_{x} \alpha)) \in C_n(\emptyset)$$

Donde $\alpha_{\circ}$ se obtiene de α según el método, indicado anteriormente, de substitución de cuantificadores.

Realizando la substitución de x por τ en la última fórmula obtenemos:

$$(\alpha^{\circ} \rightarrow (\bigcup_{x} \alpha)) \in C_n(\emptyset)$$

Del mismo modo se prueba que

$$(\bigcap_{x} \alpha) \rightarrow \alpha^{\circ} \in C_n(\emptyset).$$

5. RELACION DE IGUALDAD

En casi toda teoría matemática formalizada aparece el predicado "=" caracterizado por los siguientes axiomas. Escribiremos (x = y) en lugar de =(x,y), respetando la costumbre.

E_1) $$x = x$$

E_2) $$((x = z) \rightarrow ((y = z) \rightarrow (x = y)))$$

E_3) Para todo predicado ρ de m-argumentos asumimos, como axioma:

$$(((x_1 = y_1) \cap (x_2 = y_2) \cap \ldots \cap (x_m = y_m)) \rightarrow$$
$$(\rho(x_1,x_2,\ldots,x_m) \rightarrow \rho(y_1,y_2,\ldots,y_m)))$$

E_4) Para todo funtor φ de m-argumentos asumimos, como axioma:

$$((x_1 = y_1) \cap (x_2 = y_2) \cap \ldots \cap (x_m = y_m)) \rightarrow$$
$$(\varphi(x_1,\ldots,x_m) = \varphi(y_1,\ldots,y_m))$$

Estos axiomas serán llamados $\mathcal{E}$-axiomas, y designaremos con $\mathcal{E}$ al conjunto de todos los $\mathcal{E}$-axiomas. Notemos que en E_3), E_4) tenemos tantos axiomas como predicados y funtores aparecen en la teoría.

Desde un punto de vista intuitivo, $x = y$ expresa el hecho de tener un mismo objeto dos designaciones distintas "x", "y".

Ejemplo: Teoría del orden parcial

Variables individuales: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots$ (una infinidad numerable).

Funtores: No existen funtores.

Predicados: " $\leq$ "; " = "

Conectivos lógicos: $\rightarrow, \cap, \cup, -$.

Cuantificadores: $\bigcap_{x_i}$, $\bigcup_{x_i}$, uno por cada variable x_i

Signos auxiliares: (,)

Fórmulas primitivas: $x_i = x_j$, $x_i \leq x_j$

Términos: El conjunto de los términos coincide con el de las variables individuales puesto que no aparecen funtores en la teoría.

El conjunto A de los axiomas está constituido por las fórmulas siguientes: i) a vi).

1) <u>$\mathcal{E}$-axiomas</u>

i) $x_1 = x_1$

ii) $((x_1 = x_3) \rightarrow ((x_2 = x_3) \rightarrow (x_1 = x_2)))$

iii) $(((x_1 = x_2) \cap (x_3 = x_4)) \rightarrow ((x_1 \leq x_3) \rightarrow (x_2 \leq x_4)))$

2) <u>Axiomas específicos de la teoría</u>

iv) $x_1 \leq x_1$

v) $((x_1 \leq x_2) \rightarrow ((x_2 \leq x_3) \rightarrow (x_1 \leq x_3)))$

vi) $((x_1 \leq x_2) \rightarrow ((x_2 \leq x_1) \rightarrow (x_1 = x_2)))$

6. ALGEBRA DE LINDENBAUM DE UNA TEORIA MATEMATICA FORMALIZADA.

Sea $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, C_n, A \rangle$ una teoría matemática formalizada arbitraria.

Consideremos el conjunto F de todas las fórmulas de $\mathcal{T}$.

F es un álgebra abstracta respecto a las operaciones $\rightarrow$, $\cup$, $\cap$, $-$, (conectivos lógicos en $\mathcal{L}$).

Podemos considerar a F como un álgebra de Boole procediendo a la identificación de fórmulas equivalentes de F, más precisamente:

La relación $\alpha \sim \beta$ definida por la condición: $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\beta \rightarrow \alpha) \in C_n(A)$, es como se verifica sin dificultad una relación de congruencia sobre F.

El álgebra de Lindenbaum $L = F/\sim$ de la teoría $\mathcal{T}$ en cuestión consiste en el conjunto de todas las clases de equivalencia:

$$|\alpha| = \{\beta;\ \beta \sim \alpha\},$$

algebrizado por las operaciones:

$$|\alpha| \cup |\beta| = |(\alpha \cup \beta)|$$

$$|\alpha| \cap |\beta| = |(\alpha \cap \beta)|$$
$$-|\alpha| = |(-\alpha)|$$
$$|\alpha| \rightarrow |\beta| = |(\alpha \rightarrow \beta)|$$

La demostración de que L es un álgebra de Boole respecto de las operaciones así definidas es exactamente igual a la análoga del cálculo proposicional.

Veamos qué relación existe entre la cuantificación y las **operaciones booleanas de unión e intersección infinitas.**

<u>Observación</u>: Notemos previamente que si β_1, β_2 son dos substituciones generalizadas de una variable individual x por un término τ en la fórmula α, entonces $(\beta_1 \rightarrow \beta_2)$ y $(\beta_2 \rightarrow \beta_1)$ son tautologías, esto es

$$(\beta_1 \rightarrow \beta_2),\ (\beta_2 \rightarrow \beta_1) \in C_n(\emptyset) \subseteq C_n(A)$$

De donde resulta:

$$|\beta_1| = |\beta_2|$$

Escribamos α de modo de poner en evidencia las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, suscriptas a los cuantificadores de α y la variable libre x.

$$\alpha = \alpha(x, y_1, \ldots, y_n)$$

Con $\beta_1' = \alpha(x, t_1, \ldots, t_n)$ indiquemos la fórmula obtenida de α al substituir $y_1, \ldots, y_n$ por variables $t_1, \ldots, t_n$ que no aparecen ni en α ni en τ. $\beta_2' = \alpha(x, s_1, \ldots, s_n)$ tenga significado análogo.

Sean $\beta_1 = \alpha(\tau, t_1, \ldots, t_n)$ y $\beta_2 = \alpha(\tau, s_1, \ldots, s_n)$ substituciones generalizadas de x por τ en α.

Se pasa de β_1 a β_2 por un cambio de variables subscriptas a cuantificadores del tipo visto en 4 (ix), de modo que β_1 y β_2 son equivalentes.

Con la notación α_τ indiquemos una substitución generalizada de la variable x por un término τ en la fórmula α.

Probemos que

(1) $$|(\bigcup_x \alpha)| = \bigcup_{\tau \in T} |\alpha_\tau|.$$

Donde el signo $\bigcup$ en el segundo miembro de la igualdad es la unión infinita en el álgebra de Boole L, y T indica como antes el conjunto de todos los términos.

De acuerdo a la observación precedente el elemento $|\alpha_\tau| \in$ L está unívocamente determinado.

Hemos probado en 4 que la fórmula siguiente es un predicado tautológico:

$$(\alpha_\tau \rightarrow (\bigcup_x \alpha)) \in C_n(\emptyset)$$

(allí escribíamos α° en lugar de α_τ)

De aquí resulta

$$|\alpha_\tau \rightarrow (\bigcup_x \alpha)| = |\alpha_\tau| \rightarrow |(\bigcup_x \alpha)| = V$$

esto es, para todo $\tau \in T$:

(i) $$|\alpha_\tau| \leq |(\bigcup_x \alpha)|,$$

Supongamos que, para todo $\tau \in T$

(ii) $$|\alpha_\tau| \leq |\beta|$$

y veamos que

$$|(\bigcup_x \alpha)| \leq |\beta|$$

β tiene sólo un número finito de variables individuales y asimismo α; luego existe una variable individual y que no está ni en β ni en α.

Para $\tau = y$ en (ii)

$$|\alpha_y| \leq |\beta|$$

ó, lo que es equivalente,

$$(\alpha_y \rightarrow \beta) \in C_n(A)$$

Por la regla de introducción de cuantificadores existenciales:

$$(\bigcup_y \alpha_y) \rightarrow \beta \in C_n(A)$$

Esto es equivalente a:

$$|(\bigcup_y \alpha_y)| \leq |\beta|$$

Pero

$$|(\bigcup_y \alpha_y)| = |(\bigcup_x \alpha)|$$

pues $(\bigcup_y \alpha_y)$ es una substitución de **x** por **y** en $(\bigcup_x \alpha)$.
Luego:

$$|(\bigcup_x \alpha)| \leq |\beta|$$

En consecuencia $|(\bigcup_x \alpha)$ es el supremo de la clase de elementos $|\alpha_\tau|$, donde τ recorre todos los términos, es decir la igualdad (1) es válida.

7. <u>REALIZACION DE UN LENGUAJE</u>

Consideremos un lenguaje $\mathcal{L}$; y sean J un conjunto no vacío y B un álgebra de Boole completa, no degenerada ($\wedge \neq \vee$). Como una generalización natural del concepto de interpretación introducimos el concepto de <u>realización</u>:

Sea $\mathfrak{M}$ una transformación que asocia:

1) con cada predicado de m-argumentos ρ de $\mathcal{L}$ una bien determinada función $\rho_{\mathfrak{M}}$ de m-argumentos de J en B.

2) con cada funtor de m-argumentos φ de $\mathcal{L}$ una bien determinada función $\varphi_{\mathfrak{M}}$ de m-argumentos de J en J.

<u>DEFINICION: La transformación $\mathfrak{M}$ se dirá una realización</u>

<u>del lenguaje $\mathcal{L}$ en el conjunto J y el álgebra de Boole B.</u>

En particular si B es el álgebra de Boole de dos elementos: $\vee$, $\wedge$ la realización se dice <u>semántica</u> y coincide con la noción de interpretación ya estudiada.

Fijada una realización $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{L}$ en J y B, podemos asociar a cada fórmula α de $\mathcal{L}$ una función $\alpha_{\mathfrak{M}}$, de varias variables en general, de J en B en la forma siguiente:

(1) Reemplazaremos en α los funtores φ y predicados ρ, respectivamente por las funciones $\varphi_{\mathfrak{M}}$ y $\rho_{\mathfrak{M}}$, considerando las variables individuales como variables "recorriendo" J.

(2) Consideraremos que los signos conectivos lógicos, $\cap$, $\cup$, $\rightarrow$, $-$ de α designan las operaciones de Boole intersección, unión, codiferencia y complementación, respectivamente en B.

(3) Reemplazaremos los signos cuantificadores,

$$\bigcap_{x} \text{ y } \bigcup_{x} \text{ por } \bigcap_{x \in J}, \bigcup_{x \in J}$$

designando ahora la intersección y unión infinitas en B.

Sea, por ejemplo,

$$\alpha = ((\bigcap_{y} \rho_1(x, \varphi_1(y,z))) \rightarrow (\bigcup_{y} \rho_2(x,y, \varphi_2(z))))$$

$$\alpha_{\mathfrak{M}} = ((\bigcap_{y \in J} \rho_{1\mathfrak{M}}(x, \varphi_{1\mathfrak{M}}(y,z))) \rightarrow (\bigcup_{y \in J} \rho_{2\mathfrak{M}}(x,y, \varphi_{2\mathfrak{M}}(z))))$$

$\alpha_{\mathfrak{M}}$ es una función de dos variables $\alpha_{\mathfrak{M}}(x,z)$.

Si una fórmula α contiene a $x_1, x_2, \ldots, x_s$ como únicas variables con ocurrencias libres en α la función $\alpha_{\mathfrak{M}}$ es una función de $J \times J \times \ldots \times J$ (s veces) en B.

Desde un punto de vista técnico es conveniente considerar las funciones $\alpha_{\mathfrak{M}}$ como funciones de un número infinito de variables; más precisamente:

Sea V el conjunto de las variables individuales de $\mathcal{L}$;

vamos a considerar las funciones $\alpha_{\mathfrak{M}}$ como funciones de J^V en B.

Cada punto $v \in J^V$ será llamado una <u>valuación</u>. Con v_x indicaremos la coordenada correspondiente al índice $x \in V$ del punto $v \in J^V$.

El valor de la función $\alpha_{\mathfrak{M}}$ en el punto v será designado $\alpha_{\mathfrak{M},v}$.

Si α contiene las variables libres $x_1,x_2,\ldots,x_s$, en $\alpha_{\mathfrak{M}}$ según se ha indicado antes, figuran explícitamente las s variables $x_1,\ldots,x_s$. $\alpha_{\mathfrak{M},v}$ es el elemento de B que se obtiene al substituir las variables $x_1,x_2,\ldots,x_s$ por las coordenadas $v_{x_1},v_{x_2},\ldots,v_{x_s}$, respectivamente.

De acuerdo a la definición dada si α,β son fórmulas

$$(1)\quad \begin{aligned} (\alpha \rightarrow \beta)_{\mathfrak{M},v} &= \alpha_{\mathfrak{M},v} \rightarrow \beta_{\mathfrak{M},v} \\ (\alpha \cap \beta)_{\mathfrak{M},v} &= \alpha_{\mathfrak{M},v} \cap \beta_{\mathfrak{M},v} \\ (\alpha \cup \beta)_{\mathfrak{M},v} &= \alpha_{\mathfrak{M},v} \cup \beta_{\mathfrak{M},v} \\ (-\alpha)_{\mathfrak{M},v} &= -\alpha_{\mathfrak{M},v} \end{aligned}$$

Sea $j \in J$, v una valuación y sea x una variable individual fija, v^j una valuación definida de la siguiente forma:

$$v_y^j = \begin{cases} j & \text{si } y = x \\ v_y & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

Con esta notación se tiene

$$(2)\quad \begin{aligned} (\bigcap_x \alpha)_{\mathfrak{M},v} &= \bigcap_{j \in J} \alpha_{\mathfrak{M},v^j} \\ (\bigcup_x \alpha)_{\mathfrak{M},v} &= \bigcup_{j \in J} \alpha_{\mathfrak{M},v^j} \end{aligned}$$

<u>Observación</u>: El requisito: "B es un álgebra de Boole completa" se explica técnicamente, pues pueden no existir

los supremos e ínfimos infinitos de las igualdades (2) en un álgebra de Boole cualquiera.

DEFINICION: Dada una realización fija $\mathfrak{M}$ (en J y B), diremos que una valuación $v \in J^V$ hace válida la fórmula α en $\mathfrak{M}$ si es

$$\alpha_{\mathfrak{M},v} = V \in B$$

Respecto de una realización fija $\mathfrak{M}$, una fórmula α se dice válida en dicha realización si toda valuación v hace válida la fórmula α, esto es, si

$$\alpha_{\mathfrak{M},v} = V \quad \text{para todo } v \in J^V$$

Un conjunto A de fórmulas se dice que es satisfactible en $\mathfrak{M}$, si existe una valuación v tal que hace válidas en $\mathfrak{M}$, todas las fórmulas de A simultáneamente. Esto es, si para algún $v \in J^V$

$$\alpha_{\mathfrak{M},v} = V, \quad \text{para toda } \alpha \in A.$$

Si la realización $\mathfrak{M}$ es una realización semántica, esto es respecto de un álgebra de Boole de 2 elementos, decir que α es válida en $\mathfrak{M}$ equivale a decir que α es verdadera en la interpretación correspondiente. Decir que α es satisfactible en $\mathfrak{M}$ equivale a decir que $(-\alpha)$ no es verdadera en la interpretación correspondiente.

Sea $\mathfrak{M}$ una realización de $\mathcal{L}$ en J y B. Sea h un homomorfismo booleano completo de B en un álgebra de Boole completa B'.

Con el símbolo $h_{\mathfrak{M}}$ designemos la siguiente realización de $\mathcal{L}$ en J y B':

1) Si ρ es un predicado; $\rho_{h_{\mathfrak{M}}} = h \circ \rho_{\mathfrak{M}}$

2) Si φ es un funtor: $\varphi_{h_{\mathfrak{M}}} = \varphi_{\mathfrak{M}}$

<u>LEMA 1: Para toda fórmula α, y toda valuación v</u>

$$\alpha_{h_{\mathfrak{M},v}} = h(\alpha_{\mathfrak{M},v})$$

DEMOSTRACION: La demostración - como muchas demostraciones en lógica matemática - es por inducción sobre la longitud de las fórmulas. Dejaremos a cargo del lector este tipo casi automático de demostraciones.

<u>DEFINICION: Supongamos dados dos lenguajes $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$. Diremos que $\mathcal{L}'$ es una extensión de $\mathcal{L}$ si y solo si</u>
<u>1) $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ tienen exactamente los mismos conectivos lógicos y signos auxiliares.</u>
<u>2) Los conjuntos de variables individuales, de cuantificadores asociados a variables individuales, de predicados y de funtores de $\mathcal{L}$ son, respectivamente, una parte de los correspondientes conjuntos de signos de $\mathcal{L}'$.</u>

Sean $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{M}'$ realizaciones de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ (extensión de $\mathcal{L}$), respectivamente, en J y B.

Diremos que $\mathfrak{M}'$ es una extensión de $\mathfrak{M}$ si

1) $\rho_{\mathfrak{M}'} = \rho_{\mathfrak{M}}$, para todo predicado ρ de $\mathcal{L}$

2) $\varphi_{\mathfrak{M}'} = \varphi_{\mathfrak{M}}$, para todo funtor φ de $\mathcal{L}$.

Si V,V' son los conjuntos de variables de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ respectivamente, $V \subset V'$, diremos que la valuación $v' \in J^{V'}$ es una extensión de la valuación $v \in J^{V}$ si

$$v_x = v'_x \quad \text{para toda } x \in V$$

<u>LEMA 2: Si £' es una extensión de £, $\mathcal{M}'$ es una extensión de $\mathcal{M}$ y v' es una extensión de v, entonces, para toda fórmula α de £</u>

$$\alpha_{\mathcal{M},v} = \alpha_{\mathcal{M}',v'}$$

La demostración es por inducción en la longitud de la fórmula α.

Vamos a definir ahora una realización de carácter muy especial y que jugará un papel importante en lo que sigue:

Sea $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A \rangle$ una teoría matemática formalizada y L su álgebra de Lindenbaum. L no será en general un álgebra de Boole completa pero puede siempre considerarse subálgebra de un álgebra completa B.

Sea h el isomorfismo de Boole canónico de L en B.

Hemos visto que en L se tiene:

$$(\ell) \quad \begin{array}{l} |(\bigcup_x \alpha)| = \bigcup_{\tau \in T} |\alpha_\tau| \\ |(\bigcap_x \alpha)| = \bigcap_{\tau \in T} |\alpha_\tau| \end{array}$$

En general el isomorfismo h no respetará las igualdades (ℓ), a menos que h sea un ℓ-isomorfismo en relación al conjunto (ℓ) de igualdades.

Esto último puede asegurarse por lo menos en los dos casos siguientes:

a) B es la extensión mínima completa de L. En este caso h respeta todos los supremos e ínfimos infinitos de conjuntos en L.

b) Si £ contiene una infinidad numerable de signos. En tal caso el conjunto F de todas las fórmulas de L es numerable y, en consecuencia, es numerable el conjunto de igualdades (ℓ).

Ya hemos probado (ver "Algebras de Boole") que en este último caso existe un ℓ-isomorfismo h de L en el cuerpo B de todos los subconjuntos de un conjunto fijo X.

Consideremos la siguiente realización:

Sea $J = T$, conjunto de todos los términos de $\mathcal{L}$.

Sea B un álgebra de Boole completa, para la cual exista un ℓ-isomorfismo h de L en B.

$\mathcal{M}$ se define por las siguientes condiciones:

i) Si φ es un funtor de m argumentos

$$\varphi_{\mathcal{M}}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) = \varphi(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) \in T$$

ii) Si ρ es un predicado de m argumentos

$$\rho_{\mathcal{M}}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) = h(\,|\rho(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)|\,) \in B$$

donde $\tau_1, \tau_2,\ldots,\tau_m \in T$.

La realización $\mathcal{M}$ así definida se dice la <u>realización canónica</u> determinada por h y por el conjunto A (axiomas de $\mathcal{T}$).

El siguiente Lema se prueba por inducción sobre la longitud de la fórmula α:

<u>LEMA 3: Sea $\mathcal{M}$ la realización canónica determinada por h y A. Para cada fórmula α y cada valuación $v \in T^V$,</u>

$$\underline{\alpha_{\mathcal{M},v} = h(|\alpha_v|).}$$

<u>Donde α_v es una substitución generalizada de todas las variables libres de α: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ por los términos $\tau_1 = v_{x_1}, \tau_2 = v_{x_2},\ldots, \tau_n = v_{x_n}$, respectivamente.</u>

DEFINICION: Con respecto al conjunto T^V diremos que $v_o \in T^V$ es la valuación canónica si para todo $x \in V$: $v_{o_x} = x$.

Como Corolario del Lema 3, tenemos que
Si $\mathcal{M}$ y v_o son canónicas, $\alpha_{\mathcal{M}, v_o} = h(|\alpha|)$.

8. MODELOS

DEFINICION: Una realización $\mathcal{M}$, en un conjunto J y un álgebra de Boole B, del lenguaje $\mathcal{L}$, se dice un modelo para el conjunto A de fórmulas, en J y B, si $\alpha_{\mathcal{M}} = V$ para cada fórmula $\alpha \in A$. También diremos que $\mathcal{M}$ es un modelo en J y B de la teoría $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, C_n, A \rangle$.

En otros términos, una realización $\mathcal{M}$ es un modelo para el conjunto A de fórmulas, si todas las fórmulas de A son válidas en dicha realización.

El caso más importante es aquel en el cual B es el álgebra de Boole de 2 elementos $B = \{\wedge, \vee\}$; $\mathcal{M}$ se dice entonces modelo semántico en J para el conjunto A de fórmulas.

Observación: Los lógicos usan la expresión "modelo" para designar lo que nosotros llamamos aquí modelo semántico

LEMA 4: 1) Si $\mathcal{M}$ es un modelo para A en J y B, entonces todo teorema α de la teoría $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, C_n, A \rangle$ ($\alpha \in C_n(A)$) es una fórmula válida en $\mathcal{M}$. ($\alpha_{\mathcal{M}} \equiv V$).
2) Si existe una fórmula α que no es un teorema de la

<u>teoría $\mathcal{T}$, entonces existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que para toda fórmula $\beta \notin C_n(A)$, β no es válida en $\mathcal{M}$.</u>

DEMOSTRACION: 1) La clase de todas las fórmulas válidas en $\mathcal{M}$ contiene A, por definición de modelo $\mathcal{M}$, y puede verificarse sin dificultad que es cerrada respecto de todas las reglas de inferencia i),...,vi). Por tanto esta clase contiene a la clase $C_n(A)$ como subconjunto.

2) Supongamos que $\alpha \notin C_n(A)$.

El álgebra de Lindenbaum L de la teoría $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, C_n, A \rangle$ es entonces no degenerada. Sea h un ℓ-isomorfismo de L en un álgebra de Boole completa B respecto del conjunto (ℓ) de fórmulas.

$$(\ell) \qquad \begin{aligned} |(\bigcup_x \alpha)| &= \bigcup_{\tau \in T} |\alpha_\tau| \\ |(\bigcap_x \alpha)| &= \bigcap_{\tau \in T} |\alpha_\tau| \end{aligned}$$

Tal ℓ-isomorfismo existe siempre. Podemos asumir, en efecto, que B es la extensión mínima completa de L y h el isomorfismo canónico de L en B.

Sea $\mathcal{M}$ la realización canónica determinada por h y A.

Aplicando las conclusiones del Lema 3, y con las notaciones allí usadas, tenemos, para cada fórmula α y toda valuación $v \in T^V$:

$$\alpha_{\mathcal{M},v} = h(|\alpha_v|)$$

Si $\alpha \in A \subseteq C_n(A)$, entonces, por la regla de substitución generalizada, $\alpha_v \in C_n(A)$, por consiguiente:

$$|\alpha_v| = \bigvee \in L$$

y

$$h(|\alpha_v|) = \bigvee \in B$$

Es decir $\alpha_{\mathcal{M},v} = V$ para toda valuación $v \in T$, esto es, $\alpha_{\mathcal{M}} \equiv V$.

$\mathcal{M}$ es entonces un modelo para A (en J = T y B). Supongamos, ahora, que $\beta \notin C_n(A)$ y sea v_o la valuación canónica, entonces

$$\beta_{\mathcal{M},v_o} = h(|\beta|).$$

Como $\beta \notin C_n(A)$, $|\beta| \neq V \in L$

luego, puesto que h es un isomorfismo

$$\beta_{\mathcal{M},v_o} = h(|\beta|) \neq V \in B$$

Esto quiere decir que la valuación v_o no hace válida a β en el modelo $\mathcal{M}$(que es la realización canónica determinada por h y A), esto es, que β no es válida en el modelo $\mathcal{M}$.

Sean $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, C_n, A \rangle$, $\mathcal{T}' = \langle \mathcal{L}', C_n, A \rangle$ dos teorías con el mismo conjunto A de axiomas, pero sea el lenguaje $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{T}'$ una extensión del lenguaje $\mathcal{L}$ de $\mathcal{T}$.

Sean J un conjunto no vacío y B un álgebra de Boole completa.

<u>LEMA 5: Si $\mathcal{M}'$ es una realización de $\mathcal{L}'$ (en J y B) que es una extensión de un modelo $\mathcal{M}$ (en los mismos J y B) de la teoría $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}'$ es un modelo de la teoría $\mathcal{T}'$</u>.

DEMOSTRACION: En efecto, basta probar que $\alpha_{\mathcal{M}'} = V$ para toda fórmula $\alpha \in A$, lo que se sigue del <u>lema 2</u> inmediatamente, pues para toda valuación $v' \in J^{V'}$, existe una valuación $v \in J^V$ de la cual v' es extensión, luego

$$\alpha_{\mathcal{M}',v'} = \alpha_{\mathcal{M},v} = V$$

<u>Nota:</u> Si tenemos en $\mathcal{L}$ el predicado "=" (lo que es usual) y por lo tanto los ε-axiomas son una parte de A ($\varepsilon \subseteq$ A) un modelo $\mathfrak{M}$ para la teoría $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, C_n, A \rangle$ debe asociar al predicado"="una función a dos argumentos (relación) xEy de J en B.

La función E debe ser tal que para cada ε-axioma α $\alpha_{\mathfrak{M}} = \bigvee$. El caso más importante se presenta para los modelos semánticos (B = $\{\wedge, \vee\}$), entonces xEy es uno de los valores $\vee, \wedge \in$ B.

Se puede definir sobre J una relación de equivalencia "$\sim$"por

$$x \sim y \qquad \text{si y solo si} \quad xEy = \bigvee$$

Del conjunto ε de los ε-axiomas se sigue, además, que "$\sim$"es una relación de congruencia sobre J, en el siguiente sentido:

a) Si $x_1 \sim y_1$, $x_2 \sim y_2, \ldots, x_m \sim y_m$ y si φ es un funtor de m-argumentos de $\mathcal{L}$:

$$\varphi_{\mathfrak{M}}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \sim \varphi_{\mathfrak{M}}(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

b) Si $x_1 \sim y_1$, $x_2 \sim y_2, \ldots, x_m \sim y_m$ y si ρ es un predicado de m-argumentos de $\mathcal{L}$:

$$\rho_{\mathfrak{M}}(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee \text{ si y solo si } \rho_{\mathfrak{M}}(y_1, \ldots, y_m) = \bigvee$$

En general "$\sim$" no es la relación de identidad usual. Si es el caso que $\sim$ es la identidad en J, diremos que $\mathfrak{M}$ es un <u>modelo semántico ordinario</u>. En los textos de lógica éstos son llamados simplemente modelos.

Sea J' = J/$\sim$, se prueba por un procedimiento **típico** en el álgebra, que si $\mathfrak{M}$ es un modelo semántico de la teoría $\mathcal{T}$ en el conjunto J existe un modelo semántico ordinario de la teoría $\mathcal{T}$, en el conjunto J' (J' de número cardinal menor o igual al número cardinal de J).

9. TEORIAS CONSISTENTES

DEFINICION: Una teoría $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A \rangle$ se dice consistente si hay alguna fórmula que no es teorema; es decir si $C_n(A) \neq F$.

Dicho de otra manera $\mathcal{T}$ es consistente si el álgebra de Lindenbaum L de $\mathcal{T}$, es no degenerada. Decir que $\mathcal{T}$ es consistente equivale decir que para cada fórmula α, no es teorema alguna de las fórmulas: α, $(-\alpha)$.

En efecto si para alguna fórmula α, $\alpha \in C_n(A)$ y $(-\alpha) \in C_n(A)$, veamos que $C_n(A) = F$.

De la tautología del cálculo proposicional

$$a_1 \rightarrow ((-a_1) \rightarrow a_2),$$

se infiere que, cualquiera sea la fórmula β,

$$\alpha \rightarrow ((-\alpha) \rightarrow \beta) \in C_n(A).$$

De $\alpha \in C_n(A)$, por "modus ponens"

$$(-\alpha) \rightarrow \beta \in C_n(A)$$

De $(-\alpha) \in C_n(A)$, por "modus ponens"

$$\beta \in C_n(A)$$

Luego toda fórmula $\beta \in F$, pertenece a $C_n(A)$.

Es trivial la recíproca: si $\mathcal{T}$ no es consistente, para alguna fórmula α, α y $(-\alpha)$ son teoremas, pues siendo $C_n(A) = F$, para cualquier fórmula α, α y $(-\alpha)$ pertenecen a F; luego son teoremas.

Diremos también que A es un conjunto de fórmulas consistente del lenguaje £ cuando $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A \rangle$ es una teoría consistente.

TEOREMA 1: Si A es un conjunto de fórmulas no consistente de £, entonces A contiene un subconjunto finito A_o que es también no consistente.

DEMOSTRACION: Supongamos que A es no consistente; esto significa que existe $\alpha \in C_n(A)$, tal que $(-\alpha) \in C_n(A)$.

Sean $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n = \alpha$, y $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m = (-\alpha)$ pruebas formales de α y de $(-\alpha)$ respectivamente a partir de las hipótesis A.

Sea A_o el conjunto de las fórmulas de A que aparecen en $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$.

Este conjunto es finito, evidentemente y $\alpha, (-\alpha) \in C_n(A_o)$ porque $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ y $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ son respectivamente pruebas formales de α y $(-\alpha)$, a partir de las hipótesis A_o.

Esto significa que A_o es no-consistente.

El teorema 1 puede enunciarse también en la siguiente forma equivalente:

Si todo subconjunto finito A_o de un conjunto de fórmulas A es consistente, A es consistente.

TEOREMA 2: Una teoría $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A \rangle$ es consistente si y solo si $\mathcal{T}$ tiene un modelo $\mathcal{M}$.

DEMOSTRACION: 1) Supongamos que $\mathcal{M}$ es un modelo de la teoría $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A \rangle$, en J y B, y probemos que $\mathcal{T}$ es necesariamente consistente.

Consideremos una fórmula α cualquiera de £ y veamos que

a) Si $\alpha \in C_n(A)$ entonces $(-\alpha) \notin C_n(A)$

b) Si $(-\alpha) \in C_n(A)$ entonces $\alpha \notin C_n(A)$

Es suficiente probar a), pues b) se sigue inmediatamente de a) considerando la tautología

$$(\alpha \rightarrow (-(-\alpha))) \in C_n(\emptyset) \subset C_n(A)$$

a) Sea $\alpha \in C_n(A)$, entonces

$$\alpha_{\mathcal{M}} = V \in B$$

luego $$(-\alpha)_{\mathcal{M}} = -(\alpha_{\mathcal{M}}) = \Lambda \neq V$$

esto significa que $(-\alpha) \notin C_n(A)$, porque $\mathcal{M}$ es un modelo de $\mathcal{T}$ y si fuese $(-\alpha) \in C_n(A)$ sería $(-\alpha)_{\mathcal{M}} = V$, lo que no sucede.

2) Si $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A\rangle$ es consistente, entonces existe un modelo $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$.

Se sigue del punto 2) del Lema 4) ya probado.

<u>TEOREMA 3: Si un lenguaje £' es una extensión del lenguaje £ entonces la teoría $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A\rangle$ es consistente si y solo si la teoría $\mathcal{T}' = \langle £', C_n, A\rangle$ es consistente. Además si α es una fórmula de £, α es derivable en $\mathcal{T}$ si y solo si α es derivable en $\mathcal{T}'$.</u>

DEMOSTRACION: Sea $\mathcal{T}$ consistente; por **el teorema 2,** $\mathcal{T}$ **tiene** un modelo $\mathcal{M}$, en cierto conjunto J y cierta álgebra de Boole completa B, sea $\mathcal{M}'$ una realización de £' de J y B, extensión de la realización $\mathcal{M}$ de £.

$\mathcal{M}'$ es como hemos observado (Lema 5) un modelo de la teoría $\mathcal{T}'$. Pero, por teorema 2, $\mathcal{T}'$ es, entonces, consistente.

La recíproca es también cierta:

Supongamos $\mathcal{T}'$ consistente.

Si $\mathcal{T}$ no fuese consistente existiría una fórmula α de £ tal que α y $(-\alpha)$ son derivables en $\mathcal{T}$, esto es, existirían sendas pruebas formales para α y $(-\alpha)$, pero éstas serían también pruebas formales de α y $(-\alpha)$ en $\mathcal{T}'$. Luego sería $\mathcal{T}'$ no consistente lo que contradice la hipótesis.

$\mathcal{T}$ es, en virtud del absurdo, consistente.

Probemos ahora la 2° parte del teorema:

Si α es derivable en $\mathcal{T}$, α es derivable en $\mathcal{T}'$, pues una prueba formal de α en $\mathcal{T}$ es también prueba formal de α en $\mathcal{T}'$.

Si α no es derivable en $\mathcal{T}$, veamos que α no es derivable en $\mathcal{T}'$.

Por el lema 4, de α no derivable en $\mathcal{T}$ concluimos que existe un modelo $\mathcal{M}$ en J y B, de $\mathcal{T}$ tal que α no es válida en $\mathcal{M}$:

$$\alpha_{\mathcal{M},v} \neq V \in B,$$

para alguna valuación $v \in J^V$.

La extensión $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ es un modelo de $\mathcal{T}'$. Sea $v' \in J^{V'}$ una extensión de v, entonces (Lema 2)

$$\alpha_{\mathcal{M},v} = \alpha_{\mathcal{M}',v'}$$

luego $\alpha_{\mathcal{M}',v'} \neq V$ para un modelo $\mathcal{M}'$ y una valuación v', y por lo tanto α no es válida en el modelo $\mathcal{M}'$; por el lema 4) α no es un teorema en $\mathcal{T}'$.

<u>DEFINICION: Una fórmula α se dice refutable en la teoría $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A\rangle$ si $(-\alpha)$ es un teorema. Y se dice que α es irrefutable si no es refutable, esto</u>

es, si $(-\alpha)$ no es teorema.

TEOREMA 4: Si un lenguaje £ es numerable, (es decir , si el alfabeto es numerable), y la teoría $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A\rangle$ es consistente, entonces $\mathcal{T}$ tiene un modelo semántico $\mathcal{M}$ en un conjunto J numerable. Además, dada una fórmula α_0 irrefutable, podemos encontrar un modelo $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$ en las condiciones anteriores, tal que α_0 es satisfactible en $\mathcal{M}$ (esto es $\alpha_{0_{\mathcal{M},v}} = \vee$ para alguna valuación v).

DEMOSTRACION: Sea L el álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{T}$; esta álgebra de Boole es numerable y por consiguiente existe un ℓ-isomorfismo h_0 de L en el cuerpo de todos los subconjuntos de un espacio X.

Si α_0 es una fórmula irrefutable, es $|-\alpha_0| \neq \vee \in L$, ó, lo que es equivalente, $|\alpha_0| \neq \wedge \in L$. Entonces $h_0(|\alpha_0|)$ no es vacío, esto significa que existe un $\xi \in h_0(|\alpha_0|) \subseteq X$.

En relación a ξ, sea h_1 el homomorfismo de 2^X sobre el álgebra de Boole B de dos elementos $\wedge, \vee$, definido de la forma siguiente:

$$h_1(Z) = \begin{cases} \vee, & \text{si} \quad \xi \in Z \\ \wedge, & \text{si} \quad \xi \notin Z \end{cases}$$

Este homomorfismo conserva, evidentemente, todas las uniones e intersecciones de 2^X.

Entonces $h = h_1 \circ h_0$ es un ℓ-homomorfismo de L en B.

Consideremos la realización canónica $\mathcal{M}$ determinada por A y h (en el conjunto numerable J = T de los términos de £) y probemos que $\mathcal{M}$ es un modelo (semántico por cierto) para la teoría $\mathcal{T}$ en el conjunto J.

Sabemos que, para cada valuación v y cada fórmula α, se tiene:

$$\alpha_{\mathcal{M},v} = h(|\alpha_v|)$$

Veamos que si $\alpha \in C_n(A)$, para cualquier valuación v,

$$\alpha_{\mathcal{M},v} = V \in B$$

En efecto, si $\alpha \in C_n(A)$, por la regla de substitución generalizada, la substitución $\alpha_v \in C_n(A)$, luego

$$|\alpha_v| = V \in L$$

y como h es un isomorfismo

$$\alpha_{\mathcal{M}} = h(|\alpha_v|) = V \in B$$

lo que prueba que $\mathcal{M}$ es un modelo.

La conclusión adicional es inmediata, de la demostración de la primera parte del teorema. Si α_0 es una fórmula irrefutable, definiendo $\mathcal{M}$ en relación a α_0, como se ha indicado, tenemos para la valuación canónica v_0:

$$\alpha_{0_{\mathcal{M},v_0}} = h(|\alpha_0|) = h_1 \circ h_0(|\alpha_0|)$$

como $\quad \xi \in h_0(|\alpha_0|)$ es

$$h_1(h_0(|\alpha_0|)) = V$$

Esto es, para la valuación **canónica v_0**,

$$\alpha_{0_{\mathcal{M},v_0}} = V$$

lo que prueba que α_0 es satisf**act**ible en $\mathcal{M}$.

Lo esencial en la hipótesis del teorema anterior es que el conjunto A de axiomas de la teoría $\mathcal{T}$ sea numerable:

<u>TEOREMA 5: (Gödel - Skolem - Löwenheim) Si A es un conjunto numerable de fórmulas y $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A \rangle$ es consistente entonces $\mathcal{T}$ tiene un modelo semántico $\mathfrak{M}$ en un conjunto numerable J. Además dada una fórmula irrefutable α_0 existe un modelo $\mathfrak{M}$, en las condiciones precitadas, tal que α_0 es satisfactible en $\mathfrak{M}$.</u>

DEMOSTRACION: Consideremos un lenguaje $£_0$ conteniendo sólo las variables individuales, los predicados y funtores que aparecen en todas las fórmulas de A y en la fórmula, irrefutable en $\mathcal{T}$, α_0. Además, contenga $£_0$ conectivos lógicos, cuantificadores y signos auxiliares. £ es, entonces, una extensión de $£_0$. $£_0$ es numerable pues A contiene un conjunto numerable de fórmulas, y en cada fórmula hay un número finito de signos.

La teoría $\mathcal{T}_0 = \langle £_0, C_n, A \rangle$ es consistente (primera parte del teorema 3). La fórmula α_0, por hipótesis irrefutable en $\mathcal{T}$, es irrefutable en $\mathcal{T}_0$. Porque si α_0 fuese refutable en $\mathcal{T}_0$, $(-\alpha_0)$ sería teorema en $\mathcal{T}_0$, luego (2a. parte del teorema 3) $(-\alpha_0)$ sería teorema en $\mathcal{T}$, esto es, α_0 refutable en $\mathcal{T}$, lo que contradice la hipótesis.

Aplicando a $\mathcal{T}_0$ el teorema 4, se prueba que existe un modelo semántico $\mathfrak{M}_0$, para $\mathcal{T}_0$ en un conjunto numerable J, tal que α_0 es satisfactible en $\mathfrak{M}_0$.

Sea $\mathfrak{M}$ una extensión de $\mathfrak{M}_0$, en J y B, entonces por Lema 5, $\mathfrak{M}$ es un modelo para la teoría $\mathcal{T}$ en J.

Del Lema 2, si v es una extensión de la valuación v_0 que hace válida la fórmula α_0 en el modelo $\mathfrak{M}_0$, se sigue que v hace válida la fórmula α_0 en el modelo $\mathfrak{M}$ (es decir que α_0 es satisfactible en $\mathfrak{M}$):

$$\alpha_{\mathcal{M},v} = \alpha_{\mathcal{M}_0,v_0} = V.$$

Nota: La hipótesis del teorema 5 puede aún debilitarse exigiendo sólo que en A aparezcan funtores y predicados en cantidad numerable.

Con los resultados obtenidos es fácil probar el siguiente:

TEOREMA 6: (Gödel) Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) α es un predicado tautológico ($\alpha \in C_n(\emptyset)$)

(ii) α es válida en toda realización $\mathcal{M}$ de £.

(iii) α es válida en toda realización semántica de £.

(iv) α es válida en cualquier realización sobre un conjunto numerable J.

(v) α es válida en cualquier realización semántica sobre un conjunto numerable J.

DEMOSTRACION: i)$\Rightarrow$ii) Toda realización $\mathcal{M}$ de £ es un modelo para el conjunto vacío de fórmulas, en J y B, esto es, para la teoría $\mathcal{T} = \langle £, C_n, \emptyset \rangle$. Por la **primera parte del** Lema 4, si $\alpha \in C_n(\emptyset)$, resulta que α es válida en cualquier realización $\mathcal{M}$.

Las implicaciones siguientes son evidentes:

(ii)$\Rightarrow$(iii)

(ii)$\Rightarrow$(iv)

(iii)$\Rightarrow$(v)

(iv)$\Rightarrow$(v)

(v)$\Rightarrow$(i)

Supongamos que α no sea un predicado tautológico, $\alpha \notin C_n(\emptyset)$ y veamos que para alguna realización semántica en un conjunto numerable J, α no es válida.

Aplicando el teorema 5, con A = $\emptyset$ a la fórmula irrefutable $\alpha_0 = (-\alpha)$ (pues es evidente que $-\alpha_0 = -(-\alpha) \notin C_n(\emptyset)$, resulta que existe un modelo $\mathcal{M}$ del conjunto vacío de fórmulas, en un conjunto numerable J, tal que

$$(-\alpha)_{\mathcal{M},v} = -(\alpha_{\mathcal{M},v}) = V$$

para alguna valuación v.

Esto equivale a decir que

$$\alpha_{\mathcal{M},v} = \Lambda$$

para esa valuación.

En consecuencia α no es válida para el modelo $\mathcal{M}$, realización semántica en J numerable.

Observación: Los conceptos de realización semántica e interpretación son idénticos. El teorema de Gödel anterior afirma, en particular, que "las fórmulas válidas en todo modelo son derivables en la teoría $\mathcal{T}_{\emptyset} = \langle \pounds, C_n, \emptyset \rangle$", lo que está en buen acuerdo con la intuición que nos dice que las fórmulas verdaderas en cualquier interpretación deben coincidir con los predicados tautológicos.

Vamos a generalizar los resultados anteriores:

Lema de Hasenjäger. Hipótesis:

1) Sean $\pounds$, $\pounds'$ dos lenguajes, donde $\pounds'$ es una extensión de $\pounds$ conteniendo más funtores que $\pounds$, pero exactamente los mismos signos que no sean funtores.

Contenga £' por lo menos tantos funtores que no sean de £ como serán necesarios para la construcción de la sucesión especificada en (3).

2) Consideremos la sucesión transfinita H de fórmulas del tipo

$$(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi) \rightarrow \alpha'_\xi \quad , 0 \leq \xi < \xi_0$$

donde α_ξ es una fórmula de £', conteniendo como únicas ocurrencias libres las de las variables:

$$x_{\xi_1}, x_{\xi_2}, \dots, x_{\xi m_\xi}$$

y - eventualmente - la variable x_ξ; α'_ξ es una substitución generalizada de α_ξ especificada en (4).

3) Está asociada a cada fórmula α_ξ, un funtor f_ξ de £' y no de £, tal que

a) f_ξ tiene m_ξ argumentos

b) f_ξ es distinto de todo f_n con $n < \xi$

c) f_ξ es distinto de todo funtor que aparezca en cualquier fórmula α_n con $n \leq \xi$.

4) α'_ξ es una substitución generalizada de la variable x_ξ por el término $f_\xi(x_{\xi_1}, x_{\xi_2}, \dots, x_{\xi_{m_\xi}})$ en α_ξ.

<u>Tesis:</u> Si una teoría $\mathcal{T} = \langle £, C_n, A \rangle$ es consistente, entonces la teoría $\mathcal{T}' = \langle £', C_n, A \cup H \rangle$ es también consistente.

Además si β es una fórmula en £ irrefutable en $\mathcal{T}$, entonces β es también irrefutable en $\mathcal{T}'$.

<u>Demostración:</u> **Observemos en primer lugar** que es suficiente probar el Lema en el caso en que A es

un conjunto finito de fórmulas.

Para una fórmula β de $\mathcal{L}$, supongamos que la implicación:

"Si β es refutable en $\mathcal{T}'$, entonces β es refutable en $\mathcal{T}$",

se verifica para A finito cualesquiera. Veamos que vale en general.

Sea β refutable en $\mathcal{T}'$, esto es:

$$(-\beta) \in C_n(A \cup H)$$

Como $-\beta$, puede ser probada con una parte finita $A_o \cup H_o$ de $A \cup H$:

$$A_o \cup H_o \subset A_o \cup H,$$

$$(-\beta) \in C_n(A_o \cup H)$$

Esto significa que

β es refutable en $\langle \mathcal{L}', C_n , A_o \cup H \rangle$;

luego

β es refutable en $\langle \mathcal{L}, C_n, A_o \rangle$

esto es $(-\beta) \in C_n(A_o)$,

luego $(-\beta) \in C_n(A)$,

lo que prueba que β es refutable en $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, C_n, A \rangle$.

Supondremos entonces que A es finito.

En este caso sabemos que existe un modelo semántico $\mathcal{M}$ para la teoría $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, C_n, A \rangle$ en un conjunto J (numerable además) tal que, para cada fórmula β irrefutable en $\mathcal{T}$, β es satisfactible en $\mathcal{M}$. Esto es $\beta_{\mathcal{M}, v} = V$ para alguna valuación v.

Será suficiente probar que $\mathcal{M}$ puede ser extendido a un modelo $\mathcal{M}'$ para la teoría $\mathcal{T}'$ y la conclusión "β es satisfactible en $\mathcal{M}'$", resultará inmediatamente, pues

$$\beta_{\mathcal{M}',v'} = \beta_{\mathcal{M},v} = V$$

(donde v' es una extensión de v).

De β satisfactible en $\mathcal{M}'$ resulta β irrefutable en $\mathcal{C}' = \langle \mathcal{L}', C_n, A \cup H \rangle$ pues $\beta_{\mathcal{M}',v'} = V$, implica $(-\beta)_{\mathcal{M}',v'} = \Lambda$ para algún v', de donde $(-\beta) \notin C_n(A \cup H)$.

Debemos probar entonces que $\mathcal{M}$ puede extenderse a un modelo $\mathcal{M}'$ para $\mathcal{C}'$. Con este objeto clasifiquemos los funtores de $\mathcal{L}'$ que no están en $\mathcal{L}$ en dos clases:

(A) Los funtores f_ξ en la sucesión de la hipótesis (3).

(B) Los restantes funtores.

Observación: A los predicados y funtores de $\mathcal{L}'$, ρ, φ, que son también predicados de $\mathcal{L}$ asignemos las funciones $\rho_{\mathcal{M}'} = \rho_{\mathcal{M}}$, $\varphi_{\mathcal{M}'} = \varphi_{\mathcal{M}}$.

Asignaremos a los funtores φ en (B), funciones $\varphi_{\mathcal{M}'}$ de igual número de argumentos, arbitrarias, fijas.

Para los funtores f_ξ en (A) definiremos las correspondientes funciones recursivamente, de modo de hacer "verdaderas" todas las fórmulas de la sucesión H.

Supongamos que para todo ordinal $\eta < \xi < \xi_0$ está definido f_η ;vamos a definir f_ξ :

consideremos la fórmula α_ξ; esta fórmula contiene:

(a) algunos predicados ρ a los que corresponde la función $\rho_{\mathcal{M}'} = \rho_{\mathcal{M}}$;

(b) algunos funtores φ de la clase (B) a los que corresponden funciones $\varphi_{\mathcal{M}'}$;

(c) algunos funtores de $\mathcal{L}$ a los que corresponde $\varphi_{\mathcal{M}'} = \varphi_{\mathcal{M}}$

(d) funtores f_η con $\eta < \xi$, para los que suponemos ya definidas las funciones $f_{\eta\mathcal{M}'}$ (por hipótesis (3) α_ξ no puede contener funtores f_η con $\eta \geq \xi$).

De acuerdo con (a),(b),(c),(d), está bien definida (una vez definidos los funtores f_η con $\eta < \xi$) la función $\alpha_{\xi,\mathcal{M}'}$ correspondiente a α_ξ.

Si v es una valuación, $v \in J^V$, tal que

$$(1)\qquad \begin{aligned} v(x_\xi) &= j \\ v(x_{\xi_1}) &= j_1 \\ &\text{------} \\ v(x_{\xi_{m_\xi}}) &= j_{m_\xi} \end{aligned}$$

$$\alpha_{\xi,\mathcal{M}',v} = \alpha_{\xi,\mathcal{M}'}(j, j_1, \dots, j_{m_\xi})$$

Para definir $f_{\xi,\mathcal{M}'}$ queremos que $f_{\xi,\mathcal{M}'}$ sea tal que

$$((\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi) \to \alpha'_\xi)_{\mathcal{M}',v} \equiv \bigvee$$

esto es que,

$$(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)_{\mathcal{M}',v} \to \alpha'_{\xi,\mathcal{M}',v} = \bigvee$$

Para que se dé ésto debemos sólo cuidar que no se presente el caso

$$(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)_{\mathcal{M}',v} = \bigvee \qquad \text{y} \qquad \alpha'_{\xi,\mathcal{M}',v} = \bigwedge$$

Veamos cómo se define $f_{\xi,\mathcal{M}'}$ para evitar este caso.

En primer lugar, para la valuación (1),

(2) $(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)_{\mathcal{M}',v} = \bigcup_{j \in J} \alpha_{\xi,\mathcal{M}'}(j, j_1, j_2, \dots, j_{m_\xi})$,

es uno de los valores $\bigwedge$, $\bigvee$.

i) Si $(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)_{\mathcal{M}',v} = \bigwedge$, haremos, $f_{\xi,\mathcal{M}'}(j_1, j_2, \dots, j_{m_\xi})$ igual a un elemento fijo arbitrario de J.

ii) Si $(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)_{\mathcal{M}',v} = \bigvee$, en cuyo caso por (2) existe un $j_0 \in J$ tal que $\alpha_{\xi,\mathcal{M}'}(j_0, j_1, j_2, \dots, j_{m_\xi}) = \bigvee$, haremos

$$f_{\xi,\mathcal{M}'}(j_1, \dots, j_{m_\xi}) = j_0$$

Observación: 1) Si α_ξ no contiene ocurrencias libres de x_ξ se define $f_{\xi,\mathcal{M}'}$ arbitrariamente.

2) f_0 se define con el mismo procedimiento anterior.

Por inducción transfinita, se puede afirmar que para todos los funtores f_ξ $(0 \leq \xi < \xi_0)$, las funciones correspondientes $f_{\xi,\mathcal{M}'}$ están bien definidas,

Veamos que todas las fórmulas de H son verdaderas en la interpretación $\mathcal{M}'$;

en efecto, si

$$(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)_{\mathcal{M}',v} = V$$

Es

$$f_{\xi,\mathcal{M}'}(j_1, j_2, \ldots, j_{m_\xi}) = j_0,$$

donde j_0 es tal que

$$\alpha_{\xi,\mathcal{M}'}(j_0, j_1, \ldots, j_{m_\xi}) = V$$

Pero esta última expresión no es sino $\alpha'_{\xi,\mathcal{M}',v}$

donde α' es una substitución generalizada de x_ξ por

$$f_\xi(x_{\xi_1}, x_{\xi_2}, \ldots, x_{\xi_{m_\xi}}),$$

luego

$$(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)_{\mathcal{M}',v} \rightarrow \alpha'_{\mathcal{M}',v} = V \rightarrow V = V$$

Lo que nos dice que el caso $V \rightarrow \Lambda$ no puede presentarse en las fórmulas de H.

Observación: En el caso que x_ξ no presenta ocurrencias libres en α_ξ es evidente que $(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi) \rightarrow \alpha'_\xi = (\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi) \rightarrow \alpha_\xi$ es válida en cualquier realización.

La así definida extensión $\mathcal{M}'$, es un modelo para el conjunto H y también para el conjunto A de fórmulas, en cuanto es una extensión de un modelo $\mathcal{M}$ para A. Luego $\mathcal{M}'$

es un modelo para la teoría $\mathcal{T}' = \langle \pounds', C_n, A \cup H \rangle$.

Si β es una fórmula de $\pounds$ irrefutable en $\mathcal{T}$, β es también irrefutable en $\mathcal{T}'$ pues

$$\beta_{\mathcal{M}', v'} = \beta_{\mathcal{M}, v} = V,$$

para algún v' (precisamente una extensión de la valuación v que hace válida β en $\mathcal{M}$).

Lo que termina la demostración del Lema.

<u>TEOREMA 7: (Gödel - Malcev) Si la teoría $\mathcal{T} = \langle \pounds, C_n, A \rangle$ es consistente, tiene un modelo semántico $\mathcal{M}$ en un conjunto J de potencia menor o igual al máx $\{\aleph_0, \bar{\bar{A}}\}$. Además dada una fórmula irrefutable β, el modelo $\mathcal{M}_0$ en las condiciones anteriores, puede ser elegido de tal manera que β sea satisfactible en $\mathcal{M}$.</u>

DEMOSTRACION: Es suficiente probar el teorema bajo la hipótesis que la potencia del conjunto F de las fórmulas de $\pounds$ sea igual al máx $\{\aleph_0, A\}$. En efecto, la teoría $\mathcal{T}_0 = \langle \pounds_0, C_n, A \rangle$, donde $\pounds_0$ es un lenguaje conteniendo todos los signos que aparecen en A y, un conjunto infinito de variables individuales de potencia menor o igual que el máx $\{\aleph_0, \bar{\bar{A}}\}$ y los signos auxiliares y conectivos lógicos de $\pounds$, verifica evidentemente la condición que la potencia del conjunto F_0 de fórmulas de $\pounds_0$ es igual al máx $\{\aleph_0, \bar{\bar{A}}\}$. Como $\pounds$ es una extensión de $\pounds_0$, por el teorema 3, de la validez de la conclusión para $\mathcal{T}_0$ se sigue la validez de la conclusión del teorema para $\mathcal{T}$.

Podemos, pues, suponer que si $\aleph_\nu = \text{máx}\{\aleph_0, \bar{\bar{A}}\}$ es $\bar{\bar{F}} = \aleph_\nu$.

Vamos a considerar un nuevo lenguaje $\mathcal{L}'$ extensión de $\mathcal{L}$, obtenido por adjunción de una familia de potencia $\aleph_\nu$ de nuevos funtores.

$\mathcal{L}'$ se compone entonces de un alfabeto con los signos de $\mathcal{L}$ más $\aleph_\nu$ nuevos funtores.

Si F' es el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}'$

$$\bar{\bar{F}}' = \aleph_\nu + \aleph_\nu = \aleph_\nu .$$

Supondremos que entre los nuevos funtores agregados hay funtores de cualquier número de argumentos.

Consideremos todas las fórmulas de $\mathcal{L}'$ de la forma $(\bigvee_x \alpha)$; hay $\aleph_\nu$ de estas fórmulas.

Sea ω_ν el primer ordinal de potencia $\aleph_\nu$, y consideremos bien ordenado el conjunto de dichas fórmulas en una sucesión:

$$(\bigvee_{x_\xi} \alpha_\xi); \quad 1 \leq \xi < \omega_\nu$$

Construiremos por el siguiente proceso recursivo una sucesión de funtores f_ξ de $\mathcal{L}'$ y una sucesión de fórmule α'_ξ .

1) Sean $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,m_1}$ las variables libres de α_1, excepto la variable x_1 que puede o no aparecer como variable libre en α_1.

Sea f_1 un funtor de $\mathcal{L}'$ y no de $\mathcal{L}$ de m_1 argumentos que no aparezca en la fórmula α_1.

Designamos por α'_1 una substitución generalizada del término $f_1(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,m_1})$ en lugar de la variable x_1 en α_1.

2) Sean $x_{2,1}$, $x_{2,2}, \ldots, x_{2,m_2}$ las variables libres de α_2, con excepción de la variable x_2 que puede o no tener ocurrencias libres en α_2.

Sea f_2 un funtor de $\mathcal{L}'$ y no de $\mathcal{L}$ de m_2 argumentos, distinto de f_1 y que no aparezca en las fórmulas α_1 y α_2.

ξ) Sean $x_{\xi,1}$, $x_{\xi,2}, \ldots, x_{\xi,m_\xi}$ las variables libres de α_ξ, a excepción de la variable x_ξ que puede o no tener ocurrencias libres en α_ξ.

Sean f_ξ un funtor de $\mathcal{L}'$ y no de $\mathcal{L}$ de m_ξ argumentos, distinto de todo funtor f_η con $\eta < \xi$ ya considerado antes y distinto de todos los funtores que aparecen en las fórmulas α_η con $\eta < \xi$.

....

Tenemos así

1) Una sucesión transfinita de fórmulas

$$H = \{ (\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi) \to \alpha'_\xi \mid 1 \leq \xi < \omega_\nu \}$$

2) Una sucesión transfinita de funtores (f_ξ), $1 \leq \xi < \omega_\nu$ bien definidos.

Consideremos la nueva teoría $\mathcal{T}' = \langle \mathcal{L}', C_n, A \cup H \rangle$.

Por el Lema de Hasenjäger de la consistencia de la teoría $\mathcal{T} = \langle \mathcal{L}, C_n, A \rangle$ se sigue la consistencia de la teoría $\mathcal{T}'$ pues las sucesiones 1) y 2) están en las condiciones de la hipótesis del citado Lema.

Sea L' el álgebra de Lindenbaum de la teoría $\mathcal{T}'$ y S' el espacio de Stone del álgebra de Boole L'. Sea h_o el isomorfismo de Stone de L' sobre el cuerpo de todos los conjuntos abiertos-cerrados de S'.

Veamos que, en este caso, h_o conserva las siguientes uniones infinitas:

$$\bigcup_{\tau \in T} |\alpha_{\xi,\tau}| = |(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)| \ .$$

Sabemos que para que h_o conserve uniones infinitas es necesario y suficiente que éstas no sean esencialmente infinitas.

Sea $\tau_o = f_\xi\ (x_{\xi,1}, x_{\xi,2}, \dots, x_{\xi,m_\xi})$ y $\alpha'_\xi = \alpha_{\xi,\tau_o}$ una substitución generalizada de la variable x_ξ por el término τ_o. Puesto que

$$((\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi) \rightarrow \alpha_{\xi,\tau_o}) \in H \ ,$$

$$|(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi) \rightarrow \alpha_{\xi,\tau_o}| = V,$$

de donde

$$|(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)| \rightarrow |\alpha_{\xi,\tau_o}| = V$$

Esto es

i) $$|(\bigcup_{x_\xi} \alpha_\xi)| \leq |\alpha_{\xi,\tau_o}|$$

y como

ii) $$|\alpha_{\xi,\tau_o}| \leq \bigcup_{\tau \in T} |\alpha_{\xi,\tau}| \ ,$$

resulta de i) y ii):

$$|\alpha_{\xi,\tau_o}| = \bigcup_{\tau \in T} |\alpha_{\xi,\tau}|$$

Aplicando las fórmulas de De Morgan se prueba que las intersecciones correspondientes a los cuantificadores no son esencialmente infinitas.

Si β es una fórmula irrefutable en $\mathcal{G}$ ella es también irrefutable en $\mathcal{G}'$, luego

$$|\beta| \neq \Lambda$$

esto es:

$$h_o(|\beta|) \neq \emptyset.$$

Tomando $x_o \in h_o(|\beta|)$, definiremos un homomorfismo h de L' en un álgebra de Boole de 2 elementos $\wedge$, $\vee$, en la forma siguiente:

$$h(|\alpha|) = \begin{cases} \vee \text{ si } x_o \in h_o(|\alpha|) \\ \wedge \text{ si } x_o \notin h_o(|\alpha|) \end{cases}$$

h conserva todas las uniones e intersecciones infinitas como es evidente.

Sea ahora $\mathcal{M}'$ la realización canónica de $\mathcal{L}'$ determinada por $A \cup H$ y h.

$\mathcal{M}'$ es un modelo semántico para la teoría $\mathcal{T}'$ y β es por la definición de h, satisfactible en $\mathcal{M}'$.

Tomando v como la valuación canónica

$$\beta_{\mathcal{M}',v} = h(|\beta|) = \vee$$

Si $\mathcal{M}$ es un modelo obtenido restringiendo $\mathcal{M}'$ al lenguaje $\mathcal{L}$, entonces

$$\beta_{\mathcal{M},v} = \beta_{\mathcal{M}',v} = \vee,$$

por consiguiente, en este modelo $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$, β es satisfactible.

Observamos finalmente que tanto $\mathcal{M}'$ como $\mathcal{M}$ son modelos en la clase T de términos de $\mathcal{L}'$ y por tanto

$$\overline{\overline{T}} \leq \overline{\overline{F'}} = \aleph_\nu = \text{máx}\left\{ \aleph_0, \overline{\overline{A}} \right\}.$$