

1

RAUL A. CHIAPPA

**PALABRAS CIRCULARES EQUILIBRADAS
GRAFOS ADJUNTOS**

1982

INMABB - CONICET
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE MATEMATICA DISCRETA (*)

N° 1

PALABRAS CIRCULARES EQUILIBRADAS

GRAFOS ADJUNTOS

Raúl A. Chiappa

INMABB - CONICET

1982

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I - SUCESSIONES (h,m)-EQUILIBRADAS	
1 - Planteamiento del problema	7
2 - Grafos $G_{h,p}$	10
3 - Reseña histórica del problema	13
CAPITULO II - CIRCUITOS EULERIANOS DE $G_{h,p}$	
1 - Algoritmo para la determinación de los circuitos eulerianos de $G_{h,p}$	22
2 - Método recurrente	30
3 - Aplicaciones	31
CAPITULO III - GRAFOS ADJUNTOS	
1 - Definición y observaciones básicas	36
2 - Propiedades	37
3 - Conexidad y adjunción	40
CAPITULO IV - CARACTERIZACION DE GRAFOS ADJUNTOS	
1 - Relación de adjunción	43
2 - Caracterización de grafos adjuntos	45
3 - Ejemplo	50
4 - Adjuntos de multigrafos particulares	52
CAPITULO V - GRAFOS ADJUNTOS Y HOMOMORFISMOS DE GRAFOS	
1 - Homomorfismo de grafos. Propiedades generales	58
2 - Homomorfismo y adjunción	59
3 - Homomorfismo inicial (final)	60
4 - Isomorfismo entre G y G^*	63

CAPITULO VI - GRAFOS (k,j) -ADJUNTOS Y GRAFOS k -ADJUNTOS

1 - Definiciones y observaciones básicas	66
2 - Ejemplos y propiedades	68
3 - Grafos k -adjuntos	70

CAPITULO VII - GRAFOS ADJUNTOS DE GRADO n Y MULTIGRAFOS
CONDICIONADOS

1 - Cápsula adjunta	76
2 - Grado de adjunción	77
3 - Grafos orientados hamiltonianos. Condición necesaria	79
4 - Multigrafos condicionados	81
5 - Inmersión de un grafo en un grafo adjunto	83

CAPITULO VIII - GRAFOS ADJUNTOS HAMILTONIANOS
(CASO NO ORIENTADO)

1 - Adjuntos de multigrafos no orientados	90
2 - Grafos adjuntos hamiltonianos	94

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	103
----------------------------------	-----

INDICE ALFABETICO DE AUTORES CITADOS	125
--	-----

INTRODUCCION.

Este trabajo consta de dos partes. La primera de ellas (Cap. I y II) está dedicada a un interesante problema de índole combinatorio que se presenta en contextos de naturaleza muy diversa y la segunda a la noción de grafo adjunto. Presenta modificaciones de poca importancia respecto de (127).

El problema consiste en la determinación de las "palabras de longitud mínima" que contiene a todas las "palabras de longitud m " en un alfabeto de h letras. En virtud de sus características y aplicaciones es conocido como "problème des mots circulaires et équilibrés" (46) o "teleprinter's problem" (95). Los respectivos Capítulos IX de Hall (55) y van Lint (98) se refieren a este problema.

En el Capítulo I, lo planteamos y damos una reseña histórica. Una adecuada algebrización en términos de congruencias del grafo utilizado por Good (10) y de Bruijn (9) para estudiarlo nos permite dar en el Capítulo II un algoritmo para determinar cada una de sus soluciones o, equivalentemente, cada uno de los circuitos eulerianos del grafo asociado. Damos también un método recurrente que permite construir sólo algunas de las soluciones y ejemplificamos aplicaciones de los procedimientos propuestos.

El problema será estudiado en un grafo finito, orientado, adjunto, con características particulares. Por ese motivo, y aún cuando el carácter de adjunto no interesa explícitamente en el tratamiento que haremos del problema, fuimos llevados a estudiar el concepto "grafo adjunto" al que está dedicada la segunda parte del trabajo.

Si bien el problema en cuestión nos indujo al estudio de grafos adjuntos orientados, haremos algunas referencias también a los adjuntos no orientados. Señalemos al respecto que en Capítulo VIII reproducimos parte de (122) en donde hemos visto que ambos conceptos están estrechamente ligados. Pese a ésto hay entre ellos diferencias esenciales, algunas de las cuales indicaremos oportunamente.

Según Hemminger y Beineke (119) el "paso al grafo adjunto" es probablemente la más interesante de las transformaciones definidas en los grafos y seguramente la más estudiada. Ella permite describir la relación de adyacencia de aristas (de consecutividad de arcos) del multigrafo de partida mediante la adyacencia (precedencia) de vértices de su adjunto, y traducir canónicamente problemas y nociones relacionados con aristas (arcos) a otros vinculados con vértices.

Para el caso no orientado la noción de grafo adjunto fue introducida por Krausz (8) en 1943 con el objeto de dar una nueva demostración de cierto resultado de Whitney (4) sobre isomorfismo de grafos, finitos, no orientados, carentes de bucles.

Posteriormente, diversos autores la han estudiado y generalizado (de diferentes formas) bajo nombres muy diversos; entre otros los de: "line-graph" (37), "interchange-graph" (32), "derived-graph" (52), "graphe représentatif des arêtes" (71), "covering graph" (56) y "graphe adjoint"(76).

Una noción similar fue estudiada para el caso de multigrafos orientados carentes de bucles por Harary-Norman en 1960 bajo el nombre "line-digraph" (26) y en forma independiente con el de "graphe perspective" por Heuchenne (38) en 1964 para multigrafos cualesquiera. Con anterioridad, en 1946, y para el caso de multigrafos 2-regulares, la operación de determinar el grafo adjunto había sido designada "doubling" por de Bruijn (9) y utilizada para evaluar el número de soluciones que admite el problema que consideramos en los Cap. I y II, si $h=2$. Con el mismo objeto fue utilizada para el caso general en (14).

Además y usando algunos de los resultados de (12),(14) fue aplicada por Kasteleyn (34),(56), para determinar el número de caminos hamiltonianos de ciertas configuraciones de interés en física. Por otra parte fue empleada implícitamente por Yoeli (33) y Lempel (80) para demostrar la existencia de soluciones en un problema que interesa para el diseño de circuitos y se la ha indicado como útil para el estudio de cuestiones atinentes a distancias (50).

Otros nombres dados al "grafo adjunto" son los de "arc-digraph" (65), "line-graph" (50), "edge-digraph" (95), "covering-graph" (56), "grafo commutato" (44), "graphe adjoint" (71), "derived-digraph" (52).

Para estudiar la relación de consecutividad entre los arcos de un grafo en vez de la noción de grafo adjunto puede recurrirse a la de "arc-graph representation" introducida en 1974 por Rheinboldt y Mesztenyi (99), quienes la aplican en la LU descomposición de una matriz rala.

Una extensión del concepto de grafo adjunto distinta de las que consideramos en Cap. VI y VII es la introducida por Cantor y Dimsdale (66) bajo el nombre de "vertex-dual graph".

Por otra parte una noción que refleja no sólo la consecutividad sino también la adyacencia de los arcos de un grafo es la estudiada por Hemminger y Klerlein (116). Ver también Klerlein (109) y Muracchini y Ghirlanda (45).

Digamos de paso que según los correspondientes comentarios la noción estudiada en (112), (117), (129) es similar a la de adjunción pero excluye la representación de los eventuales circuitos de G .

Por otra parte, procediendo por analogía con el caso no orientado Chartrand y Stewart (48) introdujeron el concepto "grafo total $T(G)$ del grafo G ". De su definición resulta que G y su adjunto son subgrafos de $T(G)$.

En el Capítulo III definimos grafo adjunto y damos algunas de sus propiedades básicas. En el Capítulo IV incluimos la caracterización de los grafos adjuntos que comunicamos en la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina realizada en Bahía Blanca en 1968 y vemos su equivalencia con otras. Dicha caracterización (4.2.1) es utilizada para deducir las correspondientes a los adjuntos de multigrafos con algunas características particulares, entre ellas la de los adjuntos hamiltonianos, que hemos publicado en 1975 en *Mathematica Japonicae* (104). En el Capítulo V deducimos relaciones entre los conceptos grafo adjunto y homomorfismo de grafos y en particular la conocida condición necesaria y suficiente para que un multigrafo orientado conexo sea isomorfo a su adjunto. En el Capítulo VI se introduce la noción de "grafo (k, j) -adjunto" ($k > j \geq 0$) que para $j = k-1$ diremos k -adjunto, y se dan propiedades que extienden algunas de las vistas en el Capítulo III. Se ve que el k -adjunto de G coincide con el que se obtiene aplicando a partir de G , k veces el operador de adjunción y se estudian los k -adjuntos carentes de entradas y de salidas (6.3.6). En el Capítulo VII estudiamos los "grafos adjuntos de grado n " y hacemos una breve referencia a los "multigrafos condicionados". Ambas nociones las introdujimos en 1968 en la comunicación efectuada en la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina y están ligadas con la caracterización de los grafos adjuntos que dimos en esa oportunidad (77). El concepto de grafo adjunto de grado n y la caracterización de adjuntos hamiltonianos del Capítulo IV nos permiten dar una condición necesaria para que un multigrafo orientado sea hamiltoniano (7.3.3 y 7.3.4). Esta condición necesaria se traduce en un algoritmo definido sobre la matriz de precedencia del grafo a estudiar. Los multigrafos condicionados (ciertas sucesiones de arcos no son permitidas) se muestran útiles para analizar problemas en los cuales la "consecutividad" de un par de arcos depende no sólo del hecho de ser el extremo final de uno de ellos coincidente con el extremo inicial del otro. Damos además dos métodos mediante los cuales un grafo orientado puede "sumergirse" en uno adjunto, que varía con el procedimiento utilizado, y es optimal en cierto sentido que depende del método en cuestión. El primero de ellos es consecuencia inmediata de lo vis

to en los dos primeros párrafos de este capítulo y el otro está inspirado en un trabajo de Richards (58).

En el Capítulo VIII hacemos uso explícito de la correspondencia entre los conceptos de grafo adjunto en el caso orientado y en el no orientado, que publicamos en 1979 en Rendiconti di Matematica (122). De las nociones e-adjunto y v-adjunto consideradas allí sólo usaremos la de v-adjunto en el presente trabajo. La indicada correspondencia (8.1.2) nos permitirá dar una caracterización intrínseca, es decir sin referencia explícita al multigrafo de partida, de los v-adjuntos hamiltonianos (8.2.5).

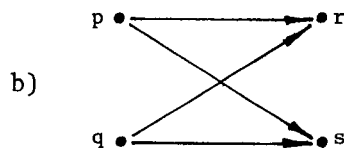
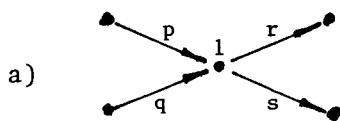
La utilidad del "paso al grafo adjunto" se manifiesta cuando se deben considerar restricciones que dependen del par de arcos consecutivos (aristas adyacentes).

Tal el caso de problemas estudiados sobre el grafo que define una red (vial, telefónica, etc.) y en los cuales la posibilidad (tiempo, costo, etc.) de pasaje de un tramo a otro depende del par de tramos considerados y no sólo del hecho de incidir ambos en un mismo punto (nudo vial, centro de comunicación, etc.).

En particular, una cuestión del tipo indicado y ligada con un problema ferroviario (el de optimizar el tiempo necesario para ensamblar los vagones que deben componer un tren) llevó a Zelinka (101) a considerar el "grafo adjunto del grafo polar" asociado al grafo no orientado que define la red ferroviaria en la cual se presenta el problema. La noción estudiada por Zelinka puede reencontrarse con la nuestra de "multigrafo condicionado".

Otros numerosos y variados problemas en los cuales (según sea el esquema representativo adoptado) pueden presentarse situaciones del tipo indicado más arriba son los vinculados a problemas de organización, planificación o ejecución de un conjunto de tareas entre las cuales es necesario respetar ciertos requerimientos de precedencia, prioridad, preferencia, etc.

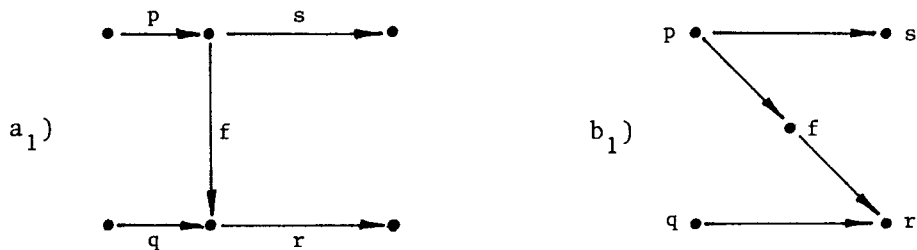
Más precisamente, para representar: "Las tareas r,s, pueden comenzar una vez finalizadas las tareas p,q, pero no antes" es factible elegir cualquiera de los esquemas siguientes:



Pero, si por ejemplo, el comienzo de las tareas r, s , exige la adaptación de ciertos elementos utilizados en la ejecución de las tareas p, q , y los tiempos de adaptación correspondientes deben ser considerados, será preferible utilizar el esquema b) (pues permitirá asociar a cada arco $(x,y) \in \{p,q\} \times \{r,s\}$ el tiempo t_{xy}).

Por otra parte, dada una relación de precedencia entre tareas no siempre es posible adoptar un esquema representativo del tipo a), en el cual hay correspondencia biyectiva entre arco y tarea. Así por ejemplo, si para realizar la tarea s sólo fuera necesario la finalización de la tarea p , los esquemas dados introducen restricciones ajenas al problema y deben ser modificados. En este caso si se adopta el esquema b) la modificación necesaria para representar la nueva situación es inmediata, basta con su primir el arco (q,s) ; en cambio para representarla según el esquema a) es necesaria una modificación más profunda, debe ser introducida una "ta rea ficticia" y desdoblado el vértice 1.

La nueva situación, incluida la tarea ficticia f , puede ser representada por los esquemas



El esquema b (b_1) es el grafo adjunto del que determina el esquema a (a_1).

El esquema de representación de un determinado problema P asociado a una relación de precedencia se llama "grafo tareas" si se adopta uno del tipo b) (cada tarea está representada por un vértice), y "grafo etapas" si se elige uno del tipo a) (cada tarea está representada por un arco).

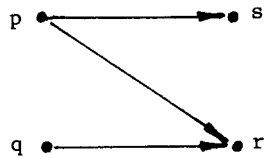
Es claro que todo problema de este tipo puede ser representado por un grafo tareas. Que también es posible representarlo por un grafo etapas si se admiten tareas ficticias fue visto por Richards (58).

El problema P admite un grafo etapas sin tareas ficticias si y sólo si su grafo tareas es grafo adjunto.

Según se observa en (39) cada uno de estos esquemas representativos presenta ventajas y desventajas, respecto del otro. Sin embargo si para un problema dado deben considerarse nuevas precedencias inmediatas, las mo-

dificaciones que deben introducirse son más fáciles de efectuar en un grafo tareas que en un grafo etapas.

En el Capítulo VII al considerar la inmersión de un grafo en uno adjunto volveremos sobre la dualidad que en el esquema



representa la incorporación del arco (q,s) o el agregado de un vértice que divida al arco (p,r) . Esto último corresponde al agregado de tareas ficticias, que es frecuentemente necesario para poder estudiar un determinado problema aplicando el Método PERT (Program Evaluation and Review Technique).

En lo que sigue nos referiremos siempre a multigrafos finitos y utilizaremos, en líneas generales, las notaciones y terminología de Berge (21) y Roy (76). Las pocas modificaciones efectuadas resultan claramente del contexto en el cual se utilizan.

CAPITULO I

SUCESIONES (h,m)-EQUILIBRADAS.

En el parágrafo 1 de este capítulo se plantea el problema de las "palabras circulares equilibradas", del que se da una reseña histórica en el 3. En el parágrafo 2 se definen los grafos $G_{h,p}$, ($p = m-1$), que serán utilizados en el Capítulo II para resolverlo, y se dan algunas de sus propiedades elementales.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Sea S un conjunto con h elementos ($h \geq 1$), a los que llamaremos "letras" o "cifras" (en base h), y S_m el conjunto de las sucesiones ("palabras") de longitud m ($m \geq 1$) que se pueden formar con ellos. Luego $|S_m| = h^m$.

Si $m \geq 2$, dados s_i, s_j en S_m y fijado r ($1 \leq r \leq m-1$) diremos que s_i *preyuxtapone* r a s_j y lo notaremos $s_i \xrightarrow{r} s_j$ si $s_i = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $s_j = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ con $y_t = x_{m-r+t}$, ($1 \leq t \leq r$).

Consideremos el

PROBLEMA A. Si $h \geq 2$, $m \geq 2$ determinar sucesiones s_1, s_2, \dots, s_k que contengan exactamente una vez todos los elementos de S_m y tales que

$$s_i \xrightarrow{m-1} s_{i+1} \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, k-1\}, \text{ y } s_k \xrightarrow{m-1} s_1.$$

Si \underline{s} es una de tales sucesiones, las k -sucesiones que se obtienen permutando circularmente los elementos s_i de \underline{s} también son sucesiones de ese tipo. Todas ellas serán consideradas equivalentes.

Así por ejemplo, si $S = \{a, b\}$ y $m=2$ la única solución (a menos de permutación circular) es s_1, s_2, s_3, s_4 donde $s_1 = (a, a)$, $s_2 = (a, b)$, $s_3 = (b, b)$, $s_4 = (b, a)$. Por yuxtaposición de las sucesiones s_i ($1 \leq i \leq 4$) la solución precedente puede representarse por a, a, b, b, a , o también, atendiendo al "orden circular" introducido por $s_4 \xrightarrow{1} s_1$ mediante $a, a, b, b, (a)$, o sus equivalentes: $a, b, b, a, (a)$; $b, b, a, a, (b)$; $b, a, a, b, (b)$,

En general, cada sucesión s_1, s_2, \dots, s_k solución del problema puede ser identificada por una sucesión $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}$ ($x_j \in S$, $1 \leq j \leq k+m-1$) tal que $s_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1})$ para $1 \leq i \leq k$. Se ve que $x_j = x_{k+j}$ si $1 \leq j \leq m-1$.

Convendremos que una sucesión de este tipo (y todas sus equivalentes por permutación circular) será representada por $x_1, x_2, \dots, x_k, (x_1)$ y denominada *sucesión (h,m)-equilibrada o palabra circular (h,m)-equilibrada*. También escribiremos a veces x_1, x_2, \dots, x_k si no hay lugar a confusión.

Por ejemplo si $S = \{a, b\}$ y $m=3$ las dos sucesiones (2,3)-equilibradas son: $a, a, a, b, a, b, b, b, (a)$; $a, a, a, b, b, b, a, b, (a)$.

Un problema sólo aparentemente más fuerte que el anterior es el siguiente:

PROBLEMA B. Dado S con h elementos ($h \geq 2$) y fijado m ($m \geq 2$) determinar sucesiones $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}$ de elementos de S tales que $x_j = x_{k+j}$ ($1 \leq j \leq m-1$) y cada elemento de S_r ($1 \leq r \leq m$) esté contenido bajo la forma $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r-1}$ ($1 \leq i \leq k+m-r$) exactamente h^{m-r} veces.

Es claro que toda solución del Problema B también lo es del Problema A. La recíproca resulta de lo siguiente: eliminando en cada palabra de S_p ($p \geq 2$) sus primeros j términos ($1 \leq j \leq p-1$) se obtiene una familia que contiene cada elemento de S_{p-j} exactamente h^j veces.

El problema A es trivial si $h=1$. Para $m=1$, si admitimos 0-preyuxtaposiciones sus soluciones son las permutaciones de los elementos de S . Con respecto a las soluciones del problema planteado cabe notar que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ es una sucesión equilibrada y $\pi: S \rightarrow S$ es una permutación, la sucesión $\bar{\pi}(x) = (\pi(x_1), \pi(x_2), \dots, \pi(x_k))$ también es equilibrada. En general x y $\bar{\pi}(x)$ no son equivalentes, ni aún en el caso en que π sea una permutación circular. Por ejemplo, si $\pi(a) = b$ se tiene $\bar{\pi}(a, a, b, b) = (b, b, a, a)$ que es equivalente con la de partida; en cambio $\bar{\pi}(a, a, a, b, b, b, a, b) = (b, b, b, a, a, a, b, a)$ no lo es. Por otra parte, no toda solución puede obtenerse a partir de una dada mediante permutaciones de los elementos de S . En efecto, si $h=2, m=4$ hay 16 soluciones y sólo una permutación distinta de la identidad.

Ordenadas lexicográficamente las 16 soluciones para $S = \{0, 1\}$ y $m=4$ son:

$s_1 = 0000100110101111(0)$	$s_9 = 0000110010111101(0)$
$s_2 = 0000100111101011(0)$	$s_{10} = 0000110100101111(0)$
$s_3 = 0000101001101111(0)$	$s_{11} = 0000110101111001(0)$
$s_4 = 0000101001111011(0)$	$s_{12} = 0000110111100101(0)$
$s_5 = 0000101100111101(0)$	$s_{13} = 0000111100101101(0)$
$s_6 = 0000101101001111(0)$	$s_{14} = 0000111101001011(0)$
$s_7 = 0000101111001101(0)$	$s_{15} = 0000111101011001(0)$
$s_8 = 0000101111010011(0)$	$s_{16} = 0000111101100101(0)$

Puede verificarse que intercambiando los símbolos 0,1, s_1 se transforma en s_{16} , s_2 en s_4 , s_3 en s_{15} , etc. y que cada una de las soluciones $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_8, s_{10}$ leída de derecha a izquierda coincide con una de las res tantes.

Además, cualquiera sea la solución del problema general, mediante "intercambio de secciones m-equivalentes" (coincidentes en sus m-1 primeras y en sus m-1 últimas letras) se obtiene una nueva solución.

Así en el ejemplo anterior, el intercambio de las secciones: 010011 y 01011 lleva de s_1 a s_6 , el de 0110 y 011110 de s_1 a s_2 y el de 0010 con 0011010 de s_1 a s_{10} .

En (105) se estudia (para el caso binario) cuántas soluciones pueden obtenerse por el método anterior a partir de una solución especial. En relación con esta idea pueden verse (35), (92), (110).

Digamos de paso que breves referencias al problema pueden hallarse en (21 - Cap. 17), (40 - Cap. 3), (71 - Cap. 11), (95 - Cap. 9) y que el mismo admite distintas modificaciones interesantes. En particular, y de acuerdo con lo indicado por de Bruijn (9), la variante del problema que resulta de aceptar sólo sucesiones x_1, x_2, \dots, x_m tales que $x_i \neq x_{i+1}$ admite un análisis similar al que efectuaremos. Además, Durup (53) indica posibles restricciones suplementarias que tienen interés en psicología.

Por otra parte, para ciertas cuestiones de química, biología o bioquímicas ligadas con largas cadenas de partículas cuyas propiedades dependen de la interacción de partículas próximas, la identificación de dichas cadenas con "palabras" permite simplificar su estudio y lleva a distintas extensiones del problema que nos ocupa (ver (107), (108)).

Del método utilizado por Good (10) para demostrar la existencia de soluciones resulta que en el problema planteado la exigencia $s_k \xrightarrow{m-1} s_1$ es superflua. Esta situación, que fue también notada por Korobov (15), hace que las sucesiones del tipo buscado pueden identificarse con lo que Korobov denomina "sistemas periódicos normales $\rho_m(h)$ ".

Las "sucesiones equilibradas" son también designadas "mots circulaires et équilibrés" (46), "de Bruijn sequences" (54), "de Bruijn cycle" (72), "cyclic sequence of letters" (40), "Ford sequences" (86), " $P_m(h)$ cycles" (14), "memory-wheels" (36), "ring sequences" (33), "Svoboda sequences" (25).

Si en el problema considerado se elimina la exigencia de contener todas las m-uplas se obtiene otro con importantes aplicaciones electrónicas, especialmente en conexión con el diseño de circuitos. En particular, la posibilidad de construir sucesiones binarias circulares con k m-uplas dis-

tintas ($1 \leq k \leq 2^m$) fue demostrado, entre otros, por Bryant, Heath y Killick (31) en forma algebraica y por Yoeli (33) utilizando implícitamente la noción de grafo adjunto. Ver también ((54) pág.192). El procedimiento se guiado por Yoeli fue extendido al caso general por Lempel (80) - ver 1.2.10.

2. GRAFOS $G_{h,p}$.

Con el objeto de estudiar el problema planteado convendremos en identificar cada uno de los elementos de S con un entero $x_j \in \{0,1,\dots,h-1\}$ que pensaremos también como cifra de un sistema de numeración en base h .

Así entonces, $s_i = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in S_p$ será identificada con el número (decimal)

$$i = x_1 \cdot h^{p-1} + x_2 \cdot h^{p-2} + \dots + x_{p-1} \cdot h + x_p.$$

También notaremos

$$i = (x_1, x_2, \dots, x_p).$$

De tal forma, fijados $h \geq 1$, $p \geq 1$, $s_i \in S_p$, $s_j \in S_p$ tendremos que

$s_i \xrightarrow{p-1} s_j$ si y sólo si $j \equiv h \cdot i + \alpha$ (módulo h^p), $\alpha \in S = \{0,1,\dots,h-1\}$.

Esto nos permitirá algebrizar el grafo introducido simultánea e independientemente por Good (10) y de Bruijn (9). (Ver pág. 15).

El grafo en cuestión puede identificarse para el caso h,m con el grafo

" $G_{h,p} = \langle X, \Gamma \rangle$ donde $p = m-1$ y $X = \{0,1,2,\dots,h^p-1\}$, $j \in \Gamma(i)$ si y sólo si $j \equiv h \cdot i + \alpha$ (mód. h^p), con $\alpha \in \{0,1,\dots,h-1\}$ ".

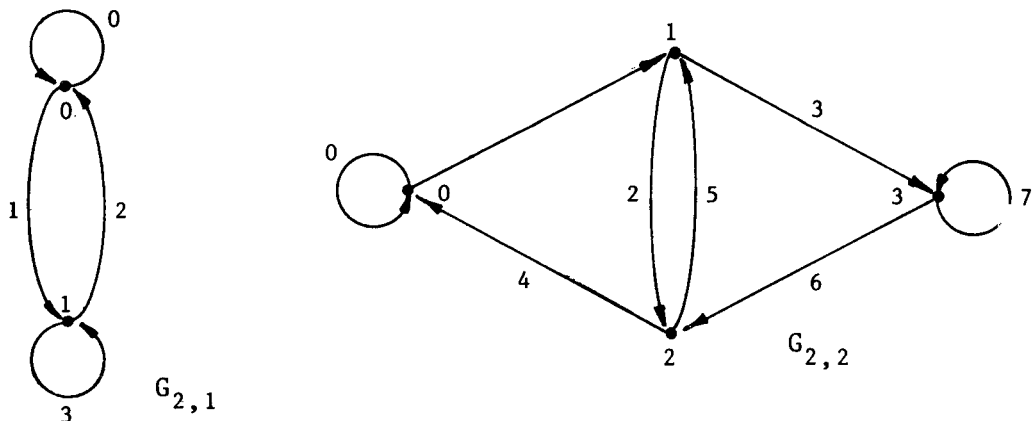
De la definición dada resulta que los vértices de $G_{h,p}$ están en correspondencia biyectiva con los elementos de S_p y que si i, j son vértices, $j \in \Gamma(i)$ si y sólo si i, j son de la forma $i = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p)$;

$j = (x_2, x_3, \dots, x_p, x_{p+1})$. Representaremos el arco $(i, j) = (x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1})$.

Así los arcos de $G_{h,p}$ están en correspondencia biyectiva con los elementos S_{p+1} y pueden también ser identificados numéricamente.

Por ejemplo, el conjunto de vértices de $G_{2,1}$ es $X = \{0,1\}$ y el de sus arcos es $U = \{0 = (0,0), 1 = (0,1), 2 = (1,0), 3 = (1,1)\}$. Análogamente $G_{2,2}$ tiene los vértices $0 = (0,0), 1 = (0,1), 2 = (1,0), 3 = (1,1)$, y los arcos $0 = (0,0,0), 1 = (0,0,1), 2 = (0,1,0), 3 = (0,1,1), 4 = (1,0,0), 5 = (1,0,1), 6 = (1,1,0), 7 = (1,1,1)$.

Ellos pueden ser representados por los siguientes esquemas:



El vértice i (resp. el arco i) de $G_{h,p}$ se dirá *de resto* α si y sólo si $i \equiv \alpha \pmod{h}$; es decir si y sólo si $i = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, \alpha)$ (resp. $i = (y_1, y_2, \dots, y_p, \alpha)$).

Todos los arcos de $G_{h,p}$ con extremo final \underline{x} tienen igual resto que el vértice \underline{x} y son congruentes módulo h^q , $1 \leq q \leq p$.

Notemos que de acuerdo con la definición dada si $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, h^{p+1}-1\}$ y $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots, h-1\}$ la relación $j \equiv h \cdot i + \alpha \pmod{h^{p+1}}$ puede interpretarse considerando que i, j son vértices de $G_{h,p+1}$ o bien que son arcos de $G_{h,p}$. Según sea el caso pensaremos en el camino de $G_{h,p+1}$ que determina el arco (i, j) o bien en el de $G_{h,p}$ compuesto por los arcos i, j (si $i=j$ se tiene un bucle en el primer caso, y en el segundo el camino que resulta de tomar dos veces consecutivas el bucle i).

Frecuentemente omitiremos la mención explícita $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots, h-1\}$ y en lugar de $j \equiv h \cdot i + \alpha \pmod{h^p}$ pondremos $j \equiv \Gamma(i/\alpha)$. Más generalmente, si $j \equiv h^r \cdot i + h^{r-1} \cdot \alpha_1 + \dots + h \cdot \alpha_{r-1} + \alpha_r \pmod{h^p}$ diremos que " j es el r -siguiente de i mediante los restos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ " y lo notaremos $j \equiv \Gamma(i/\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$.

Propiedades elementales de la familia de grafos $G_{h,p}$.

1.2.1. $G_{1,p}$ contiene un único vértice y un único arco. $G_{h,1}$ contiene h vértices, cada uno de los cuales es soporte de un bucle y cada par i, j de vértices es extremo de los arcos (i, j) ; (j, i) .

Así entonces cada $G_{1,p}$ y $G_{h,1}$ es grafo universal.

1.2.2. El vértice j es soporte de un bucle si y sólo si es de la forma $j = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$.

1.2.3. $G_{h,p}$ es h -regular ($d_i^- = d_i^+ = h$) y por lo tanto balanceado ($d_i^- = d_i^+$).

1.2.4. $G_{h,p}$ es fuertemente conexo. Más precisamente, cualesquiera sean los vértices i, j existe un camino elemental desde i hasta j y otro desde j hasta i , ambos de longitud menor o igual que p .

1.2.5. $G_{h',p}$ construido sobre un conjunto de $h' < h$ elementos de S es subgrafo de G .

1.2.6. Toda permutación $\pi: S \rightarrow S$ induce un automorfismo de $G_{h,p}$.

Yoeli (30) observó que en $G_{2,p}$ el único automorfismo no trivial es el definido por $x \rightarrow \bar{x}$ ($\bar{x}_i =$ complemento booleano de x_i); Wan y Liu (126) además de reencontrar este resultado demuestran que háy seis homomorfismos - dos a uno - de $G_{2,n} \rightarrow G_{2,n-1}$.

Por otra parte, del epimorfismo $D: G_{2,n} \rightarrow G_{2,n-1}$ estudiado por Lempel (69), (75) resulta, entre otras aplicaciones, un método recurrente para construir soluciones de nuestro problema.

Citaremos a continuación algunas propiedades de los grafos $G_{h,p}$ en las cuales interviene la noción de grafo adjunto que definiremos en el Capítulo III y relaciones entre dicha noción y la de homomorfismo de grafos que trataremos en el Capítulo V.

1.2.7. $G_{h,1}$ es adjunto del multigrafo cuyos h arcos son bucles con soporte en un mismo vértice y si $p \geq 2$, $G_{h,p}$ es adjunto de $G_{h,p-1}$.

1.2.8. Todo grafo $G_{h,p}$ admite circuito euleriano y circuito hamiltoniano.

1.2.9. Todo $G_{h,p}$ es imagen homomórfica de su grafo adjunto.

1.2.10. $G_{h,p}$ contiene circuitos simples (elementales) de longitud L cualquiera sea $1 \leq L \leq h^{p+1}$ ($1 \leq L \leq h^p$). (Lempel (80)).

Otros resultados que no interesan en la solución del problema que estudiamos pero que están estrechamente ligados con la configuración de los grafos $G_{h,p}$ pueden verse en (63), (67), (70), (73), (81), (89).

3. RESEÑA HISTORICA DEL PROBLEMA.

Damos a continuación una reseña histórica del problema. Para más detalles pueden verse Stein (29),(36), Barbut (46), de Bruijn (103).

Según Stein una antigua teoría del ritmo en la música de la India dió origen a reglas mnemotécnicas en sánscrito que están vinculadas con las soluciones del problema planteado. Posteriormente se lo encuentra ligado a temas muy diversos.

Así por ejemplo, en 1934, Martin (5) es llevado al problema, según dice, por cuestiones de dinámica, y en 1966 Durup utiliza en su tesis sobre psicología experimental (ver (53)) las sucesiones que nos ocupan con el objeto de planificar experiencias destinadas a grupos de pocos individuos que han de ser sometidos a numerosas pruebas. Las sucesiones en cuestión permiten determinar otras de "presentación de estímulos" que reúnen condiciones de equilibrio y aleatoriedad que compensan, adecuadamente, eventuales recursos mnemotécnicos.

En 1935, Popper en el Capítulo VIII de (6) (obra ampliada y reescrita en inglés en 1959 y traducida al español en 1962) las utiliza para dar una fundamentación axiomática del cálculo de probabilidades que evite algunas de las objeciones hechas a la propuesta por Richard von Mises. Con tal objeto propone reemplazar el axioma de aleatoriedad de von Mises por otro más débil, y en relación con éste considera las "alternativas m -libres con equidistribución" (sucesiones en las cuales no puede deducirse si un evento satisface o no cierta propiedad del hecho de saberlo para cada uno de sus m predecesores inmediatos). El período generador de una tal sucesión coincide con lo que hemos denominado "sucesión $(2,m+1)$ equilibrada".

Otro trabajo donde se las encuentra ligadas a probabilidades es el de Leach (27).

Aparecen también en Teoría de Números, vinculadas a "números normales" (en el sentido de Borel). A este respecto ver Good (10), Korobov (13),(15).

En particular Good se interesa en el problema con el objeto de demostrar la existencia, cualquiera sea m , de decimales periódicos con "normalidad de orden m " (toda sucesión de m dígitos tiene frecuencia asintótica 10^{-m}). Puesto que la base de numeración no es esencial Good da un método para base 2, fácilmente adaptable a cualquiera otra base, que le permite demostrar la existencia de tales números como consecuencia de la existencia de circuitos eulerianos en un grafo construido "ad hoc".

Good señala la importancia que la determinación de las sucesiones (h,m) -

equilibradas puede tener en la construcción de teleimpresores.

Por su parte Korobov utiliza los "sistemas $\rho_m(h)$ " en (13) para demostrar que las funciones αh^x están uniformemente distribuídas, y en (15) para probar teoremas referentes a las sumas de las "fractional parts" de αh^x , siendo α un irracional construído especialmente.

Estas sucesiones tienen interés además en aplicaciones tecnológicas relacionadas con cuestiones de control automático pues permiten disponer sobre la superficie de un cilindro marcas conductoras y marcas no conductoras de forma tal que con ellas pueda activarse de todas las formas posibles un conjunto de cabezas lectoras montadas solidariamente en un elemento giratorio (ver (21),(94),(95)). Pueden usarse también para ubicar datos en la memoria de una computadora o para asignarlos a ciertos clientes previamente codificados. Una aplicación de este tipo es la que se utiliza para identificar y almacenar automáticamente los informes que 64 estaciones pluviométricas del Valle del Río Damodar envían a un centro de cómputos. (25).

También aparecen en Teoría de Información ligadas a códigos (tipo Gray) ((95) Cap.12) y según indica Stein ya fueron utilizadas en 1882 por el Ingeniero Baudot para la transmisión de información codificada. Ver también Šimáně (121).

En varias de las aplicaciones indicadas está implícita la estrecha relación existente entre las sucesiones que nos ocupan (caso $h=2$) y los "feedback shift register", ampliamente tratados por Golomb (54). Para otras referencias ver (93),(124).

En (128) Golomb considera el reticulado que determinan ciertos conjuntos de sucesiones binarias, uno de los cuales está en correspondencia biunívoca con el de las que nos interesan.

En esencia, las cuestiones estudiadas con respecto a las sucesiones (h,m) -equilibradas han sido: 1) su existencia, 2) la determinación de su número, 3) la enunciación de métodos para construirlas.

EXISTENCIA.

La existencia de soluciones fue demostrada implícitamente, para el caso binario, en 1894 por Flye Sainte Marie (2) al determinar su número, reencontrado por de Bruijn (9) en 1946 en forma independiente; y para el caso general, por Martin (5) quien en 1934 indicó un algoritmo que permite

determinar una sucesión del tipo estudiado, cualesquiera sean h, m .

Aparte de estas demostraciones implícitas, la existencia fue demostrada directa e independientemente en 1946 por Good (10) y Rees (11).

La elegante demostración dada por Good utiliza el concepto de circuito euleriano. Considera un grafo cuyos vértices son los elementos de S_{m-1} y donde (a, b) es arco si y sólo si $a \xrightarrow{m-2} b$. Es inmediato que hay correspondencia biyectiva entre el conjunto de arcos de ese grafo y el de elementos de S_m y puede verse que cada circuito euleriano define una sucesión (h, m) -equilibrada y recíprocamente. Como el grafo es conexo y balanceado admite circuitos eulerianos, y de esto resulta la existencia de solución.

Por otra parte, el mismo problema es equivalente al de determinar circuitos hamiltonianos en el grafo cuyos vértices son los elementos de S_m y en el cual (a, b) es arco si y sólo si $a \xrightarrow{m-1} b$.

Sobre las afirmaciones precedentes volveremos al considerar la familia de los grafos $G_{h,p}$ ($p = m-1$).

En (54) Golomb observa que el grafo mencionado puede interpretarse como diagrama de estados de un proceso de Markov, y en relación con este concepto es aplicado por Dawson y Good (18).

A continuación del trabajo de Good, Rees da una demostración de la existencia de soluciones en forma algebraica. Para ello descompone el número $h = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$ en factores primos y demuestra que si se pueden determinar sucesiones (p_i, e_i, m) -equilibradas, $1 \leq i \leq s$, también es posible obtener una (h, m) -equilibrada. Completa la demostración dando un método que permite construir algunas sucesiones (p, m) -equilibradas, para p primo, utilizando propiedades de los cuerpos finitos.

NUMERO.

Como consecuencia de sus trabajos en circuitos telefónicos el Ing. K. Posthumus (de Philips Research Laboratories-Eindhoven) conjeturó que el número de sucesiones $(2, m)$ -equilibradas es 2^e con $e = 2^{m-1} - m$. Dicha hipótesis fue demostrada en 1946 por de Bruijn (9).

En realidad la cuestión relativa a la existencia y cantidad de soluciones que admite el caso $h=2$ había sido planteada en 1894 por de Rivière (1) y resuelta ese mismo año por Flye Sainte-Marie (2) en un trabajo que permaneció ignorado hasta hace poco tiempo. Al respecto ver (103), que incluye

reproducciones de (1),(2) y (9).

Según referencia de Stein, en 1957 Golomb y Welch (20) extendiendo una técnica de Gilbert dieron una nueva deducción del número en cuestión. En (54) Golomb lo deduce como consecuencia de un procedimiento que permite determinar todas las soluciones.

En 1951, van Aardenne-Ehrenfest y de Bruijn (14) dedujeron que el número de sucesiones (h,m) -equilibradas es $h^{-m}(h!)^e$ con $e = h^{m-1}$. Para esto utilizaron propiedades del grupo simétrico y la noción de grafo adjunto. El método seguido generaliza el de (9) y consiste en aplicar reiteradamente y a partir del grafo $G_{h,p}$ ($p = m-1$) una relación existente entre el número de circuitos eulerianos de un multigrafo regular y el de los que tiene su adjunto (ver 3.2.12).

El número en cuestión puede también hallarse mediante las siguientes proposiciones I), II), III):

I) (Th.5 de (14)). Sea G un multigrafo balanceado con n vértices y $T_x(G)$ el número de sus arborescencias cubrientes de raíz x . El número $E(G)$ de sus caminos eulerianos cerrados de primer arco a , $a \in U_x^+$, está dado por

$$E(G) = \prod_{i=1}^n (d_i^+ - 1)! \cdot T_x(G) .$$

La importante propiedad precedente reduce la dificultad de construir circuitos eulerianos a la de determinar arborescencias cubrientes y subyace en varios de los métodos dados para construir las soluciones buscadas. Permite además mediante un resultado de Tutte que citamos a continuación determinar el número de circuitos eulerianos mediante la evaluación de un determinante. Esta posibilidad había sido ya indicada para el caso $d_x^- = d_x^+ = 2$ por Tutte y Smith (7) sin recurrir al uso de arborescencias.

II) (Tutte (12)). El número de arborescencias cubrientes de un multigrafo G con raíz x_j está dado por el determinante de la matriz adjunta del elemento $k_{j,j}$ en la matriz $K(G) = (k_{i,j})$ definida por:

$$\begin{aligned} - k_{i,j} &= \text{número de arcos } (x_i, x_j) \quad \text{si } i \neq j \\ k_{i,j} &\text{ tal que } \sum_j k_{i,j} = 0 \quad \text{si } i = j. \end{aligned}$$

Tutte probó que si G es balanceado el número de arborescencias cubrientes con raíz x_j es independiente del vértice x_j . El mismo resultado, que es inmediato a partir de I), fue obtenido también por Orlin (120).

III) Si $B_{h,p}$ denota la matriz adjunta de un elemento $k_{j,j}$ en la matriz $K(G_{h,p})$ entonces:

$$\det. B_{h,1} = h^{h-2}$$

$$\det. B_{h,p} = h^{(h-1) \cdot h^{p-1}} \cdot h^{-1} \cdot \det B_{h,p-1} .$$

Así entonces $\det. B_{h,p} = h^{h^p} \cdot h^{-p-1} .$

El valor del determinante de referencia parece haber sido obtenido por primera vez en 1957 por Dawson y Good (18) en un trabajo relativo a procesos markovianos regulares y mediante el análisis del polinomio característico de cierta matriz. Un método similar fue seguido por van Lint (98) en 1974.

La disposición particular de las componentes no nulas en la matriz de precedencia de $G_{h,p}$, y por ende en la matriz $K(G_{h,p})$, nos permitió demostrar

III) utilizando solamente propiedades elementales de matrices y procediendo por inducción (ver (127)).

Observemos que III) puede deducirse también de I) y 3.2.12.

Por otra parte, en 1967 Knuth (57) dedujo - utilizando el mencionado resultado de Tutte - una relación entre el número de arborescencias cubrientes con raíz prefijada que admite el grafo adjunto de un multigrafo G y el de las que tiene G (ver 3.2.13). Aplicándola al caso de multigrafos regulares y utilizando la correspondencia entre arborescencias y circuitos eulerianos indicada en I) obtuvo una nueva deducción del número de soluciones buscadas.

Los precedentes resultados de Knuth y además el citado teorema de Tutte fueron demostrados mediante métodos combinatorios en 1978 por Orlin (120).

En 1979 Jackson y Goulden (123) reencuentran I) a partir de la función generadora de cierto tipo de sucesiones construídas sobre un alfabeto finito.

Por otra parte, el número de soluciones que admiten algunas variantes del problema en cuestión pueden verse en (9), (107), (108), (123).

CONSTRUCCION.

Según nuestras referencias, los algoritmos conocidos para la determinación de todas las sucesiones (h,m) -equilibradas son el dado por Korobov (15) en 1951 y el de Golomb (54) de 1967.

En la primera parte de su trabajo sobre "sistemas periódicos normales" ,

Korobov da dos métodos que permiten construir sólo algunas de tales sucesiones, y un tercer procedimiento que permite obtenerlas todas. En este último se reencuentra, con un lenguaje totalmente ajeno al de la Teoría de Grafos, la conocida correspondencia que liga a cada arborescencia cubriente de un multigrafo balanceado G con una familia de sus circuitos eulerianos. Korobov da un algoritmo para construir "sistemas especiales" (es decir, arborescencias) y uno que efectiviza la indicada correspondencia y permite determinar "sistemas periódicos normales" (es decir, circuitos eulerianos).

En el método propuesto por Golomb (ver (54) Cáp.VI) se utilizan "funciones preferencia P " tales que para cada $x \in S_{m-1}$ $P(x) = (P_1(x), P_2(x), \dots, P_h(x))$ es una reordenación de los elementos de $S = \{0, 1, \dots, h-1\}$. Se demuestra que dada una palabra $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S_m$ hay correspondencia biunívoca entre las sucesiones buscadas y las funciones preferencia tales que $P_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) = x_m$, y se indican métodos para obtener funciones de tal tipo. Además se demuestra para el caso binario (y se indica que es válido en general) cómo a partir de una sucesión $(h, m-1)$ -equilibrada asociada con la palabra $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ puede obtenerse una sucesión (h, m) -equilibrada asociada con $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)$.

El algoritmo que proponemos en el Capítulo II no exige la determinación previa de arborescencias ni procede en forma recurrente sobre m .

A continuación nos referiremos a algunos métodos que permiten determinar sólo algunas de las soluciones buscadas.

En particular merece destacarse el dado en 1934 por Martin, aplicable cualesquiera sean h, m . Con este método, a partir de la m -upla $(0, 0, \dots, h-1)$ (ó de la $(0, 0, 0, \dots, 0, 0)$) y por extensiones sucesivas puede determinarse una única sucesión (h, m) -equilibrada. La consideración de permutaciones en $\{0, 1, \dots, h-1\}$ permite, eventualmente, determinar nuevas soluciones.

ALGORITMO DE MARTIN (5).

Si $S = \langle 0, 1, 2, \dots, h-1 \rangle$ se elige $x_1 = x_2 = \dots = x_{m-1} = 0$, $x_m = h-1$ y se aplica reiteradamente y tanto como sea posible la siguiente regla.

Construída la sucesión x_1, x_2, \dots, x_r ($r \geq m$) se elige como x_{r+1} la mayor de las cifras de S tal que la m -upla $x_{r-m+2}, \dots, x_r, x_{r+1}$ sea distinta de todas las m -uplas x_i, \dots, x_{i+m-1} ya elegidas.

Cuando por aplicación de la regla precedente no sea posible extender la sucesión construída, se ha llegado a una sucesión (h,m) -equilibrada.

En 1935, Popper ((6) Apéndice IV) da para $h=2$ un algoritmo - hallado en colaboración con L.R.B.Elton - que coincide con el de Martin si se intercambian 0 y 1. Este método fue demostrado en forma independiente por Lesard (16) en 1951 como solución de un problema propuesto por Ungar, y en 1956 por Goodstein (17) utilizando congruencias. Esta misma idea fue utilizada también por Goodstein en 1970 (74) para obtener una solución cualesquiera sean h y m .

Korobov en 1950 (13) propone un algoritmo similar al de Martin y en 1951 (15), además del que permite determinar todas las soluciones, da otro que incluye como caso particular al de Martin.

Según indica Stein, la técnica de Martin fue reencontrada por Ford (19) en 1957 con motivo de trabajos vinculados con la distribución binomial de la Teoría de Probabilidades.

Una extensión de este trabajo permitió a Golomb deducir su método para construir todas las soluciones (ver (54) pág.133).

La función "feedback" del "shift register" que genera la solución obtenida por el método de Martin-Ford fue estudiada en 1970 por Fredricksen (72) y en 1971 por Mossige (82). En 1972 Fredricksen (86) modificó el algoritmo que lleva a dicha función dando otro que requiere menor cantidad de memoria. En (105) indica modificaciones para obtener otras soluciones.

Posteriormente, Fredricksen y Kessler (106), (115) dieron, también para el caso binario, un algoritmo que permite construir una sucesión distinta de la que se determina mediante el de Martin-Ford y que según se indica es "muy próxima" a la obtenida por Elder, Gray, Gurk y Rubinoff (22). Este método, así como el de Martin-Ford, requiere una capacidad de almacenaje del orden de 2^m bits, en tanto que los de (86) y (115) sólo necesitan una capacidad lineal en m .

El procedimiento utilizado en (106) y (115) fue extendido por Fredricksen y Maiorana (118) al caso no binario y aplicado para obtener una solución de nuestro problema en el caso general.

El procedimiento algebraico dado en 1946 por Rees (11) se basa en propiedades algebraicas de los cuerpos finitos y es, de acuerdo con lo indicado por de Bruijn (103), similar al propuesto en 1897 por Mantel (3).

Rees probó que si $f(x)$ es un polinomio de grado m irreducible sobre el cuerpo Z_p los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de $1/f(x)$

se repiten periódicamente en un ciclo de longitud $p^m - 1$, y que el conjunto de m términos consecutivos corresponde a todas las sucesiones de m términos que pueden formarse con los p símbolos $\{0, 1, \dots, p-1\}$, con excepción de aquélla con m ceros. Para obtener una solución de nuestro problema sólo resta intercalar, en lugar adecuado, un cero.

En 1965 Menon (43) analiza el problema también en términos de cuerpos finitos y extiende el conjunto de soluciones obtenidas por el método de Rees.

Stein y Barbut señalan, respectivamente, que en sus trabajos sobre códigos correctores de errores Friedland y Stern (24) y Camion (47) utilizaron la misma idea.

La teoría implícita en estos métodos es la misma que lleva a construir soluciones binarias mediante "linear shift registers". Al respecto pueden verse (54), (93), (98), (124), (130). En el Cap.9 de (93) se muestra como aplicarlas para la transmisión de información o para la generación de números aleatorios.

Un algoritmo distinto de los anteriores, válido para el caso general y que permite construir varias de las soluciones, fue dado en 1968 por Chiappa y Oklander (62). El método se basa en la yuxtaposición reiterada de palabras m -compatibles (p es m -compatible con q si las $m-1$ últimas letras de p coinciden (ordenadamente) con las $m-1$ primeras de q). Equivale a partir el conjunto de arcos de $G_{h, m-1}$ en clases con cuyos elementos pueden construirse caminos cerrados de características particulares y en elegir sus respectivos vértices iniciales y finales de forma que por extensiones sucesivas se determine uno de los circuitos eulerianos buscados.

Otro procedimiento que admite una interpretación similar (ver (98)) es el dado en 1971 por Roth (83). Para ambos resta como problema abierto el de determinar cuántas soluciones permiten determinar.

Por otra parte, utilizando la ya citada correspondencia entre circuitos eulerianos y arborescencias cubrientes van Lint (98) formuló un algoritmo de fácil implementación mediante el cual es posible construir

$((h-1)!)^{h^{m-1}}$ sucesiones (h, m) -equilibradas.

Observemos de paso que el uso de dicha correspondencia fue también indicada en forma explícita por Knuth ((68) Vol.I pág.375) y que las últimas palabras en ser incorporadas en el algoritmo de Martin determinan una arborescencia de raíz $(0, 0, \dots, 0)$.

Es claro que de cada camino hamiltoniano cerrado excluido su arco de U_x^+ se obtiene una arborescencia cubriente de raíz x . Así entonces de la correspondencia entre circuitos eulerianos de $G_{h,p}$ y hamiltonianos de $G_{h,p+1}$ y I) (pág. 16) resulta la posibilidad de enunciar un método para construir soluciones por recurrencia. Al respecto puede verse, Šimáně (121).

En 1960 Leach (27), en un trabajo de probabilidades y al estudiar las distribuciones límites de "sucesiones regulares", da un procedimiento que permite construir sucesiones $(h,m+1)$ -equilibradas a partir de sucesiones (h,m) -equilibradas.

Otros métodos recurrentes, válidos para el caso binario, son el de Magleby (35) y el de Lempel (75) reencontrado por otra vía en (124). En (75) se da además la fórmula recurrente de la función "feedback" del "shift register" que genera el circuito buscado.

En (6) Apend.IV y con el objeto de construir "sucesiones aleatorizadas mínimas", Popper da un procedimiento por el cual de cada sucesión $(2,j)$ -equilibrada puede obtenerse otra $(2,2^j)$ -equilibrada.

De la demostración del algoritmo que proponemos en el Capítulo II resulta un método recurrente sobre h .

También el citado algoritmo de Roth puede aplicarse en forma recurrente sobre h .

Utilizando la correspondencia entre arborescencias y circuitos eulerianos Fernández de la Vega y Guenoche (114) propusieron un método aleatorio para generarlos. Otro procedimiento aleatorio fue dado por Bovet (102). En ambos métodos puede suceder que ciertas elecciones de arcos deban ser anuladas posteriormente.

Por otra parte, en los ejercicios 12 a 17 de (36), Stein se refiere a un procedimiento propuesto en 1953 por Gilbert para el caso binario y utilizado en los Bell Telephone Laboratories. Este método es válido sólo para algunos valores de m (no lo es por ejemplo para $m=5$). Consiste en extender reiteradamente una palabra inicial. Según Stein esta técnica fue extendida en 1957 por Golomb y Welch (20).

CAPITULO II

CIRCUITOS EULERIANOS DE $G_{h,p}$.

En este capítulo daremos un algoritmo que permite determinar todos los circuitos eulerianos del grafo $G_{h,p}$, o lo que es equivalente, todas las soluciones del problema planteado en el capítulo anterior. Daremos además un método recurrente (sobre h) que permite determinar algunas de las soluciones buscadas.

1. ALGORITMO PARA LA DETERMINACION DE LOS CIRCUITOS EULERIANOS DE $G_{h,p}$.

El algoritmo que formularemos procede por sucesivas extensiones y concatenaciones de caminos simples. Cada una de las extensiones, excepto la última, se obtiene eligiendo en un vértice x una biyección $\varphi_x: U_x^- \longrightarrow U_x^+$ tal que la extensión de cada uno de los caminos simples cuyo arco final pertenece a U_x^- sea también un camino simple. Más precisamente, cada camino simple $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$ ($k \geq 1$) será extendido a un camino $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, u_{k+1}$, con $u_{k+1} \neq u_1$. En particular, si x es soporte del bucle a , $\varphi_x(a) \neq a$. Según veremos, el algoritmo permite elegir las biyecciones (tanto como vértices tenga $G_{h,p}$) de forma tal que cada una de ellas lleva necesariamente a un camino euleriano.

Observemos que el camino $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ ($m \geq 1$) se dirá *cerrado* (en x) si x es vértice inicial de u_1 y vértice final de u_m , *abierto* en caso contrario y que distinguiremos entre camino cerrado y circuito.

Dado un camino cerrado $\mu = u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ minimal, en el sentido que no se lo obtiene por concatenación reiterada de un subcamino cerrado, llamaremos *circuito* (determinado por μ) a la clase de todos los caminos que se obtienen de μ por permutación circular de sus arcos. Lo notaremos $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m, (u_1)$ y diremos que es de longitud m .

Un circuito se dirá simple, elemental, euleriano, hamiltoniano, si y sólo si lo es cada uno de los caminos cerrados que lo definen.

Notemos que la existencia de un camino cerrado en x sólo es posible si ninguna biyección $U_x^- \longrightarrow U_x^+$ ha sido elegida y que si nos limitamos a considerar caminos construídos mediante la elección de biyecciones en sus vértices, sólo podrá generarse un circuito $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, (u_1)$ si en ca

da uno de los vértices de los caminos cerrados que lo definen se ha elegido una biyección φ tal que $\varphi(u_j) = u_{j+1}$, $\varphi(u_k) = u_1$. En tal caso diremos que la última de las biyecciones elegidas ha "creado un circuito".

Las consideraciones anteriores nos llevan a los siguientes lemas, fundamentales para demostrar la eficacia de nuestro algoritmo.

LEMA I. En $G_{h,p}$, excepto los caminos definidos por bucles, no hay caminos cerrados con todos sus arcos (vértices) de igual resto.

En efecto, si $j_1 = (x_1, x_2, \dots, x_p, \alpha)$ podremos determinar un camino $j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1} = j_1$ con todos los arcos de igual resto, o sea con $j_{i+1} \equiv h \cdot j_i + \alpha \pmod{hp^{+1}}$ cualquiera sea $1 \leq i \leq k$, si y sólo si $j_1 = (\alpha, \alpha, \alpha, \dots, \alpha)$. La validez de lo afirmado para los vértices es inmediata pues el resto de un vértice coincide con el de cada uno de los arcos que lo tienen por extremo final.

LEMA II. Sean b un vértice de $G = \langle X, U \rangle$, B^+ y B^- dos conjuntos de h caminos arco-disjuntos dos a dos, tales que el conjunto de arcos iniciales de B^+ es U_b^+ y el de arcos finales de B^- es U_b^- . Si w es el número de caminos cerrados en b contenidos en $B^- \cup B^+$, por elección en b de una biyección adecuada se puede:

1. Si $0 \leq w \leq h-1$ extender, sin cerrar circuitos, los caminos de B^+ y los de B^- determinando otro conjunto de $h' \leq h$ caminos arco-disjuntos dos a dos.
2. Si $w = h$ extender los h caminos de manera que todos ellos pertenezcan a un mismo circuito.

DEMOSTRACION. Si $w = 0$, (b no es soporte de bucle) cualesquiera de las $h!$ biyecciones posibles de elegir en b satisfacen 1.

Si $w \neq 0$ notemos μ_i , $1 \leq i \leq w$, los caminos cerrados en b y $p_i(q_i)$ el arco inicial (final) de μ_i . Si $w \leq h-1$, la correspondencia $q_i \rightarrow p_{i+1}$, $1 \leq i \leq w-1$, $q_w \rightarrow u$ cualquiera sea $u \in U_b^+ - \bigcup_{i=1}^w p_i$ puede ser extendida a una biyección que satisface 1.

Si $w = h$ toda biyección en b lleva a la creación de circuitos y la definida por $q_i \rightarrow p_{i+1}$, $1 \leq i \leq h-1$, $q_h \rightarrow p_1$ satisface 2.

Antes de enunciar el algoritmo convendremos que excepto en la Etapa IV-b

sólo admitiremos biyecciones que no creen circuitos, que una vez elegida una tal biyección en el vértice x , éste se dirá "explorado", y que cada par de arcos u, v con $v = \varphi_x(u)$ determinarán un "camino de arcos ligados". Los distintos caminos construídos en cada instancia del algoritmo sólo se modificarán en otra aplicación del mismo.

El caso $h=1$ es trivial y no será considerado; para $p=1$ no es necesaria la Etapa II. La versión del algoritmo para el caso $h=2$ fue comunicada en la XXVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina realizada en 1978 en Santa Rosa (La Pampa). Para este caso sólo son necesarias las Etapas I, II, IV-b.

ALGORITMO.

ETAPA I. Se elige en cada vértice de $G_{h,p}$ de resto 0 (cero) una biyección del tipo indicado. La familia de los caminos simples determinados por los "arcos ligados" es notada F_1 . Si $p > 1$, se pasa a la Etapa II, si $p=1$ y $h > 2$ se pasa a la Etapa III, si en cambio $p=1$ y $h=2$ se aplica directamente la Etapa IV-b.

ETAPA II. Determinada F_i ($1 \leq i \leq p-1$) se elige en el vértice final de uno cualquiera de sus caminos una biyección del tipo indicado. La operación anterior se repite hasta que todo vértice extremo final de caminos de F_i haya sido "explorado". La nueva familia de caminos determinados por los "arcos ligados" será notada F_{i+1} . Si $i+1 < p$ se reitera la Etapa II para F_{i+1} ; si $i+1 = p$ y $h > 2$ se pasa a la Etapa III; si en cambio $h=2$ (sólo resta un vértice por "explorar") se pasa a la Etapa IV-b.

ETAPA III. Determinada $F_{j,p}$ ($1 \leq j \leq h-2$) se elige un vértice de resto j aún no "explorado" y en él una biyección del tipo indicado. La operación anterior se reitera hasta que todo vértice de resto j haya sido "explorado". La familia de caminos así obtenida será notada $F_{(j+1)p}$. Si $j+1 = h-1$ (sólo restan explorar vértices de resto $h-1$) se pasa a la Etapa IV, caso contrario se reitera la Etapa III aplicada a $F_{(j+1)p}$.

ETAPA IV. Determinada F_i ($i \geq (h-1)p$) si hay aún por lo menos dos vértices no "explorados" se aplica a), caso contrario (el único vértice por "explorar" es soporte del bucle de resto $h-1$) se aplica b):

a) Se elige un vértice aún no explorado cuyos anteriores inmediatos estén todos "explorados" y en él se elige una biyección del tipo indicado. Se obtiene así una nueva familia de caminos (simples) F_{i+1} y se reitera la Etapa IV.

b) Se elige en el vértice aún no explorado una biyección que extienda todos los caminos de F_i (son todos cerrados) creando un único circuito; y con esto termina el algoritmo.

OBSERVACIONES.

1) Los caminos de F_1 son obtenidos mediante la elección de una biyección adecuada en cada uno de los vértices de resto 0 y la concatenación de los caminos de "arcos ligados" determinados por esas biyecciones. Análogamente para los restantes F_i .

2) Por "camino de F_i " ($i \geq 1$) entendemos una sucesión de "arcos ligados" $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$, maximal en el siguiente sentido: $u_1(u_k)$ "no está ligado" por su vértice inicial (final).

3) Un camino de F_i ($1 \leq i \leq p-1$) extendido (por su vértice final) por un arco de resto distinto de 0 será subcamino final de un camino de F_{i+1} , pero extendido por un arco de resto 0 será subcamino inicial o intermedio de un camino de F_{i+1} (éste contendrá al menos dos caminos de F_i concatenados). En forma análoga, pero considerando además otros restos, puede razonarse para los caminos de F_i ($i \geq p$).

4) Dado un vértice $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_p)$, como cada arco de U_x^+ (resp. de U_x^-) es de la forma $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, \alpha)$ (resp. $(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_p)$) se tiene que un arco v es arco final de algún camino de F_i ($1 \leq i \leq p$) si y sólo si $v \equiv \Gamma(u/\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) \pmod{h^{p+1}}$ con u arco de resto 0 y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ distintos de 0. En particular el vértice final de cada camino de F_p carece del símbolo 0.

5) Al aplicar el algoritmo los restos $0, 1, \dots, h-1$ pueden ser elegidos en cualquier orden.

6) Todo circuito euleriano de $G_{h,p}$ puede ser construido por aplicación del algoritmo. Basta al efecto elegir en cada uno de los vértices la biyección que determina el circuito en consideración.

DEMOSTRACION DE LA EFICACIA DEL ALGORITMO. En lo que sigue, si $i, j \in S_{p+1}$, cada expresión $j \equiv h \cdot i + \alpha \pmod{h^{p+1}}$, $\alpha \in S$, será interpretada suponiendo que i, j son arcos de $G_{h,p}$.

Puesto que en la Etapa I sólo se exploran vértices de resto 0 y la biyección elegida en el vértice 0 (hay $(h-1) \cdot (h-1)!$ posibles) debe ser tal que el bucle 0 sea arco central de un camino simple de longitud tres, en virtud del Lema I podemos asegurar que F_1 carece de circuitos. Además, todos los caminos de F_1 son simples, arco disjuntos dos a dos y cada uno de ellos tiene arco inicial de resto 0 y arco final de resto distinto de 0. Por lo tanto, la Etapa I es realizable y útil para nuestro propósito.

Es necesario observar que F_1 (lo mismo otros $F_i, i \geq 1$) puede contener caminos cerrados, por ejemplo $2,0,1$ en $G_{2,1}$ ó $2,4,0,1$ en $G_{2,2}$.

La Etapa II sólo debe considerarse si $p > 1$ y en tal caso su factibilidad resulta de la iteración sobre i desde 1 hasta $p-1$ del siguiente par de proposiciones A,B.

PROPOSICION A. Cualquiera sea $1 \leq i \leq p-1$, si $j \in U_x^-$ es arco final de un camino de F_i , todo arco de U_x^- es arco final de algún camino de F_i .

DEMOSTRACION. De acuerdo con el procedimiento indicado (ver Observación 4) j es arco final de un camino de F_i ($1 \leq i \leq p-1$) si y sólo si $j \equiv \Gamma(u/\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$ para cierto arco u de resto 0 y cierta sucesión de restos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$, cada uno de ellos distinto de cero. Además si $j \in U_x^-$ todo arco $\underline{j} \in U_x^-$ es de la forma $\underline{j} \equiv j + q \cdot h^p \pmod{h^{p+1}}$, $q \in \{0, 1, 2, \dots, h-1\}$, o sea $\underline{j} \equiv \Gamma(u + q \cdot h^{p-i}/\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) \pmod{h^{p+1}}$, donde $v = u + q \cdot h^{p-i}$ tiene igual resto que u si $p-i \geq 1$. Luego, de la hipótesis y cualquiera sea $1 \leq i \leq p-1$, sigue que existe un camino de F_i con arco final \underline{j} .

COROLARIO. Cualesquiera sean los restos j, k , distintos de 0, la familia F_i ($1 \leq i \leq p$) contiene tantos caminos con arco (vértice) final de resto j como caminos con arco (vértice) final de resto k .

DEMOSTRACION. Es válido para F_1 pues cada biyección elegida al aplicar la Etapa I extiende los h arcos de U_x^- y previa concatenación genera exactamente un camino con arco (vértice) final de resto α , cualquiera sea $\alpha \neq 0$. Además, para todo $1 \leq i \leq p-1$, cada biyección extiende exactamente h caminos de F_i y la reiteración del razonamiento hecho para F_1 termina la demostración.

PROPOSICION B. Cualquiera sea $1 \leq i \leq p$, F_i carece de circuitos, sus caminos son simples, arco disjuntos dos a dos y cada uno de ellos tiene ar-

co inicial de resto 0 y arco final de resto distinto de 0.

DEMOSTRACION. Según hemos visto, lo afirmado es válido para F_1 . Para $p \geq 2$ vale el siguiente razonamiento. Si x es vértice final de un camino de F_1 (o equivalentemente de h caminos de F_1 , por la Proposición A) x no es soporte de bucles, (pues es de la forma $(x_1, x_2, \dots, 0, x_p)$, $x_p \neq 0$) y como cada U_x^+ contiene un único arco de resto 0, habrá a lo sumo un camino de "arcos ligados" cerrado en x . Por lo tanto, de acuerdo con el Lema II (caso $0 \leq w \leq 1 < h$) podemos afirmar que los h caminos de F_1 de vértice final x pueden ser extendidos (mediante una biyección adecuada) respetando las exigencias de la Etapa II.

El camino extendido por el arco de resto 0 (y sólo él) será concatenado con otro camino ya construido, y el nuevo conjunto de caminos satisfará también las condiciones de la Proposición B. El razonamiento anterior puede ser renovado hasta que todos los vértices finales de caminos de F_1 hayan sido explorados.

El conjunto F_2 así construido verifica las condiciones de la Proposición B, y si $p > 2$ podemos reiterar el argumento hasta obtener F_3 .

El mismo razonamiento puede reiterarse hasta explorar todos los vértices finales de caminos de F_{p-1} pues hasta entonces cada biyección a elegir permite extender simultáneamente h caminos de "arcos ligados", cada uno de ellos con arco inicial de resto 0, y esto termina la demostración.

PROPOSICION C. La familia F_i ($1 \leq i \leq p-1$) contiene $(h-1)^i \cdot h^{p-i}$ caminos.

DEMOSTRACION. En efecto, $G_{h,p}$ contiene h^{p-1} vértices de resto 0 y cada uno de ellos es extremo inicial de $h-1$ arcos todos los cuales resultan ser arco final de caminos de F_1 . Así entonces $|F_1| = (h-1) \cdot h^{p-1}$.

Los caminos de F_1 pueden partirse (ver Proposición A) en $(h-1) \cdot h^{p-2}$ clases de igual vértice final, y por el mismo razonamiento anterior, luego de una primera aplicación de la Etapa II se obtendrá F_2 con $(h-1)^2 \cdot h^{p-2}$ caminos.

El argumento precedente puede reiterarse al considerar la extensión de cada F_i ($i \leq p-2$) y esto termina la demostración.

PROPOSICION D. Una vez construida una familia de caminos F_p ($p \geq 1$) se tiene:

I. $|F_p| = (h-1)^p$.

II. Si $u \in U_x^-$ es arco final de algún camino de F_p entonces u es el único arco de U_x^- que ha sido "ligado", o sea x es vértice final de un único camino de F_p .

III. Los vértices de $G_{h,p}$ aún si explorar son los de la forma (x_1, x_2, \dots, x_p) con $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq p$, y cada uno de ellos es extremo inicial y extremo final de un único camino de F_p (eventualmente de un mismo camino).

DEMOSTRACION. Si $p=1$ hay un único vértice de resto 0 y la validez de las afirmaciones I, II y III es inmediata. Sea $p \geq 2$. El mismo argumento utilizado en la demostración de la Proposición C muestra que las biyecciones elegibles en los $(h-1)^{p-1}$ vértices finales de caminos de F_{p-1} permiten construir F_p con $(h-1)^p$ caminos, y esto demuestra I.

Si $u = (x_1, x_2, \dots, x_{p+1})$ y $u' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1})$ son arcos de igual vértice final y cada uno de ellos es arco final de un camino de F_p es $x_1 = x'_1 = 0$, $x_i = x'_i$, $2 \leq i \leq p+1$; es decir $u = u'$. Luego II es válido.

En la Etapa I fueron explorados todos los vértices de resto 0, y cada vértice (x_1, x_2, \dots, x_p) con $x_i = 0$, $x_j \neq 0$, $1 \leq i < j \leq p$, es extremo final de algún camino de F_{p-i} . Así entonces, todo vértice que falta explorar una vez construida F_p , carece del símbolo 0. Además, como todo vértice extremo final de un camino de F_p es no explorado, de I y II se deduce que los vértices aún por explorar coinciden con los de la forma (x_1, x_2, \dots, x_p) , $x_i \neq 0$.

Cada uno de éstos es extremo inicial de un camino de F_p que es único, pues cada uno de sus caminos tiene arco inicial de resto 0 y de esto resulta la validez de III.

COROLARIO. Si $h=2$, F_p ($p \geq 1$) se reduce a un único camino que es cerrado en \underline{x} (único vértice por explorar y sostén del bucle de resto 1). En este caso se aplica directamente la Etapa IV-b a F_p y la eficacia del algoritmo se deduce fácilmente. (Ver la Proposición F).

Consideremos ahora la Etapa III.

PROPOSICION E. Cada familia F_{jp} ($1 \leq j \leq h-1$) carece de circuitos, y todos sus caminos son simples, arcos disjuntos dos a dos, con arco inicial de resto perteneciente al conjunto $\{0, 1, \dots, j-1\}$ y arco final de resto perteneciente al conjunto $\{j, j+1, j+2, \dots, h-1\}$.

DEMOSTRACION. Veamos que si $h \geq 3$ es posible una primera aplicación de la Etapa III. Por la Proposición B sabemos que la proposición es válida para F_p . Así entonces, cualquiera sea \underline{x} de resto 1 vértice final de algún camino de F_p , al elegir la biyección $\varphi_{\underline{x}}$ habrá a lo sumo dos caminos cerrados en dicho vértice (uno con arco inicial de resto 0 y uno con arco inicial de resto 1) y el Lema II (caso $w \leq 2 < h$) permite afirmar que es posible elegir una biyección de acuerdo con las exigencias fijadas. El razonamiento anterior puede reiterarse para cada vértice de resto 1 aún no explorado hasta agotarlos, es decir hasta determinar F_{2p} .

Del proceso constructivo aplicado se deduce que los caminos de F_{2p} satisfacen lo afirmado en la proposición a demostrar. Si $h \geq 4$, el mismo razonamiento anterior puede repetirse hasta obtener F_{3p} .

En general, el argumento puede reiterarse en tanto extendamos caminos de F_{jp} con $j+1 < h$, es decir hasta obtener $F_{(h-1)p}$. La Proposición E queda demostrada y por lo tanto la Etapa III es efectivamente realizable.

PROPOSICION F. La Etapa IV permite, tras $(h-1)^{p-1}$ aplicaciones, extender los caminos de $F_{(h-1)p}$ a un circuito euleriano de $G_{h,p}$.

DEMOSTRACION. Si $h=2$ F_p contiene un único camino, que es cerrado en el vértice soporte del bucle de resto 1, único vértice aún por explorar (Proposición D, Corolario), y el Lema II (caso $w = h = 2$) permite afirmar que una adecuada biyección en dicho vértice determina un circuito euleriano de $G_{2,p}$.

Si $h > 2$ los vértices que restan por explorar una vez construida $F_{(h-1)p}$ son de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p)$ con $x_p = h-1$, $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq p-1$, según resulta de Proposición D, III y de las elecciones realizadas en la Etapa III.

Si notamos T a dicho conjunto, $|T| = (h-1)^{p-1}$ (ver Proposición D y Proposición A, Corolario), y la Etapa IV debe aplicarse tantas veces como vértices tenga T .

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, h-1)$ con $x_{p-1} \neq h-1$ ninguno de los arcos de U_x^- tiene vértice inicial en T y por lo tanto hay vértices de T cuyos precedentes inmediatos fueron todos explorados. Si \underline{x} es uno de esos vértices puede aplicarse el siguiente razonamiento: como el arco de vértice inicial \underline{x} y resto $h-1$ no es bucle (pues $x_{p-1} \neq h-1$) hay a lo sumo $h-1$ caminos cerrados en \underline{x} y por el Lema II (caso $w \leq h-1$) será posible elegir una biyección que extienda $F_{(h-1)p}$ a una familia carente de circuitos y compuesta de ca-

minos simples arco disjunto dos a dos.

El mismo razonamiento puede repetirse para todo vértice de T con $x_{p-1} \neq h-1$ y una vez agotados éstos, reiterarlo con aquéllos que tengan ahora, respecto de la nueva familia alcanzada, todos sus precedentes inmediatos explorados (serán los de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_{p-2}, h-1, h-1)$ con $x_{p-2} \neq h-1$). La reiteración del argumento es factible hasta que sólo reste por explorar el vértice soporte del bucle de resto $h-1$. Siendo éste el único vértice no explorado puede afirmarse que todo camino de la familia F_i construída es cerrado en él, y de acuerdo con el Lema II (caso $w = h$), estos caminos cerrados (simples y arco disjuntos dos a dos) y el bucle pueden extenderse conjuntamente a un circuito euleriano de $G_{h,p}$.

Queda demostrada así la eficacia del algoritmo.

2. METODO RECURRENTE.

De la demostración del algoritmo resulta que en $G_{h,p}$ el conjunto de arcos $(x_1, x_2, \dots, x_{p+1})$ con al menos un $x_i = 0$ coincide con el de los pertenecientes a algún camino de F_p . Sus respectivos vértices inicial y final son los de la forma (x_1, \dots, x_p) con todo $x_i \neq 0$.

El subgrafo engendrado en $G_{h,p}$ por estos vértices es isomorfo a $G_{h-1,p}$ ($G_{h-1,p}$ construído sobre el alfabeto $\{1, 2, \dots, h-1\}$). Así $G_{h,p} = F_p \cup G_{h-1,p}$. Puesto que cada vértice de $G_{h-1,p}$ es extremo inicial y extremo final de un único camino de F_p (ver Prop. D) con estos caminos se puede determinar un conjunto de caminos cerrados en vértices de $G_{h-1,p}$.

Como $G_{h-1,p}$ y F_p carece de arcos comunes y los arcos de los caminos cerrados que acabamos de construir agotan los de F_p se tiene que para construir soluciones de nuestro problema puede utilizarse el siguiente *Método Recurrente* (sobre h):

Todo camino euleriano de $G_{h-1,p}$ puede ser extendido a uno euleriano de $G_{h,p}$ intercalando adecuadamente los caminos cerrados construídos con los de F_p . En general esta extensión es posible de diferentes maneras.

Si $h > 2$, no todo camino euleriano de $G_{h,p}$ puede construirse por el método recurrente indicado. (ver ejemplo de pág. 35).

3. APLICACIONES.

Recordemos que en $G_{h,p} = \langle X, \Gamma \rangle$, $X = \{0, 1, 2, \dots, h^p - 1\}$ y cada vértice $x \in X$ es extremo inicial de los arcos $h \cdot x + \alpha \pmod{h^{p+1}}$ y extremo final de los arcos $x + \alpha \cdot h^p$, con $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots, h-1\}$.

EJEMPLO 1. Si $h=2$, $p=2$ tendremos que considerar en primer término las clases de arcos incidentes en 0 y en 2. De $\Gamma\{0,4\} = \{0,1\}$ y $\Gamma\{2,6\} = \{4,5\}$ resulta que los posibles conjuntos de caminos a construir por aplicación de la Etapa I son:

$F_1: 2, 4, 0, 1 // 6, 5$ o bien $F'_1: 6, 4, 0, 1 // 2, 5$.

Como $\Gamma\{1,5\} = \{2,3\}$ de ellos se obtienen, respectivamente,

$F_2: 6, 5, 2, 4, 0, 1, 3$ $F'_2: 6, 4, 0, 1, 2, 5, 3$.

De aquí resultan los circuitos eulerianos

$0, 1, 3, 7, 6, 5, 2, 4, (0)$ o bien $0, 1, 2, 5, 3, 7, 6, 4, (0)$.

A éstos corresponden, respectivamente, las sucesiones $00011101(0)$; $00010111(0)$ que son las dos únicas que hay en este caso.

EJEMPLO 2. Si $h=2$, $p=3$ las clases de arcos con vértice final par son $\{0,8\}$, $\{2,10\}$, $\{4,12\}$, $\{6,14\}$. De $\Gamma\{0,8\} = \{0,1\}$, $\Gamma\{2,10\} = \{4,5\}$, $\Gamma\{4,12\} = \{8,9\}$, $\Gamma\{6,14\} = \{12,13\}$, una posible familia F_1 es la de caminos $2, 4, 8, 0, 1 // 14, 12, 9 // 10, 5 // 6, 13$. La única extensión posible de esta familia es $F_2: 14, 12, 9, 2, 4, 8, 0, 1, 3 // 6, 13, 10, 5, 11$. (No se puede elegir la biyección 1-2, 9-3 ni tampoco la 5-10, 13-11). Como $\Gamma\{3,11\} = \{6,7\}$, de F_2 se obtiene el camino cerrado $14, 12, 9, 2, 4, 8, 0, 1, 3, 6, 13, 10, 5, 11, 7$ y el circuito euleriano $14, 12, 9, 2, 4, 8, 0, 1, 3, 6, 13, 10, 5, 11, 7, 15, (14)$.

Si se hubiera elegido $F'_1: 10, 4, 8, 0, 1 // 14, 12, 9 // 2, 5 // 6, 13$ podríamos tener

$F_2: 14, 12, 9, 3 // 6, 13, 10, 4, 8, 0, 1, 2, 5, 11$ o bien

$F'_2: 14, 12, 9, 2, 5, 10, 4, 8, 0, 1, 3 // 6, 13, 11$ o bien

$F''_2: 6, 13, 10, 4, 8, 0, 1, 3 // 14, 12, 9, 2, 5, 11$.

Observemos ahora que la elección de la biyección 1-2, 9-3 impide tomar la biyección 5-10, 13-11. Por el contrario, la biyección 1-3, 9-2 es compatible con las dos biyecciones en el vértice 5.

De cada conjunto F_2 , F'_2 , F''_2 se obtiene uno de los circuitos buscados.

Damos a continuación los 16 circuitos eulerianos de $G_{2,3}$. Las sucesiones equilibradas que ellos determinan se corresponden (ordenadamente) con las dadas en la página 8

```

0,1,2,4,9,3,6,13,10,5,11,7,15,14,12,8,(0)
"      " 7,15,14,13,10,5,11,6,12,8,(0)
"      5,10,4,9,3,6,13,11,7,15,14,12,8,(0)
"      "      7,15,14,13,11,6,12,8,(0)
"      11,6,12,9,3,7,15,14,13,10,4,8,(0)
"      "      13,10,4,9,3,7,15,14,12,8,(0)
"      "      7,15,14,12,9,3,6,13,10,4,8,(0)
"      "      "      13,10,4,9,3,6,12,8,(0)
0,1,3,6,12,9,2,5,11,7,15,14,13,10,4,8,(0)
"      13,10,4,9,2,5,11,7,15,14,12,8,(0)
"      "      5,11,7,15,14,12,9,2,4,8,(0)
"      "      11,7,15,14,12,9,2,5,10,4,8,(0)
"      7,15,14,12,9,2,5,11,6,13,10,4,8,(0)
"      "      13,10,4,9,2,5,11,6,12,8,(0)
"      "      "      5,11,6,12,9,2,4,8,(0)
"      "      "      11,6,12,9,2,5,10,4,8,(0)

```

EJEMPLO 3. Sea ahora $h=3$ y $p=3$.

En $G_{3,3}$ los nueve vértices de resto cero que deben explorarse en la Etapa I nos llevan a elegir biyecciones en

$\Gamma\{0,27,54\} = \{0,1,2\}$, $\Gamma\{3,30,57\} = \{9,10,11\}$, $\Gamma\{6,33,60\} =$
 $= \{18,19,20\}$, $\Gamma\{9,36,63\} = \{27,28,29\}$, $\Gamma\{12,39,66\} = \{36,37,38\}$
 $\Gamma\{15,42,69\} = \{45,46,47\}$, $\Gamma\{18,45,72\} = \{54,55,56\}$, $\Gamma\{21,48,75\} =$
 $= \{63,64,65\}$, $\Gamma\{24,51,78\} = \{72,73,74\}$.

Una posible familia F_1 es la siguiente (hemos agrupado los caminos de igual vértice final):

3,9,27,0,1	57,10	60,19	15,45,54,2	30,11	6,20
39,36,28	12,37	69,46	21,63,29	66,38	42,47
33,18,55	48,64	51,73	24,72,56	75,65	78,74

Al aplicar la Etapa II al vértice 1 no podrá elegirse ninguna de las biyecciones que asocian 1 con 3, puede en cambio elegirse, por ejemplo, la definida por 1-4 , 28-3 , 55-5 que da origen a la familia de caminos constituída por 39,36,28,3,9,27,0,1,4 // 33,18,55,5 y todos los restantes de F_1 aún sin extender.

La elección ahora de la biyección 10-32 , 37-31 , 64-30 , da origen a los caminos 57,10,32 // 12,37,31 // 48,64,30,11, los restantes son conservados.

Con la elección sucesiva de las biyecciones 19-57 , 46-59 , 73-58 ; 2-6 , 29-8 , 56-7 ; 11-33 , 38-35 , 65-34 ; y 20-60 , 47-61 , 74-62 obtenemos la familia F_2 siguiente:

39,36,28,3,9,27,0,1,4	48,64,30,11,33,18,55,5
12,37,31	15,45,54,2,6,20,60,19,57,10,32
51,73,58	69,46,59
24,72,56,7	21,63,29,8
75,65,34	66,38,35
42,47,61	78,74,62

Para la segunda aplicación de la Etapa II elegiremos primeramente la biyección 4-12 , 31-13 , 58-14 , luego la definida por 5-15 , 32-17 , 59-16 (no sería ahora posible elegir 32-15) y después la dada por 7-21 , 34-22 , 61-23. Si indicamos x, \dots, y cada uno de los caminos ya construídos, luego de aplicar las biyecciones indicadas tendremos que los caminos fijados son ahora:

39,.....,4,12,.....,31,13 // 51,.....,58,14 // 69,.....,59,16 //
 48,.....,5,15,.....,32,17 // 75,.....,34,22 //
 42,.....,61,23 // 24,.....,7,21,.....,8 // 66,.....,35 //
 78,.....,62 (los tres últimos de igual vértice final).

En el vértice 8 no podemos elegir ahora una biyección que ligue 8 con 24 (hubiera sido factible si el vértice 8 se hubiera explorado antes que el vértice 7 o si en 7 se hubiera elegido otra biyección). Adoptada la biyección 8-26 , 35-25 , 62-24 tendremos la familia F_3

39,36,28,3,9,27,0,1,4,12,37,31,13
 51,73,58,14
 69,46,59,16
 48,64,30,11,33,18,55,5,15,45,54,2,6,20,60,19,57,10,32,17
 75,65,34,22
 42,47,61,23
 66,38,35,25
 78,74,62,24,72,56,7,21,63,29,8,26

Como $p=3$ debemos pasar a la Etapa III. Para elegir la biyección φ_x , cualquiera sea el vértice x de resto 1 a explorar, debemos también considerar los arcos de U_x^- no pertenecientes a caminos de F_3 . Si exploramos primero

el vértice 16 y elegimos la biyección 16-48 , 43-49 , 70-50 obtendremos
 39,.....,13 // 51,.....,14 // 69,.....,16,48,.....,17 //
 75,.....,22 // 42,.....,23 // 66,.....,25 // 78,.....,26.
 43,49 70,50

Eligiendo ahora la correspondencia 22-66 , 49-68 , 76-67 llegaremos a
 39,.....,13 // 51,.....,14 // 69,.....,17
 76,67 43,49,68
 75,.....,22,66,.....,25 // 42,.....,23 // 78,.....,26
 70,50

En el vértice 13, soporte del bucle de resto 1 y del camino cerrado
 39,.....,13 podremos elegir la biyección 13-40 , 40,41 , 67-39 y poste-
 riormente en el último de resto 1 que resta explorar la dada por 25-76 ,
 52-77 , 79-75. Tendremos así determinada la siguiente familia $F_{2,3}$

 51,.....,14
 79,75,.....,25,76,67,39,.....,13,40,41 // 69,.....,17
 43,.....,68

 42,.....,23
 70,50 // 78,.....,26
 52,77

Debemos ahora aplicar la Etapa IV.

De los vértices (x_1, x_2, x_3) con $x_3 = 2$ y carentes del símbolo 0 los únicos
 con $x_2 = 1$ son $14 = (1, 1, 2)$ y $23 = (2, 1, 2)$, y para ambos todos sus prece-
 dentes inmediatos fueron explorados. Si elegimos la biyección 14-42 ,
 41,43 , 68-44 , y luego la 23-69 , 50-71 , 77-70 habremos fijado los ca-
 minos

51,.....,14,42,.....,23,69,.....,17 //
 79,.....,41,43,.....,68,44 //
 52,77,70,50,71 //
 78,.....,26 (los tres primeros de igual vértice final).

Es necesario explorar ahora el vértice 17, y elegida la biyección 17-52 ,
 44-51 , 71-53 , quedan determinados los caminos 78,.....,26 //
 79,.....,44,51,.....,17,52,.....,71,53 .

Ambos y el arco 80 (bucle de resto 2 y con soporte en 26) permiten elegir
 la biyección 26-79 , 53-80 , 80-78.

Así entonces, uno de los circuitos buscados es:

79,75,65,34,22,66,38,35,25,76,67,39,36,28,3,9,27,0,1,4,12,37,31,13,40,41,
 43,49,68,44,51,73,58,14,42,47,61,23,69,46,59,16,48,64,30,11,33,18,55,5,
 15,45,54,2,6,20,60,19,57,10,32,17,52,77,70,50,71,53,80,78,74,62,24,72,56,
 7,21,63,29,8,26,(79).

A dicho circuito corresponde (comenzando por 0) la sucesión equilibrada

000011011112112201120212012101020012000202010122121...
 ...222202200210022210211022111001 (000)

En el vértice 26 pudimos también haber elegido la biyección 26-80 ,
 53-78 , 80-79 que nos hubiera llevado a otro circuito euleriano.

Para ejemplificar una aplicación del *método recurrente* dado en página 30
 elegiremos en $G_{2,3}$ - construido sobre el alfabeto $\{1,2\}$ - el circuito eu-
 leriano

40,41,43,49,68,44,52,77,70,50,71,53,80,79,76,67,(40)

Intercalándole, según esquematizamos a continuación, los caminos de F_3
 dados en pág. 33, se reencuentra el circuito euleriano de $G_{3,3}$ indicado
 precedentemente.

40,.....,44,51,.....,14,42,.....,23,69,.....,16,48,.....,17,52,....
 ..., 80,78,.....,26,79,75,.....,22,66,.....,25,76,67,39,.....,13,(40).

Del siguiente ejemplo resulta que no todo circuito euleriano de $G_{3,3}$ pue-
 de obtenerse de acuerdo con el procedimiento recurrente indicado:

40,.....,49,66,.....,25,76,68,44,51,.....,14,42,.....,23,69,.....
 ...,16,48,.....,17,52,.....,80,78,.....,26,79,75,.....,22,67,39,.....,13,(40).

CAPITULO III

GRAFOS ADJUNTOS.

En este capítulo definimos la noción de grafo adjunto - caso orientado - y damos una colección de propiedades simples ligadas a dicho concepto. Algunas de ellas pueden verse en (26), (50), (51), (65), (119).

1. DEFINICION Y OBSERVACIONES BASICAS.

Dado un multigrafo $G = \langle X, U \rangle$ se llama *grafo adjunto de G* al grafo $G^* = A(G) = \langle U, \Gamma \rangle$ tal que $b \in \Gamma(a) - a, b \in U$, no necesariamente $a \neq b$ - si y solamente si en G el extremo final del arco a incide en el mismo vértice que el extremo inicial del arco b .

Es obvio que G^* es vacío si y sólo si G carece de arcos y que G^* tiene entradas, salidas, bucles si y sólo si también los tiene G . Además, el adjunto de un multigrafo es un grafo, pero no todo grafo es adjunto de algún multigrafo (basta considerar el grafo de arcos $(a,c), (a,d), (b,d)$).

Diremos que un grafo es *adjunto* si es adjunto de algún multigrafo.

Con referencia a los grafos definidos en el Capítulo I, puede verse que $G_{h,p+1}$ es adjunto de $G_{h,p}$ ($p \geq 1$) y que $G_{h,1}$ es adjunto del multigrafo cuyos h arcos son bucles con un mismo soporte.

De la definición dada (no se presupone que G sea finito) es inmediato deducir:

3.1.1. Cada arco de G^* corresponde a un único camino de longitud dos en G . Más precisamente, el arco (a,b) de G^* con $a \neq b$, representa el camino de G (abierto o cerrado) $\mu = a, b$ y el bucle (b,b) al camino (cerrado) que resulta de tomar dos veces consecutivas el bucle b de G .

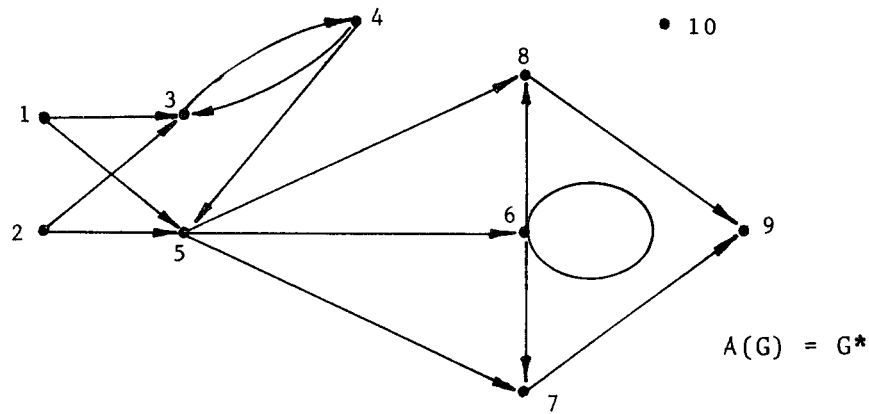
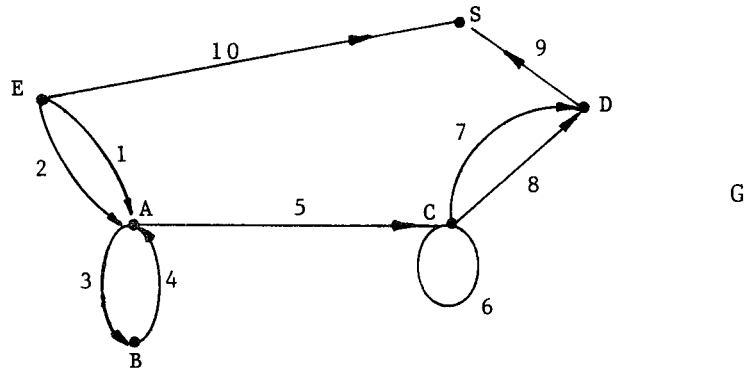
Por otra parte, al circuito que en G define el bucle b , corresponde en G^* el que determina el bucle de soporte b .

3.1.2. Un multigrafo G y todos los que pueden obtenerse a partir de él agregando (suprimiendo) vértices aislados o desdoblado (identificando) algunas de sus entradas o salidas tienen el mismo grafo adjunto.

3.1.3. Si bien es obvio que los eventuales vértices aislados de G son ig

norados al determinarse G^* , los de G^* cuentan para reconstruir G .

EJEMPLO.



2. PROPIEDADES.

Si $G = \langle X, U \rangle$ es un multigrafo y $G^* = \langle U, \Gamma \rangle = \langle U, W \rangle$ es su grafo adjunto $((a, b) \in W \text{ equivale a } b \in \Gamma(a))$ se verifica:

3.2.1. Los operadores "adjunto" y "opuesto" conmutan, es decir $\check{G}^* = (\check{G})^*$, y por lo tanto; un grafo es adjunto si y sólo si lo es su opuesto.

3.2.2. Si G_1 es submultigrafo de G (ni discreto ni vacío), entonces G_1^* es subgrafo (no vacío) saturado de G^* y recíprocamente.

Así entonces, todo subgrafo de G^* obtenido por eliminación de vértices (y de los arcos incidentes en ellos) es adjunto de algún submultigrafo de G .

3.2.3.

$$|W| = \sum_{x \in X} d_G^-(x) \cdot d_G^+(x)$$

3.2.4. Cualquiera sea en G el arco $u = (u_i, u_f)$ - no necesariamente $u_i \neq u_f$ - se cumple:

$$d_G^+(u_f) = d_{G^*}^+(u) = |\Gamma(u)| \quad ; \quad d_G^-(u_i) = d_{G^*}^-(u) = |\Gamma^{-1}(u)|.$$

Además, si $\Gamma(u) \neq \emptyset$, $d_G^-(u_f) = |(\Gamma^{-1} \circ \Gamma)(u)|$ y si $\Gamma^{-1}(u) \neq \emptyset$, $d_G^+(u_i) = |(\Gamma \circ \Gamma^{-1})(u)|$.

3.2.5. Si G es k -regular ($d_x^- = d_x^+ = k \geq 1$) de orden p , G^* es k -regular de orden $k \cdot p$ y recíprocamente si G carece de vértices aislados.

3.2.6. El camino $\mu = u_1, u_2, \dots, u_L$ de longitud L ($L \geq 1$) determina en G^* el camino $\mu^* = (u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{L-1}, u_L)$ de longitud $L-1$ y recíprocamente. Además μ^* es cerrado si y sólo si $u_1 = u_L$.

Por otra parte, si μ es simple, μ^* es elemental y recíprocamente excepto si μ^* es cerrado en u_1 (en este caso $u_1 = u_L$).

En particular cada camino euleriano (abierto o cerrado) de G determina en G^* un camino hamiltoniano (abierto) y recíprocamente.

De 3.2.6 y la correspondencia entre "camino cerrado" y "circuito" (ver página 22) resulta:

3.2.7. Cada circuito (circuito simple) de longitud L ($L \geq 1$) de G determina en G^* un circuito (circuito elemental) de longitud L y recíprocamente.

En particular, hay una correspondencia biyectiva canónica entre los circuitos eulerianos de G y los circuitos hamiltonianos de G^* .

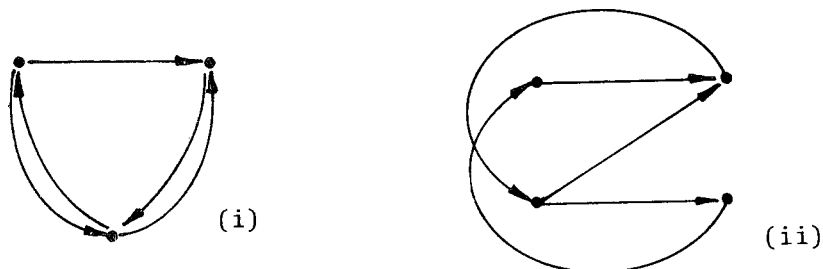
Esta correspondencia no es válida para el caso no orientado.

Como $G_{h,1}$ es universal y todo $G_{h,p}$ es conexo y balanceado, de 3.2.7 y 1.2.7 resulta 1.2.8.

Si G admite circuito euleriano, todos sus caminos eulerianos son cerrados y por 3.2.7 sigue

3.2.8. Si G^* admite circuito hamiltoniano, todos sus caminos hamiltonianos pueden extenderse a un camino hamiltoniano cerrado.

De los esquemas siguientes resulta que la afirmación precedente no es válida en general (i) y puede verificarse en grafos no adjuntos (ii).



La definición habitual de intersección y unión de dos multigrafos $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$, $G_2 = \langle X_2, U_2 \rangle$ por: $G_1 \cap G_2 = \langle X_1 \cap X_2, U_1 \cap U_2 \rangle$, $G_1 \cup G_2 = \langle X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2 \rangle$ nos lleva a:

$$3.2.9. (G_1 \cap G_2)^* = G_1^* \cap G_2^*.$$

La afirmación análoga para el caso no orientado es falsa.

$$3.2.10. G_1^* \cup G_2^* \text{ es subgrafo cubriente de } (G_1 \cup G_2)^*.$$

3.2.11. $G_1^* \cup G_2^* = (G_1 \cup G_2)^*$ si y sólo si cualesquiera sean los arcos $u = (u_i, u_f)$, $v = (v_i, v_f)$ tales que $u_f = v_i$ se cumple que ambos pertenecen por lo menos a uno de los multigrafos G_1, G_2 .

En efecto, por 3.2.10, $G_1^* \cup G_2^* = (G_1 \cup G_2)^*$ equivale a que $G_1^* \cup G_2^*$ es subgrafo saturado de $(G_1 \cup G_2)^*$ y esto se cumple si y sólo si no hay arcos u, v con $u_f = v_i$, uno de ellos en $G_1 - G_2$ y el restante en $G_2 - G_1$.

Llamaremos *adjunto fundamental* (engendrado por U_x) al grafo adjunto de la estrella $U_x = U_x^- \cup U_x^+$.

Como todo multigrafo puede expresarse como unión de sus estrellas, de 3.2.11 se deduce:

Todo grafo adjunto es unión de adjuntos fundamentales.

De la caracterización de los grafos adjuntos resultará que con ciertas restricciones vale también la recíproca. (Ver b_1) en pág.45).

Con el fin de determinar el número de soluciones que admite el problema al cual dedicamos los Capítulos I y II, van Aardenne-Ehrenfest y de Bruijn (14) dedujeron la siguiente interesante relación:

3.2.12. (Th.4 de (14)). Si G es un multigrafo h -regular con q vértices y $E(H)$ denota el número de circuitos eulerianos de H se tiene:

$$E(G^*) = h^{-1} \cdot (h!)^{q(h-1)} \cdot E(G)$$

Una relación similar obtenida por Knuth (57) y posteriormente por Orlin (120) es la siguiente:

3.2.13. Si G es un multigrafo balanceado con q vértices no aislados; el número T_0 de arborescencias cubrientes del adjunto de G con raíz u_0 es :

$$T_0 = T \cdot (d_0^+)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^q (d_i^+)^{d_i^+-1}$$

donde T es el número de arborescencias con una raíz dada y cubrientes de G excluidos sus vértices aislados.

La igualdad precedente está estrechamente vinculada con lo visto sobre la determinación del número de sucesiones (h,m) -equilibradas. En particular, si $G = G_{h,p}$ se reencuentra lo afirmado en III (pág. 17).

3. CONEXIDAD Y ADJUNCION.

En este párrafo G se supone siempre sin vértices aislados.

El estudio de relaciones entre los conceptos conexidad y grafo adjunto nos permite deducir:

3.3.1. Si G es f -conexo, no trivial, entonces G^* es f -conexo, no trivial, y recíprocamente.

3.3.2. Si $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$ es una sucesión de vértices que determinan una cadena de G^* , el conjunto de arcos u_i ($1 \leq i \leq k$) genera un subgrafo conexo de G . La recíproca es falsa.

Sea G_u el submultigrafo maximal generado en G por los caminos que contienen el arco u :

3.3.3. G^* es conexo si y sólo si G es conexo y contiene un conjunto de arcos u_i ($i \in I$) tal que la familia de submultigrafos G_{u_i} verifica:

$$a) \quad G = \bigcup_{i \in I} G_{u_i}$$

b) Todo G_{u_i} contiene al menos un arco de algún otro G_{u_j} .

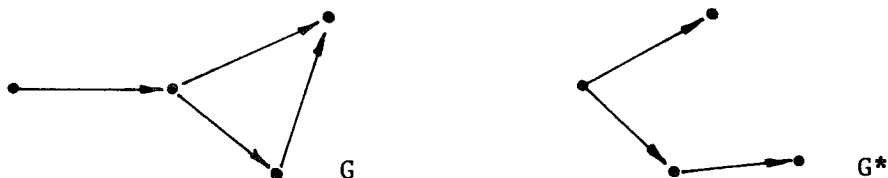
Puesto que siempre puede afirmarse que existe una familia de arcos u_i ($i \in I$) tal que $G = \bigcup G_{u_i}$ (eventualmente la de todos los arcos), si existiera un arco \underline{u} tal que $G_{\underline{u}}$ careciera de arcos comunes con cada uno de los restantes G_{u_i} , se tendría G^* desconexo. Por lo tanto de G^* conexo resulta la existencia de una familia de arcos en las condiciones indicadas. Además, de 3.3.2 resulta que G^* conexo implica G conexo.

Para considerar la afirmación recíproca notemos que cualquiera sea u , $(G_u)^*$ es conexo. Si existe u tal que $G = G_u$ entonces G^* es conexo. Caso contrario, existe G_v tal que $G_u \cap G_v$ contiene al menos un arco, y en tal caso, si $G = G_u \cup G_v$, se tiene que $G^* = (G_u \cup G_v)^*$ es conexo. Si $G \neq G_u \cup G_v$ la hipótesis hecha permite afirmar que existe G_w tal que $(G_u \cup G_v) \cap G_w$ contiene al menos un arco y entonces si $G = G_u \cup G_v \cup G_w$ resulta, como antes, que G^* es conexo. La reiteración del razonamiento anterior permite deducir que cada componente conexa de G tiene por adjunto un grafo conexo y esto termina la demostración.

3.3.4. El número de componentes conexas de G es menor o igual que el de componentes conexas de G^* .

3.3.5. Si G es conexo y ningún vértice x con $d_x^- \geq 2$ ($d_x^+ \geq 2$) es salida (entrada) entonces G^* es conexo. En especial, si G es conexo y carece de entradas y salidas G^* es conexo.

Observemos que en contradicción con lo afirmado en (26) el siguiente ejemplo muestra que aún cuando G sea unilateralmente conexo en sentido estricto (es decir u -conexo pero no f -conexo) y distinto de un arco aislado, no puede afirmarse que G^* también lo sea.



Vale en cambio la siguiente propiedad:

3.3.6. Si G^* es estrictamente u-conexo, G también lo es.

En efecto, de 3.3.1, 3.3.3 y la hipótesis, resulta que G es conexo pero no f-conexo. Veamos que es u-conexo. Para esto notemos que cualesquiera sean en G los vértices a, b es posible elegir un arco v uno de cuyos extremos es a y un arco w incidente en b . Como G^* es u-conexo puede afirmarse que en G existe al menos un camino de primer arco v y último arco w ó uno de primer arco w y último arco v . En consecuencia y por la arbitrariedad en la elección de los vértices a, b resulta que G es u-conexo.

Por lo dicho es inmediato:

3.3.7. Si G satisface las condiciones pedidas en 3.3.3 y es estrictamente conexo (conexo pero no u-conexo) también G^* es estrictamente conexo.

La recíproca de 3.3.7 es falsa, según se deduce del ejemplo precedente, y esto también contradice la validez de la equivalencia enunciada en el Th.4 de (26).

CAPITULO IV

CARACTERIZACION DE GRAFOS ADJUNTOS.

Algunas de las propiedades que demostraremos en este capítulo serán utilizadas frecuentemente en el resto del trabajo, en particular 4.1.1, 4.2.1 y 4.2.2, de las cuales resultan diferentes maneras de caracterizar los grafos adjuntos. En el párrafo 3 damos un ejemplo, y en el 4 nos referimos a adjuntos de algunos multigrafos con características especiales.

1. RELACION DE ADJUNCION.

Aún cuando nuestro interés está centrado en el estudio de multigrafos finitos señalemos que la siguiente proposición es válida también si X es infinito.

4.1.1. Dada una relación $\Gamma \subseteq X \times X$ las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$

b) $\Gamma = \bigcup_{x \in X-S} \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) \times \Gamma(x)$, donde $S = \{x / \Gamma(x) = \emptyset\}$, con clases $\Gamma(x)$

(resp. $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$) coincidentes o disjuntas dos a dos.

c) Si Γ contiene tres elementos del conjunto $\{x,y\} \times \{z,w\}$ (no necesariamente $\{x,y\} \times \{z,w\} = \emptyset$) también contiene al cuarto par ordenado.

d) Si $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \neq \emptyset$ entonces $\Gamma(x) = \Gamma(y)$.

e) Si $y \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$ entonces $\Gamma(x) = \Gamma(y)$.

f) Si $z \in \Gamma(x)$ entonces $\Gamma(x) = \Gamma \circ \Gamma^{-1}(z)$ y $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) = \Gamma^{-1}(z)$.

DEMOSTRACION.

a) \Rightarrow b): De $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$ se deduce que $\Gamma = \bigcup \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) \times \Gamma(x)$. Además, si $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \neq \emptyset$ entonces $y \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$ de donde $\Gamma(y) \subseteq \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) = \Gamma(x)$. Análogamente $x \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y)$ de donde $\Gamma(x) \subseteq \Gamma(y)$. Luego las clases $\Gamma(x)$, $\Gamma(y)$ son disjuntas o coincidentes. En consecuencia, si existe $z \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) \cap \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y)$ vale $\Gamma(z) = \Gamma(x) = \Gamma(y)$ y por lo tanto

$$\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) = \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y).$$

b) \Rightarrow c): Inmediato.

c) \Rightarrow d): Si $z \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ y además existe $w \neq z$ tal que $w \in \Gamma(x)$, por hipótesis resulta $w \in \Gamma(y)$ y en consecuencia $\Gamma(x) \subset \Gamma(y)$. Análogamente, de $w \in \Gamma(y)$ se deduce $w \in \Gamma(x)$ y por lo tanto $\Gamma(x) = \Gamma(y)$.

d) \Rightarrow e): Inmediato.

e) \Rightarrow f): Cualquiera sea $y \in \Gamma^{-1}(z)$, de $z \in \Gamma(x)$ resulta que $y \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$ y por lo tanto $\Gamma(y) = \Gamma(x)$; luego se tiene que $\Gamma \circ \Gamma^{-1}(z) = \bigcup_{y \in \Gamma^{-1}(z)} \Gamma(y) = \Gamma(x)$. Por otra parte, si $y \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$ por e) sabemos que $\Gamma(y) = \Gamma(x)$ de donde si $z \in \Gamma(x)$ también $y \in \Gamma^{-1}(z)$ y por lo tanto $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) \subseteq \Gamma^{-1}(z)$. Además de $z \in \Gamma(x)$ es claro que $\Gamma^{-1}(z) \subseteq \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$.

f) \Rightarrow a): Inmediato si $\Gamma(x) = \emptyset$; si $\Gamma(x) \neq \emptyset$ por f) se tiene que

$$\Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) = \bigcup_{z \in \Gamma(x)} \Gamma \circ \Gamma^{-1}(z) = \Gamma(x).$$

COROLARIO 1. Una relación $\Gamma \subseteq X \times X$ satisface $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$ si y sólo si vale

b') $\Gamma = \bigcup_{z \in X-E} \Gamma^{-1}(z) \times \Gamma \circ \Gamma^{-1}(z)$, donde $E = \{z / \Gamma^{-1}(z) = \emptyset\}$, con clases $\Gamma^{-1}(z)$ (resp. $\Gamma \circ \Gamma^{-1}(z)$) coincidentes o disjuntas dos a dos.

Es consecuencia de las equivalencias vistas y de observar que $x \notin S$ si y sólo si existe $z \notin E$ tal que $z \in \Gamma(x)$ y que en tal caso

$$\Gamma^{-1}(z) = \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) \quad ; \quad \Gamma \circ \Gamma^{-1}(z) = \Gamma(x).$$

COROLARIO 2. Si $\Gamma \subseteq X \times X$, $S = \{x / \Gamma(x) = \emptyset\}$ (resp. $E = \{x / \Gamma^{-1}(x) = \emptyset\}$) $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$ si y sólo si Γ induce sobre $X-S$ (resp. $X-E$) una partición cuyas clases son de la forma $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$ (resp. $\Gamma(x)$), o equivalentemente, de la forma $\Gamma^{-1}(z)$ (resp. $\Gamma \circ \Gamma^{-1}(z)$).

Heuchenne (38) denomina *relaciones cuadráticas* a las que satisfacen c) y Berge a las que verifican d) las denomina *aplicaciones multivocas semi-univocas* en ((23), Cap.2) y *semifuncionales* en ((71), Cap.3) Puesto que según veremos un grafo $\langle X, \Gamma \rangle$ es adjunto si y sólo si $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$ nosotros las denominaremos *relaciones de adjunción*.

Si $\Gamma \subseteq X \times X$ y W designa el conjunto de pares ordenados (p,q) con $q \in \Gamma(p)$, una forma alternativa de las precedentes relaciones $b)$, $b')$ es la siguiente $b_1)$, similar a la dada por Harary-Norman (26).

Diremos *partición impropia* de X a toda familia de subconjuntos X_j ($j \in J$) disjuntos dos a dos, no necesariamente no vacíos, tal que $X = \bigcup_{j \in J} X_j$.

$b_1)$ Existen en X dos particiones impropias, de clases X_j^-, X_j^+ ($j \in J$) respectivamente, y tales que el grafo (X,W) es unión de los adjuntos fundamentales engendrados por cada $X_j^- \cup X_j^+$.

Así entonces, $W = \bigcup_{j \in J} W_j$ con $W_j = X_j^- \times X_j^+$ y cada vértice pertenece a una clase de cada una de las particiones si y sólo si no es entrada ni salida. Las clases W_j no vacías, coinciden con las indicadas $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) \times \Gamma(x)$ en $b)$ o con las indicadas $\Gamma^{-1}(z) \times \Gamma \circ \Gamma^{-1}(z)$ de $b')$.

Los adjuntos fundamentales se corresponden con los "two-ports digraphs" de Harary-Norman (26) y con los "complete bipartite digraph" de Aigner (50) y Orlin (120).

De las relaciones dadas en la siguiente tabla resulta que aún cuando Γ^h sea relación de adjunción, no puede afirmarse lo mismo de Γ^{h-1} o de Γ^{h+1}

X	a	b	c	d	e
$\Gamma_1(x)$	a,b,c	e	d	e	e
$\Gamma_2(x)$	d	c,d	e	e	a,b

2. CARACTERIZACION DE GRAFOS ADJUNTOS.

Dado el multigrafo G diremos *resumen* de G al multigrafo $\rho(G)$ obtenido, previa eliminación de los vértices aislados de G , por identificación de todas sus entradas en una de ellas y de todas sus salidas en una salida, dejando invariantes los demás vértices y las respectivas relaciones de incidencia arco-vértice. Un multigrafo G se dirá *resumido* si y sólo si $G = \rho(G)$, es decir si y sólo si carece de vértices aislados y tiene a lo sumo una entrada y a lo sumo una salida.

Es inmediato que para todo multigrafo G se tiene $G^* = (\rho(G))^*$ y que si G es discreto, $\rho(G) = \emptyset$.

Ya que G^* determina unívocamente el conjunto de arcos de G y sólo parcial

mente el de sus vértices si G^* contiene entradas o salidas, puede darse la siguiente "condición de optimalidad":

$\rho(G)$ es el multigrafo con menor número de vértices que tiene como adjunto al grafo G^* .

La siguiente caracterización de los grafos adjuntos dada en términos de una igualdad que debe satisfacer la correspondiente relación de precedencia fue comunicada en la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina realizada en 1968 en Bahía Blanca.

4.2.1. Un grafo $H = \langle U, \Gamma \rangle = \langle U, W \rangle$ es adjunto de un multigrafo $G = \langle X, U \rangle$ si y sólo si $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$. Además un multigrafo G está unívocamente determinado por su grafo adjunto (a menos de isomorfismo) si y sólo si G es resumido.

DEMOSTRACION. Es inmediato que si H es adjunto, de las respectivas definiciones se deduce $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$.

Recíprocamente, si $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$, veamos que existe un multigrafo resumido G unívocamente determinado (a menos de isomorfismo) tal que $H = \langle U, \Gamma \rangle$ es adjunto de G . Seguiremos para ello un método constructivo análogo al dado por Harary-Norman (26). De la hipótesis sobre Γ y 4.1.1, en W está unívocamente determinada una partición cuyas clases son de la forma

$\Gamma^{-1} \circ \Gamma(u) \times \Gamma(u)$. El multigrafo resumido G se construye por aplicación de las siguientes reglas:

1) La clase (no vacía) $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(u) \times \Gamma(u)$ se identifica con el vértice \underline{u} . Se piensa \underline{u} extremo final del arco u y resulta que $\underline{u} = \underline{v}$ si y sólo si $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(u) \times \Gamma(u) = \Gamma^{-1} \circ \Gamma(v) \times \Gamma(v)$.

2) Si el conjunto E (S) de entradas (salidas) de H es no vacío en G se admite además un vértice \underline{e} (\underline{s}).

3) Sobre el conjunto de vértices así determinado se conviene en admitir tantos arcos de la forma

a) $(\underline{x}, \underline{y})$ como $|\Gamma(x) \cap \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y)|$ aún cuando $\underline{x} = \underline{y}$.

b) $(\underline{e}, \underline{y})$ como $|E \cap \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y)|$.

c) $(\underline{x}, \underline{s})$ como $|\Gamma(x) \cap S|$.

d) $(\underline{e}, \underline{s})$ como $|E \cap S|$.

Las particiones que Γ induce sobre $U-E$ y sobre $U-S$ permiten deducir que

$d_{\underline{x}}^+ = |\Gamma(x)| \neq 0$, $d_{\underline{x}}^- = |\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)| \neq 0$, $d_{\underline{e}}^+ = |E|$, $d_{\underline{s}}^- = |S|$, y en consecuencia, a excepción de \underline{e} (\underline{s}), G carece de entradas (salidas). Así en tonces, por construcción, G es resumido y está unívocamente determinado (a menos de isomorfismo).

Veamos que $H = G^*$. En efecto, cada vértice de H pertenece a una y sólo una de las clases de la forma E, $\Gamma(x)$ y también a una y sólo una de las de la forma S, $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$ (4.4.1, Corol.2) y ello permite clasificarlos en cuatro subconjuntos:

$a' = \{u/ u \in \Gamma(x) \cap \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y) \text{ para algunos vértices } x, y \text{ (admitimos } x=y)\}$

$b' = \{u/ u \in E \cap \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y) \text{ para algún vértice } y\}$

$c' = \{u/ u \in \Gamma(x) \cap S \text{ para algún vértice } x\}$

$d' = \{u/ u \in E \cap S\}$

Como cada arco de G es de alguno de los tipos a), b), c) o d), la equipotencia de los pares de conjuntos a-a', b-b', c-c', d-d', asegura la existencia de una biyección entre los arcos de G y los vértices de H.

Por otra parte, la biyección que asigna al arco $u = (\underline{x}, \underline{y})$ el vértice $u \in \Gamma(x) \times \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y)$ conserva la relación de precedencia. En efecto, si $u = (\underline{x}, \underline{y})$, $v = (\underline{y}, \underline{z})$ y se eligen los vértices

$$u \in \Gamma(x) \times \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y) \quad ; \quad v \in \Gamma(y) \times \Gamma^{-1} \circ \Gamma(z),$$

al par de arcos consecutivos u,v de G corresponde en H el arco

$(u,v) \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma(y) \times \Gamma(y)$. Además, cada arco de $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(y) \times \Gamma(y)$ corresponde a un par de arcos de G consecutivos en \underline{y} .

El razonamiento anterior puede repetirse para el caso $\underline{x} = \underline{e}$ ($\underline{y} = \underline{s}$) sustituyendo $\Gamma(x)$ por E ($\Gamma^{-1} \circ \Gamma(y)$ por S) y por lo tanto $H = G^*$.

Puede verificarse además que el agregado de vértices aislados al multigrafo G así construido o el desdoblamiento de \underline{e} (\underline{s}) en un número $\leq |E|$ ($\leq |S|$) de vértices entradas (salidas) no altera la validez del razonamiento anterior, excepto en cuanto a la unicidad, y esto termina la demostración.

COROLARIO 1. Todo grafo cada una de cuyas componentes conexas es un grafo funcional ($|\Gamma(x)| \leq 1$) o un grafo inyectivo ($|\Gamma^{-1}(x)| \leq 1$) es adjunto.

De la caracterización dada y de propiedades válidas para las relaciones

de adjunción, fáciles de deducir y ya indicadas en (23),(71), resultan las siguientes, que mencionamos en el Capítulo III:

Un grafo es adjunto si y sólo si lo es su opuesto.

La intersección de grafos adjuntos es un grafo adjunto.

Es obvio que las propiedades equivalentes a $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$ permiten enunciar otros criterios de caracterización, válidos también para el caso de grafos infinitos.

El criterio dado en 4.2.1 es equivalente al formulado por Heuchenne (38) en términos de "relación cuádrlica" (ver también (64)) y al de Berge (71) dado mediante la noción de "relación semifuncional" y reencontrado por Syslo (100).

Por otra parte, Harary-Norman (26) han caracterizado los adjuntos de multigrafos finitos sin bucles utilizando la noción "two ports-digraphs" y en base a la existencia de particiones impropias adecuadas en el conjunto de vértices (ver b_1). A su vez Aigner (50) usó la misma idea para el caso de adjuntos de grafos que pueden tener bucles y Hemminger (88) la extendió al caso de multigrafos infinitos. Otras caracterizaciones que siguen los mismos lineamientos son las de Orlin (120) y Balconi (51).

Los grafos adjuntos pueden caracterizarse también en términos de matrices. Dado un multigrafo $G = (X,U)$ una matriz $P = (p_{i,j})$ se llama *matriz de precedencia de vértices* de G si y sólo si $p_{i,j}$ es igual al número de arcos de la forma (x_i, x_j) y *matriz de precedencia de arcos* de G si y sólo si $p_{i,j} = 1$ cuando u_j es arco consecutivo de u_i y $p_{i,j} = 0$ en caso contrario. De lo dicho se infiere:

4.2.2. Dado un grafo G son equivalentes:

- i) G es grafo adjunto.
- ii) La matriz de precedencia de vértices de G es tal que sus filas (columnas) son idénticas u ortogonales dos a dos.
- iii) La matriz de precedencia de vértices de G carece de ternas

$$p_{i,j} = p_{r,j} = p_{i,s} = 1 \quad \text{con} \quad p_{r,s} = 0$$

El criterio que resulta de 4.2.2 - ii) coincide con el de Richards (58) para que matrices booleanas cuadradas admitan "arrow-diagrams" (es decir que pueden ser consideradas como matrices de precedencia de arcos). Ver

también Geller-Harary (64).

También es inmediato que c) de 4.1.1 permite enunciar fácilmente una caracterización de la noción que nos ocupa en términos de subgrafos no permitidos. Tal es el método seguido por Beineke (52). Ver también Geller-Harary (64), Hemminger (88) y Hemminger-Beineke (119). También fueron caracterizados por Pultr (125) mediante propiedades del funtor de la categoría de los multigrafos en la de los adjuntos.

Notemos que el grafo de arcos $(a,c), (b,d), (a,d)$ puede convertirse en adjunto mediante el agregado del arco (b,c) o bien mediante el agregado de un vértice que divida en dos el arco (a,d) .

En el Capítulo VII veremos que cada una de estas operaciones, reiterada adecuadamente, permite dar un método mediante el cual, dado un grafo G , es posible determinar un grafo adjunto H en el que G está "inmerso". De estos dos métodos, el que corresponde al agregado de arcos hace uso explícito de la definición por recurrencia $\Gamma_j = \Gamma_{j-1} \circ \Gamma_{j-1}^{-1} \circ \Gamma_{j-1}$.

Dicha definición y la caracterización en términos de la igualdad

$\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$ permiten además dar una extensión del concepto de grafo adjunto y formular una condición necesaria para el "problema hamiltoniano". La generalización que acabamos de indicar está estrechamente ligada con el concepto de "multigrafo condicionado" que comunicamos en 1968 (77) y trataremos brevemente en el Cap.VII.

Por 4.2.1 (ver también (50)) sabemos que un grafo adjunto no determina unívocamente al multigrafo del cual es adjunto, excepto que se imponga a este último la condición de ser resumido. Más generalmente, si Π_n denota el número de particiones de un conjunto de n elementos, y se conviene $\Pi_0 = 1$, vale:

4.2.3. Dado un grafo adjunto H con p entradas y q salidas ($p \geq 0, q \geq 0$) existen a lo sumo $\Pi_p \times \Pi_q$ multigrafos G_i no isomorfos carentes de vértices aislados y tales que $H = G^*$.

Es fácil ver que leves modificaciones del método constructivo indicado en la demostración de 4.2.1 permiten determinar directamente los distintos G_i . En realidad éstos se corresponden con las distintas particiones que pueden elegirse sobre el conjunto de entradas y el de salidas de H .

4.2.4. Los multigrafos G_1 y G_2 (no necesariamente finitos) tienen grafos adjuntos isomorfos si y sólo si sus respectivos resúmenes son isomorfos.

Su demostración es consecuencia directa de las definiciones respectivas y del método seguido en la demostración de 4.2.1 para construir el multigrafo resumido del cual H es adjunto.

COROLARIO. Si $G_1^* \cong G_2^*$ y K_1, K_2 resultan de eliminar en G_1 y G_2 , respectivamente, todas las entradas y todas las salidas (con todos los arcos incidentes en dichos vértices) entonces $K_1 \cong K_2$.

El corolario anterior fue enunciado por Harary-Norman (26) y extendido al caso infinito por Hemminger (88).

De 4.2.4, implícita en 4.2.1 y 4.2.3, surge por comparación con un conocido resultado de Whitney (ver Cap.VIII) una diferencia importante entre las nociones de grafo adjunto correspondientes al caso orientado y al no orientado.

3. EJEMPLO.

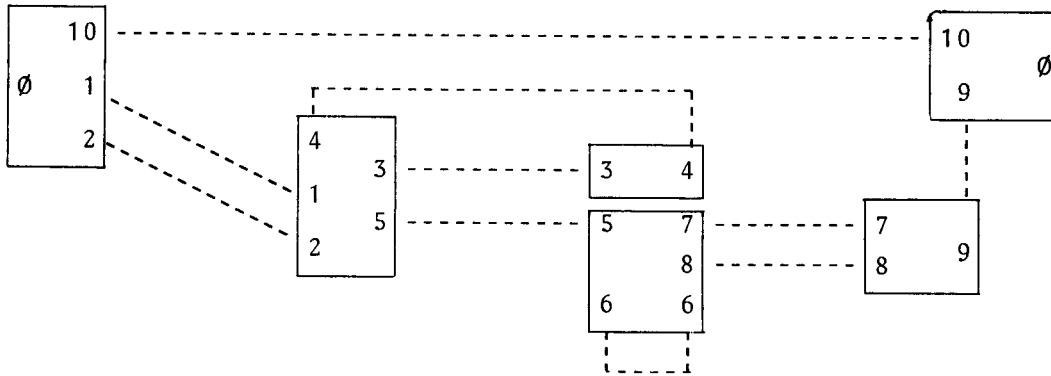
Con las notaciones anteriores para el ejemplo de página 37 se tiene:

	Γ	$\Gamma^{-1} \circ \Gamma$	$\Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$	Γ^{-1}	$\Gamma \circ \Gamma^{-1}$
1	3,5	1,2,4	3,5	-	-
2	3,5	1,2,4	3,5	-	-
3	4	3	4	1,2,4	3,5
4	3,5	1,2,4	3,5	3	4
5	6,7,8	5,6	6,7,8	1,2,4	3,5
6	6,7,8	5,6	6,7,8	5,6	6,7,8
7	9	7,8	9	5,6	6,7,8
8	9	7,8	9	5,6	6,7,8
9	-	-	-	7,8	9
10	-	-	-	-	-

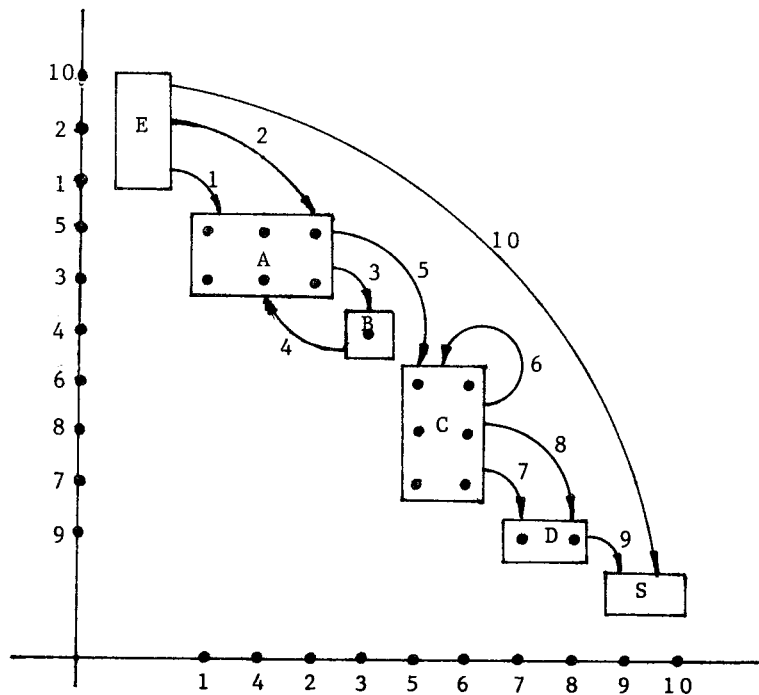
Las columnas 1^a y 3^a muestran que H es adjunto y las columnas 1^a y 2^a (idem 5^a y 4^a) dan las respectivas particiones de los vértices de H que deben considerarse para construir G. Más precisamente, la 1^a (idem 5^a) columna determina las clases $E = \{1,2,10\} ; \{3,5\} ; \{4\} ; \{6,7,8\} ; \{9\}$ y la co

lumna 2^a (idem 4^a) las clases $S = \{9,10\}$; $\{1,2,4\}$; $\{3\}$; $\{5,6\}$; $\{7,8\}$. Estas determinan sobre W las clases no vacías $A = \{1,2,4\} \times \{3,5\}$; $B = \{3\} \times \{4\}$; $C = \{5,6\} \times \{6,7,8\}$; $D = \{7,8\} \times \{9\}$.

Visualizando lo afirmado en b_1) el grafo adjunto H podría representarse por el siguiente esquema, en el cual cada uno de sus vértices figura dos veces y donde cada rectángulo representa un grafo adjunto fundamental. (La representación habitual de H fue dada en la página 37



Del multigrafo resumido G con vértices E, S, A, B, C, D podría darse en el espacio $U \times U$ el siguiente esquema (Su representación habitual fue dada en la página 7):



Con modificaciones obvias, el esquema anterior nos da la matriz de precedencia de vértices de H, o sea la de precedencia de arcos de G, y ejemplifica 4.2.2.

Si no se impone a G la condición de ser resumido, aunque sí la de carecer de vértices aislados, en nuestro ejemplo es posible determinar 10 multigrafos G_i tales que $H = (G_i)^*$. Estos resultarían de combinar cada una de las cinco particiones posibles de elegir en los arcos entradas de G con las dos que pueden determinarse con sus arcos de salida.

4. ADJUNTOS DE MULTIGRAFOS PARTICULARES.

Caracterizaciones de adjuntos con características especiales pueden obtenerse imponiendo restricciones a las de grafo adjunto ya mencionadas. Al respecto ver (26),(50),(65), (88),(100), (119). Nosotros reformularemos la de adjunto de grafo propiamente dicho y daremos algunas otras.

En lo que sigue una relación Γ se dirá *singular* si y sólo si cualesquiera sean u, v (no necesariamente $u \neq v$) se tiene que

$$|\Gamma(u) \cap \Gamma^{-1}(v)| \leq 1.$$

4.4.1. Dado $H = \langle U, \Gamma \rangle$ existe un grafo G - eventualmente no resumido - del cual H es adjunto si y sólo si Γ es una relación de adjunción singular.

DEMOSTRACION. Sabemos que H es adjunto si y sólo si Γ es de adjunción. Si Γ es no singular, G es multigrafo propiamente dicho. Si Γ es singular, cualesquiera sean en G los vértices x (distinto de entrada), y (distinto de salida) hay a lo sumo un arco (x,y). Si convenimos además que los eventuales arcos de entradas (de salida) de G tengan sus respectivos vértices iniciales (finales) incidentes en vértices distintos, G resultará un grafo. Este será resumido si y sólo si G^* tiene a lo sumo una entrada y a lo sumo una salida.

Observemos que aún cuando Γ sea relación de adjunción singular y Γ^2 también sea de adjunción (en general no lo es), no puede afirmarse que Γ^2 sea singular.

EJEMPLO.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\Gamma(x)$	b,c	d	e	f	g	h	h	-

Un multigrafo $\langle X, U \rangle$ es *simétrico* si y sólo si contiene tantos arcos de la forma (a, b) como arcos de la forma (b, a) . En tal caso y sólo entonces es posible elegir una involución $\sim : U \rightarrow U$ que asocie a cada arco uno (y sólo uno) de sus arcos opuestos. Los pares de arcos opuestos ligados por dicha involución se dirán *recíprocos*.

Para una tal involución, que diremos "involución de opuestos", sólo los bucles pueden ser arcos unidos ($u = u^{\sim}$). Si a es soporte de un número im par de bucles hay por lo menos un bucle unido.

4.4.2. Si G es simétrico, sobre el conjunto de vértices de su adjunto G^* existe al menos una involución \sim tal que $u^{\sim} \in \Gamma(u)$ cualquiera sea u , y cuyos puntos unidos - si existen - son vértices soportes de bucles. La recíproca también es verdadera.

DEMOSTRACION. La validez de la afirmación directa es inmediata si suponemos que la involución \sim corresponde a una involución de opuestos en G .

Recíprocamente, de la existencia en los vértices de G^* de una involución \sim que satisface $u^{\sim} \in \Gamma(u)$ para todo u , resulta que en G los arcos u, u^{\sim} son opuestos (y recíprocos). Por lo tanto G es simétrico.

COROLARIO. Sobre el conjunto de vértices de G^* es posible determinar una única involución \sim compatible con Γ ($u^{\sim} \in \Gamma(u)$) si y sólo si G es un grafo simétrico. En tal caso los puntos unidos de la involución coinciden con los vértices soportes de bucles.

Observemos que una afirmación análoga a la del Corolario no es válida si se supone que la involución en cuestión es "única con puntos unidos". Basta al efecto considerar el multigrafo G constituido por dos bucles con un mismo vértice soporte.

4.4.3. Sea G un grafo y $G^* = \langle U, \Gamma \rangle$ su adjunto, ambos carentes de entradas y de salidas. G es grafo adjunto si y sólo si $\Gamma(a) \cap \Gamma^{-1}(b) \neq \emptyset$ implica $\Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a) = \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$, cualesquiera sean los vértices a, b de G^* (no necesariamente distintos). ($\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma$, $\Gamma^{-2} = \Gamma^{-1} \circ \Gamma^{-1}$).

DEMOSTRACION. Si G^* es adjunto del grafo adjunto $G = \langle X, \Delta \rangle$ se cumplen i), ii) y sus respectivas recíprocas:

i) Si $p \in \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$, en G existe un arco $z = (z_i, z_f)$ tal que $z_i = p_i$, $z_f = b_i$ y por lo tanto $p_i \in \Delta^{-1}(b_i)$.

ii) Si $q \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a)$, en G existe un arco $w = (w_i, w_f)$ con $w_i = a_f$, $w_f = q_f$ y por lo tanto $q_f \in \Delta(a_f)$.

Así entonces fijado b , por i) si $p \in \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$ resulta que $p_i \in \Delta^{-1}(b_i)$. Además, cualquiera sea a tal que $\Gamma(a) \cap \Gamma^{-1}(b) \neq \emptyset$ en G existe un arco $x = (a_f, b_i)$. Como Δ es de adjunción puede afirmarse que $p_f \in \Delta(a_f)$, y por la recíproca de ii) se tiene que $p \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a)$.

Análogamente, cualquiera sea $q \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a)$ se tiene $q \in \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$. De las dos inclusiones precedentes resulta la validez de la afirmación directa.

Veamos la recíproca. Si G^* es adjunto del grafo $G = \langle X, \Delta \rangle$, fijado b y cualquiera sea a tal que $\Gamma(a) \cap \Gamma^{-1}(b) \neq \emptyset$, por i), ii) y sus recíprocas se tiene que $r \in \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$ si y sólo si en G , $r_i \in \Delta^{-1}(b_i)$, y también que $r \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a)$ si y sólo si en G , $r_f \in \Delta(a_f)$. De donde $\Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a) = \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$ equivale a $r_i \in \Delta^{-1}(b_i)$ si y sólo si $r_f \in \Delta(a_f)$, o sea $\Delta \circ \Delta^{-1}(b_i) = \Delta(a_f)$. Como además $b_i \in \Delta(a_f)$ se tiene $\Delta \circ \Delta^{-1} \circ \Delta(a_f) = \Delta(a_f)$.

El razonamiento anterior es válido en todo vértice pues G carece de entradas y de salidas y en consecuencia Δ es relación de adjunción y la recíproca está demostrada.

COROLARIO. El grafo $\langle U, \Gamma \rangle$ sin entradas y sin salidas es adjunto de un grafo adjunto si y sólo si Γ es una relación de adjunción singular tal que:

I) Si $\Gamma(a) \cap \Gamma^{-1}(b) \neq \emptyset$ se tiene $\Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a) = \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$ (puede ser $a=b$) o equivalentemente.

II) Γ^2 es relación de adjunción.

DEMOSTRACION. Si consideramos I) la validez del Corolario es consecuencia inmediata de la proposición anterior y de 4.4.1.

Para la validez utilizando II) basta entonces verificar que si se respetan las restantes hipótesis, I) es equivalente a II).

Veamos que II) implica I). Si $b \in \Gamma^2(a)$ cualquiera sea $x \in \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$, existe $p \in \Gamma^{-2}(b)$ tal que $x \in \Gamma(p)$ y para el cual se tiene $\Gamma^2(p) = \Gamma^2(a)$ (pues Γ^2 es de adjunción). Por lo tanto $\Gamma(x) \subset \Gamma^2(a)$ y como $\Gamma(x) \neq \emptyset$ exis

te $z \in \Gamma^2(a) \cap \Gamma(x)$ y en consecuencia $x \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a)$.

Razonando análogamente tendremos que $\Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a) \subset \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$ y de ambas inclusiones sigue la validez de I).

Recíprocamente, para ver que Γ^2 es de adjunción bastará verificar que si $b \in \Gamma^2(a)$, $d \in \Gamma^2(a)$, $d \in \Gamma^2(c)$ entonces $b \in \Gamma^2(c)$. Por la hipótesis sabemos que $\Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a) = \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$, $\Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(a) = \Gamma \circ \Gamma^{-2}(d)$, $\Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(c) = \Gamma \circ \Gamma^{-2}(d)$ y en consecuencia $\Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(c) = \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$.

Además $\Gamma^{-1}(b) \subset \Gamma \circ \Gamma^{-2}(b)$ de donde $\Gamma^{-1}(b) \subset \Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(c)$. Así entonces, cualquiera sea $x \in \Gamma^{-1}(b)$ existe al menos un arco (x,y) con $y \in \Gamma^2(c)$ y por lo tanto un $z \in \Gamma(c)$ tal que $y \in \Gamma(z)$. Como Γ es de adjunción y (x,b) , (x,y) , (z,y) son arcos, también lo es (z,b) y por lo tanto $b \in \Gamma^2(c)$, lo que termina la demostración.

En el Capítulo VII sobre adjuntos iterados damos una extensión de este resultado.

Del siguiente ejemplo resulta que la restricción referente a la carencia de entradas y salidas es esencial para la validez del Corolario precedente.


x	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\Gamma(x)$	a,b	c	d	e	e	d	f,i	g,h	-

En efecto, el grafo resumido G del cual $\langle X, \Gamma \rangle$ es adjunto está unívocamente determinado y aún cuando Γ^2 también es de adjunción G no es adjunto.

Además, en este caso y aún cuando Γ^2 es de adjunción y $\Gamma(g) \cap \Gamma^{-1}(d) \neq \emptyset$ tenemos que $\{c,f\} = \Gamma^{-1} \circ \Gamma^2(g) \neq \Gamma \circ \Gamma^{-2}(d) = \{c,f,i\}$.

Obsérvese que si modificamos el ejemplo anterior poniendo $\Gamma(i) = k$ entonces Γ^2 no es de adjunción.

A diferencia del caso no orientado, en el cual si G es euleriano (hamiltoniano) también lo es su adjunto, una afirmación similar es falsa para el caso orientado.

En efecto, dado el grafo euleriano y no hamiltoniano  su adjunto es hamiltoniano y no euleriano.

La demostración de cada una de las siguientes afirmaciones es directa.

4.4.4. Un grafo adjunto sin entradas ni salidas $\langle X, \Gamma \rangle$ es euleriano si y

sólo si es conexo y supuesto $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x) \cap \Gamma \circ \Gamma^{-1}(y) \neq \emptyset$, $|\Gamma(x)| = |\Gamma^{-1}(y)| \neq 0$.

4.4.5. G y G^* son ambos eulerianos si y sólo si G (o equivalentemente G^*) es conexo, k -regular, $k \geq 1$. En este caso y sólo entonces G^* es euleriano y hamiltoniano.

Es sabido que el "problema hamiltoniano", es decir, el de caracterizar los multigrafos que admiten camino hamiltoniano, carece aún de una solución satisfactoria en el caso general. En cambio la situación es totalmente distinta si se consideran sólo los "grafos adjuntos" pues con esta restricción, y según resulta de la correspondencia biyectiva indicada en 3.2.7, el problema en cuestión es equivalente al "problema euleriano" (caso orientado) cuya solución es conocida.

Precisamente, la correspondencia indicada, las relaciones vistas entre conexidad y grafo adjunto, lo dicho en 3.2.4 y la conocida caracterización de multigrafos eulerianos nos permiten enunciar:

4.4.6. El grafo adjunto $G^* = \langle U, \Gamma \rangle$ admite circuito hamiltoniano (de longitud $L \geq 1$) si y sólo si es conexo, carece de entradas y salidas y para todo vértice u se tiene $|\Gamma(u)| = |\Gamma^{-1} \circ \Gamma(u)|$ (o equivalentemente $|\Gamma^{-1}(u)| = |\Gamma \circ \Gamma^{-1}(u)|$).

La proposición anterior, que da una caracterización intrínseca de los grafos adjuntos hamiltonianos, fue publicada en 1975 en *Mathematica Japonicae* (104) conjuntamente con la siguiente.

Con $G \# \alpha$ notamos el multigrafo que resulta de eliminar en G los arcos de α y los vértices que pudieran quedar aislados.

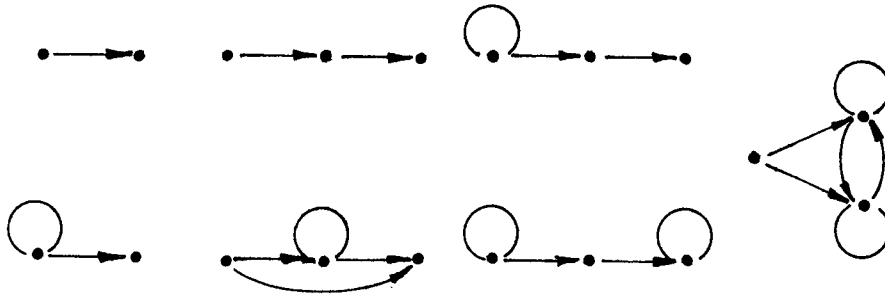
4.4.7. Sea $G^* = \langle U, \Gamma \rangle = \langle U, W \rangle$ el grafo adjunto de un multigrafo G con al menos cuatro arcos y sean p, q dos vértices tales que $(q, p) \notin W$. Bajo estas condiciones G^* admite camino hamiltoniano de vértice inicial p y vértice final q si y solamente si:

- 1) G^* es conexo.
- 2) $G^* \# \{W_p \cup W_q\}$ es conexo.
- 3) Existe al menos un vértice r ($p \neq r \neq q$) tal que $(p, r) \in W$.
- 4) En todo vértice u ($p \neq u \neq q$) incide al menos un arco $w \notin W_p \cup W_q$.
- 5) a) $|P^+| = |\Gamma^{-1}(p)| + 1$, donde $P^+ = \{p\} \cup \Gamma \circ \Gamma^{-1}(p)$.

b) $|Q^-| = |\Gamma(q)| + 1$, donde $Q^- = \{q\} \cup \Gamma^{-1} \circ \Gamma(q)$.

c) $|\Gamma(u)| = |\Gamma^{-1} \circ \Gamma(u)| \neq 0$ para todo $u \notin Q^- \cup \Gamma^{-1}(p)$, o equivalentemente $|\Gamma^{-1}(u)| = |\Gamma \circ \Gamma^{-1}(u)| \neq 0$ para todo $u \notin P^+ \cup \Gamma(q)$.

Los esquemas siguientes y sus opuestos dan los grafos adjuntos débilmente hamiltonianos con a lo sumo tres vértices.



CAPITULO V

GRAFOS ADJUNTOS Y HOMOMORFISMOS DE GRAFOS.

En este capítulo deducimos relaciones entre los conceptos de grafo adjunto y homomorfismo de grafos. En especial se da una condición sobre el homomorfismo h para que la imagen homomórfica $h(G)$ sea grafo adjunto (5.2.1) y se ve que todo homomorfismo $G \rightarrow G'$ induce un homomorfismo

$G^* \rightarrow (G')^*$ (5.2.3). La recíproca vale sólo bajo ciertas condiciones (5.2.4). Además de las prop. 5.3.2 y 5.4.1 resulta una conocida condición necesaria y suficiente para que un multigrafo finito conexo (orientado) sea isomorfo a su adjunto.

1. HOMOMORFISMO DE GRAFOS. PROPIEDADES GENERALES.

Si $G = \langle X, U \rangle$, $G' = \langle X', U' \rangle$ son multigrafos, un homomorfismo h de G en G' es un par de aplicaciones $h^0: X \rightarrow X'$, $h^1: U \rightarrow U'$ tales que cualquiera sea $u = (a, b) \in U$, $h^1(u) = (h^0(a), h^0(b))$. Escribiremos $h = \langle h^0, h^1 \rangle$.

Un homomorfismo $\langle h^0, h^1 \rangle$ se dice *monomorfismo*, *epimorfismo*, *isomorfismo*, si y sólo si ambas aplicaciones h^0, h^1 son inyectivas, sobreyectivas, biyectivas, respectivamente.

Oportunamente utilizaremos las siguientes propiedades:

5.1.1. Un homomorfismo $h: G \rightarrow G'$, $h = \langle h^0, h^1 \rangle$ está determinado unívocamente por la aplicación h^1 si y sólo si G carece de vértices aislados; por la aplicación h^0 si y sólo si G' es un grafo. En este último caso notaremos $h^1 = \hat{h}^0$ ($\hat{h}^0(a, b) = (h^0(a), h^0(b))$).

5.1.2. Si $\langle h^0, h^1 \rangle$ define un homomorfismo $h: G \rightarrow G'$, cualquiera sea $G_1 \subseteq G$ la restricción de h a G_1 es un homomorfismo \underline{h} . En tal caso $\underline{h}(G_1)$ es un submultigrafo de G' que diremos *imagen homomórfica* de G_1 .

Observemos que $\underline{h}(G_1)$ no es necesariamente submultigrafo saturado y que sólo si ambas aplicaciones h^0, h^1 son epiyectivas se tiene $h(G) = G'$.

5.1.3. Si $\langle h_1^0, h_1^1 \rangle$ es un homomorfismo $h_1: G \rightarrow G'$ y $\langle h_2^0, h_2^1 \rangle$ es un homomorfismo $h_2: G' \rightarrow G''$ entonces $h_2 \circ h_1 = \langle h_2^0 \circ h_1^0, h_2^1 \circ h_1^1 \rangle$ es un homomorfismo $h: G \rightarrow G''$. Si ambos G', G'' son grafos tendremos que $h = \langle h_2^0 \circ h_1^0, h_2^1 \circ h_1^1 \rangle$ (pues $\hat{f} \circ \hat{g} = \hat{f \circ g}$).

5.1.4. La imagen homomórfica (monomórfica) de un camino μ de longitud L

es un camino μ' de longitud $L' \leq L$ ($L' = L$). Si μ es elemental (simple) μ' es elemental (simple) si y sólo si la restricción de h^0 (h^1) a los vértices (arcos) de μ es inyectiva.

5.1.5. La imagen homomórfica de un multigrafo conexo es conexa.

2. HOMOMORFISMO Y ADJUNCION.

Con referencia a propiedades que ligan los conceptos "grafo adjunto" y "homomorfismo de grafos" notemos primeramente que todo multigrafo $\langle X, U \rangle$ admite al menos una imagen homomórfica que es grafo adjunto (basta elegir $h^0(X) = a$, $h^1(U) = (a, a)$). Por otra parte, no toda imagen homomórfica de un grafo adjunto es adjunto. En particular, la imagen homomórfica de un grafo adjunto puede no ser grafo, según se deduce del esquema siguiente



De la definición de homomorfismo de grafos y de las propiedades de una relación de adjunción (ver 4.1.1) resulta:

5.2.1. Si $h = \langle h^0, h^1 \rangle$ es un homomorfismo del multigrafo $G = \langle X, U \rangle$ en un grafo propiamente dicho, $h(G)$ es grafo adjunto si y sólo si cualesquiera sean los conjuntos A, B, C, D de la forma $(h^0)^{-1}(x)$, si U contiene arcos de $A \times C$, $A \times D$ y $B \times C$ entonces también contiene arcos de $B \times D$.

COROLARIO. Toda imagen monomórfica de un grafo adjunto es adjunto.

5.2.2. Si G es un grafo finito sin circuitos no es posible definir un homomorfismo de G en G^* . Si G es infinito la afirmación anterior es falsa.

5.2.3. Cualesquiera sean los multigrafos G y G' si $\langle h^0, h^1 \rangle$ define un homomorfismo $h: G \rightarrow G'$ entonces $\langle h^1, \hat{h}^1 \rangle$ determina un homomorfismo $h^*: G^* \rightarrow (G')^*$.

En efecto, h^1 aplica los vértices de G^* en vértices de $(G')^*$. Además, si (u, v) es arco de G^* , en G' el extremo final de $h^1(u)$ coincide con el extremo inicial de $h^1(v)$ y por lo tanto $(h^1(u), h^1(v))$ es arco de $(G')^*$. Como $(G')^*$ es grafo, es lícito poner $\hat{h}^1(u, v) = (h^1(u), h^1(v))$ y esto termina la demostración.

COROLARIO. Si $h_1: G \rightarrow G'$ y $h_2: G' \rightarrow G''$ son homomorfismos, entonces $(h_2 \circ h_1)^* = (h_2)^* \circ (h_1)^*$.

Resulta de 5.2.2 y 5.1.3.

A diferencia de lo visto en la prop. 5.2.3, del ejemplo siguiente se deduce que la existencia de un homomorfismo de G^* en $(G')^*$ no implica la existencia de un homomorfismo de G en G' .



5.2.4. Si $G = \langle X, U \rangle$ es un multigrafo sin entradas ni salidas, todo homomorfismo $H: G^* \rightarrow (G')^*$, cualquiera sea $G' = \langle Y, W \rangle$, es de la forma $H = h^*$, donde $h: G \rightarrow G'$ es un homomorfismo unívocamente determinado.

DEMOSTRACION. Si $H = \langle H^0, \hat{H}^0 \rangle$, sea $h = \langle h^0, H^0 \rangle$ con $h^0: X \rightarrow Y$ definido como sigue: si $x \in X$ y u, v son arcos tales que $x = u_f = v_i$ entonces $h^0(x) = (H^0(u))_f = (H^0(v))_i$. h^0 está bien definido.

Por otro lado $H^0(u) = (H^0(u)_i, H^0(u)_f) = (h^0(u_i), h^0(u_f))$ lo que prueba que $\langle h^0, H^0 \rangle$ es un homomorfismo de G en G' .

Si existe un homomorfismo $h': G \rightarrow G'$, $h' = \langle h'^0, h'^1 \rangle$ con $h'^1 = H^0$, h'^0 debe estar definida de acuerdo a lo indicado, pues H^0 es una aplicación de los arcos de G en arcos de G' , y por lo tanto h está unívocamente determinado.

5.2.5. Si G carece de entradas y de salidas hay correspondencia biyectiva entre los homomorfismos de $G \rightarrow G'$ y los de $G^* \rightarrow (G')^*$.

Inmediato de 5.2.3 y 5.2.4.

Del ejemplo anterior, en el cual G contiene una única entrada, y del que resulta considerando los respectivos grafos opuestos de G y de G' , se deduce que las restricciones impuestas a G en la prop. 5.2.4 no pueden eliminarse.

3. HOMOMORFISMO INICIAL (FINAL).

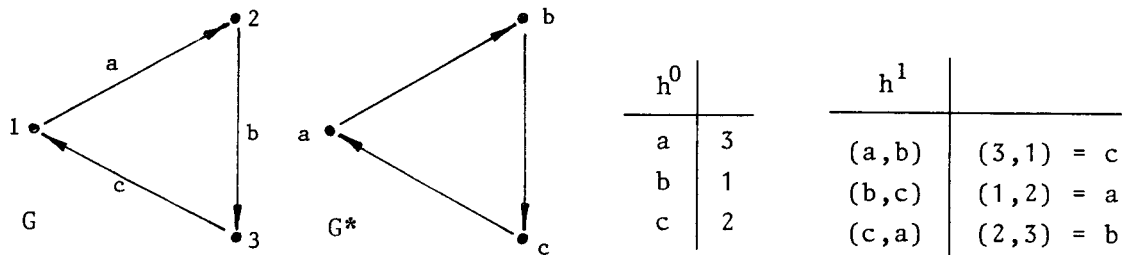
Dado un multigrafo $G = \langle X, U \rangle$ y su grafo adjunto $G^* = \langle U, W \rangle$ consideremos las aplicaciones $m_i^0: U \rightarrow X$, $m_i^1: W \rightarrow U$ definidas por:

$$m_i^0(u) = u_i \quad , \quad m_i^1((u,v)) = u.$$

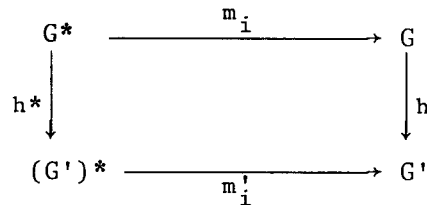
Puesto que $(u,v) \in W$ si y sólo si en G $u_f = v_i$, se tiene que $m_i^1((u,v)) = (u_i, v_i)$ y por lo tanto $\langle m_i^0, m_i^1 \rangle$ define un homomorfismo $m_i: G^* \rightarrow G$, que diremos *homomorfismo inicial*.

En forma análoga $m_f^0(u) = u_f$, $m_f^1((u,v)) = v$ definen el *homomorfismo final* $m_f: G^* \rightarrow G$.

Del siguiente ejemplo resulta que no todo homomorfismo $G^* \rightarrow G$ es inicial o final.



5.3.1. Para todo homomorfismo $h: G \rightarrow G'$ el siguiente diagrama es conmutativo:



Es decir, "homomorfismo inicial" es una "aplicación natural".

DEMOSTRACION. $h^0(m_i^0(u)) = h^0(u_i) = \bar{u}_i$ ($\bar{u} = h^1(u)$)

$$m_i^0(h^1(u)) = m_i^0(\bar{u}) = \bar{u}_i$$

$$h^1(m_i^1((u,v))) = h^1(u)$$

$$m_i^1(\hat{h}^1((u,v))) = m_i^1((h^1(u), h^1(v))) = h^1(u).$$

5.3.2. Cualquiera sea el multigrafo G , $m_i(G^*)$ es el submultigrafo saturado que se obtiene de G eliminando las salidas.

DEMOSTRACION. En efecto, como $m_i: G^* \rightarrow G$ es un homomorfismo, $m_i(G^*)$ es un submultigrafo de G . Además $m_i^0(U)$ es el conjunto de vértices distintos de salidas y $m_i^1(W)$ coincide con el de los arcos cuyo vértice final

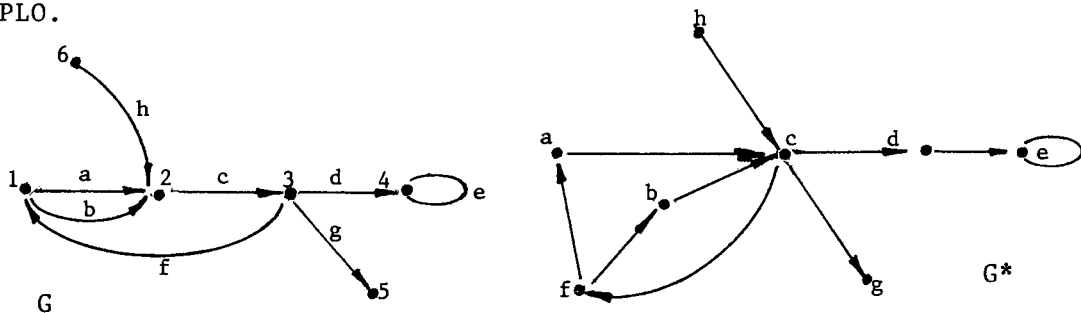
no es salida.

COROLARIO 1. Cualquiera sea el grafo $G = \langle X, U \rangle$ la aplicación $m_i^0: U \rightarrow X$ tal que $m_i^0(u) = u_i$ define el epimorfismo $m_i: G^* \rightarrow G - S$, $m_i = \langle m_i^0, \hat{m}_i^0 \rangle$ y S conjunto de salidas de G .

COROLARIO 2. Todo multigrafo G sin salidas es imagen homomórfica de su grafo adjunto. Más precisamente $G = m_i(G^*)$.

COROLARIO 3. Todo grafo funcional ($d_x^+ = 1$) es isomorfo a su grafo adjunto y $G^* = m_i^{-1}(G)$.

EJEMPLO.



m_i^0	
a	1
b	1
c	2
d	3
e	4
f	3
g	3
h	6

m_i^1	
(a,c)	a = (1,2)
(b,c)	b = (1,2)
(c,d)	c = (2,3)
(c,f)	c = (2,3)
(c,g)	c = (2,3)
(d,e)	d = (3,4)
(e,e)	e = (4,4)
(f,a)	f = (3,1)
(f,b)	f = (3,1)
(h,c)	h = (6,2)

$m_i(G^*)$ coincide con G excluidos su vértice (y su arco) salida. Nótese que los arcos $(f,a), (f,b)$ de G^* se aplican en el arco f de G y que los arcos $(a,c), (b,c)$ se aplican en arcos paralelos de G .

Proposiciones análogas a las anteriores pueden obtenerse sustituyendo, respectivamente, homomorfismo inicial y salida por homomorfismo final y entrada, o grafo funcional ($d_x^+ = 1$) por grafo inyectivo ($d_x^- = 1$).

Formulaciones equivalentes fueron dadas en (38). Ver también (120).

De 5.3.2 y la propiedad análoga correspondiente al homomorfismo final se deduce :

5.3.3. Si G es grafo funcional (inyectivo) entonces $m_f \circ m_i^{-1}$ ($m_i \circ m_f^{-1}$) define un epimorfismo $G \rightarrow G-E$ ($G \rightarrow G-S$).

EJEMPLO.



	m_i^0	m_f^0		m_i^1	m_f^1		$m_f^0 \circ (m_i^0)^{-1}$		$m_f^1 \circ (m_i^1)^{-1}$
a	1	2	(a,b)	a	b	1	2	a	b
b	2	3	(b,c)	b	c	2	3	b	c
c	3	4	(c,d)	c	d	3	4	c	d
d	4	2	(d,b)	d	b	4	2	d	b

4. ISOMORFISMO ENTRE G Y G^* .

Heuchenne (38) demostró que si G es conexo finito e isomorfo a su adjunto entonces G no puede tener simultáneamente entradas y salidas.

Por otra parte es fácil ver que :

5.4.1. Si G es finito, carece de salidas y es isomorfo a su adjunto entonces G es funcional.

De 5.4.1 y 5.3.2. Corol. 3 resulta que un grafo finito sin salidas es isomorfo a su adjunto si y sólo si es funcional. Una propiedad análoga vale para grafos inyectivos sin entradas. De donde :

5.4.2. Un multigrafo finito conexo es isomorfo a su grafo adjunto si y sólo si es funcional o inyectivo.

COROLARIO. Si G es fuertemente conexo, G es isomorfo a su adjunto si y sólo si $d_x^- = d_x^+ = 1$, para todo vértice x .

Es decir un multigrafo finito conexo G es isomorfo a su adjunto si y sólo si G es un camino cerrado elemental α con una familia, eventualmente

vacía, de arborescencias (anti-arborescencias) disjuntas y cada una de ellas con raíz en un vértice de α .

La importante propiedad precedente fue demostrada en 1964 por Heuchenne (38). Había sido establecida previamente en 1960 por Harary-Norman (26) para el caso de multigrafos sin bucles. En 1965 Murachini-Ghirlanda (44) la reencontraron para los grafos conexos carentes de arcos opuestos. La caracterización de grafos isomorfos con su adjunto fue también estudiada por Beineke (52) y por Aigner (50) quien a partir del corolario precedente demostró:

5.4.3. Un multigrafo que carece de vértices aislados es isomorfo a su grafo adjunto si y sólo si cada una de sus componentes conexas es un grafo funcional o un grafo inyectivo.

El resultado anterior puede deducirse de 5.4.2 pues si G carece de vértices aislados y $G \cong G^*$ entonces cada componente conexa de G tiene por adjunto una única componente conexa de G^* .

Observemos que de acuerdo con lo indicado en (26), (38), (50), (88) lo precedente no puede extenderse al caso de multigrafos infinitos ni al de aquéllos con vértices aislados. No obstante y de acuerdo con lo indicado por Hemminger (88) los multigrafos funcionales (inyectivos) son de interés para el isomorfismo en cuestión también en el caso infinito.

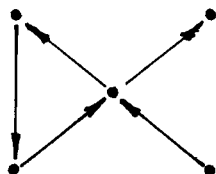
Una condición necesaria para la existencia de isomorfismos entre G y su adjunto, si G es finito, carece de bucles y contiene sólo dos componentes conexas, una de las cuales es un vértice aislado, fue dado por Zamfirescu (84).

Los multigrafos isomorfos a su adjunto son caso particular de los que tienen adjuntos iterados periódicos, es decir tales que $A^k(G) \cong A^{m+k}(G)$ para ciertos enteros $m > 0$ fijo, $k \geq 0$ ($A^0(G) = G$).

El estudio de éstos, para el caso finito, fue comenzado por Balconi (60) y Beineke (52) (ver también (45)). En 6.2.8 reproducimos la caracterización dada en (52), (97), (119). En (97) Hemminger extendió su estudio a los multigrafos infinitos y completó su descripción para el caso finito. Dio además una evaluación del período en términos de la "configuración básica" de G . La determinación de los multigrafos infinitos de período uno ha sido completada por Beineke y Hemminger (111).

Nótese que si G contiene un único circuito y $k > 1$ es el menor entero tal

que $A^i(G) \cong A^{i+k}(G)$ ($i \geq 0$) el grafo $H = \bigcup_{j=1}^{i+k-1} A^j(G)$ es isomorfo a su ad junto y por lo tanto es de período uno. En (119) se observa que todo grafo de período uno es de la forma indicada precedentemente y se ejemplifica lo dicho con el siguiente grafo de período tres.



CAPITULO VI

GRAFOS (k,j) -ADJUNTOS Y GRAFOS k -ADJUNTOS.

En este capítulo se definen los grafos (k,j) -adjuntos ($k > j \geq 0$), que llamaremos k -adjuntos si $j=k-1$, y se dan algunas propiedades que extienden otras ya vistas en el Capítulo III. De la proposición 6.1.1 resulta que el grafo k -adjunto de G coincide con el que se obtiene a partir de G aplicando k veces el operador de adjunción. En la proposición 6.3.6 se dan condiciones suficientes y condiciones necesarias para que un grafo sea k -adjunto de un grafo carente de entradas y de salidas.

1. DEFINICIONES Y OBSERVACIONES BASICAS.

Dado el multigrafo G y los enteros k,j tales que $k > j \geq 0$ sea ${}^{k,j}G$ el grafo cuyos vértices son los caminos de G (no necesariamente simples) de longitud k y cuya relación de precedencia ${}^{k,j}\Gamma$ está definida por: $y \in {}^{k,j}\Gamma(x)$ si y sólo si el j -subcamino final de x coincide con el j -subcamino inicial de y (no necesariamente $x \neq y$). El grafo así obtenido se dirá (k,j) -adjunto de G . En particular, si $j=k-1$ notaremos kG en vez de ${}^{k,k-1}G$ y diremos que kG es el grafo k -adjunto de G . La relación de precedencia será notada ${}^k\Gamma$.

Es obvio que ${}^{k,j}G = \emptyset$ si y sólo si G carece de caminos de longitud k y puesto que el vértice inicial (final) de cada arco puede interpretarse como 0-camino inicial (0-camino final) resulta que la noción de "grafo adjunto" definida en el Capítulo III coincide con la de $(1,0)$ -adjunto. Luego $G^* = {}^{1,0}G = {}^1G$. Observemos que el caso $j=k$ no es considerado. La extensión natural de la definición dada nos llevaría en este caso a un grafo cuyos arcos serían todos bucles.

De la definición pueden deducirse:

- a) Cada arco de ${}^{k,j}G$ representa un camino de longitud $2k-j$ en G y recíprocamente. Más precisamente, el arco (p,q) de ${}^{k,j}G$ representa al camino de G obtenido al extender el camino p (de longitud k) con el $(k-j)$ -subcamino final de q . Obsérvese que si $p=q$ el j -subcamino inicial de p coincide con su j -subcamino final y por lo tanto el $(k-j)$ subcamino inicial de p es un camino cerrado.
- b) Cada bucle de G determina un bucle en ${}^{k,j}G$. La recíproca sólo es válida si $j=k=1$.

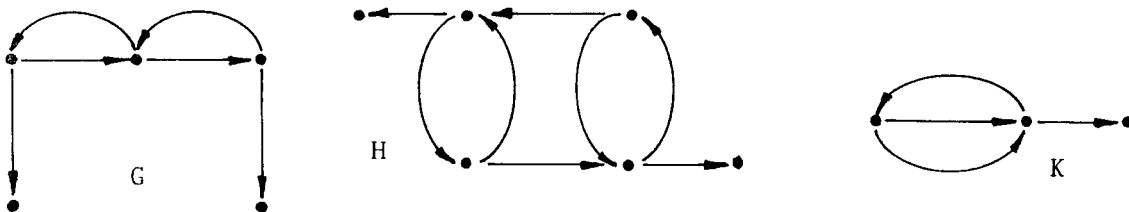
Las afirmaciones precedentes extienden 3.1.1. Si en la definición anterior nos hubiéramos limitado a considerar caminos simples serían falsas. Por ejemplo, si G contiene arcos opuestos u, u' y $p = u, u'$; $q = u', u$ en ${}^{2,1}G$ el arco (p, q) representa al camino u, u', u que no es simple.

6.1.1. $({}^{k,j}G)^* = {}^{2k-j,k}G$ cualesquiera sean el multigrafo G y los enteros $k > j \geq 0$. En particular, $({}^kG)^* = {}^{k+1}G$.

DEMOSTRACION. Cada vértice de $({}^{k,j}G)^*$ es un arco de ${}^{k,j}G$, es decir es un camino de longitud $2k-j$ en G y recíprocamente. Por lo tanto los vértices de $({}^{k,j}G)^*$ coinciden con los de ${}^{2k-j,r}G$ cualquiera sea $0 \leq r < 2k-j$. Además, en $({}^{k,j}G)^*$ existe un arco (x, y) si y sólo si en G el k -subcamino final del representado por x coincide con el k -subcamino inicial del representado por y . Luego los arcos de $({}^{k,j}G)^*$ coinciden con los arcos de ${}^{2k-j,k}G$. La validez de la afirmación restante resulta de lo anterior aplicado a $j=k-1$.

De la proposición anterior es inmediato que la noción de grafo k -adjunto puede darse también por recurrencia mediante $G = A^0(G) = {}^0G$, ${}^kG = A({}^{k-1}G) = A^k(G)$, $k \geq 1$.

Del ejemplo siguiente resulta que $H = {}^kG$ no implica G adjunto, aún cuando H sea $k+1$ adjunto.



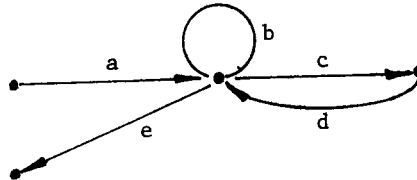
En efecto, H es adjunto de G y 2-adjunto de K pero G no es adjunto. Obsérvese que identificando ambas salidas de G se obtiene el adjunto de K .

Todo grafo H ejemplo de lo anterior debe contener al menos dos entradas o al menos dos salidas, caso contrario de $H = {}^kG = {}^{k+1}K$ y consecuencia de 4.2.3 resulta que los multigrafos resumidos ${}^{k-1}G$, kK son isomorfos y por reiteración del razonamiento se tiene finalmente que G es ad junto de K .

Una noción similar a la de adjunto iterado pero que excluye la representación de los circuitos de G fue utilizada en (112) para determinar, una vez elegidos en G los conjuntos de vértices S y T ($S \cap T = \emptyset$), los caminos desde S hasta T que tienen en S (T) únicamente su vértice inicial (final). Para otros trabajos relativos a la misma noción ver (117), (129).

2. EJEMPLO Y PROPIEDADES.

Consideremos ahora el grafo G dado por el siguiente esquema:



Sus caminos de longitud dos son: A = a,b; B = a,c; C = a,e; D = b,b; E = b,c; F = b,e; G = c,d; H = d,b; I = d,c; J = d,e y sus caminos de longitud tres son: 1 = a,b,b; 2 = a,b,c; 3 = a,b,e; 4 = a,c,d; 5 = b,b,b; 6 = b,b,c; 7 = b,b,e; 8 = b,c,d; 9 = c,d,b; 10 = c,d,c; 11 = c,d,e; 12 = d,b,b; 13 = d,b,c; 14 = d,b,e y 15 = d,c,d.

Por lo tanto :

	$2,0_{\Gamma}$	$2,1_{\Gamma} = 2_{\Gamma}$		$3,0_{\Gamma}$	$3,1_{\Gamma}$	$3,2_{\Gamma} = 3_{\Gamma}$
A	D E F G	D E F	1	5 al 11	5 al 8	5 al 7
B	H I J	G	2	12 al 15	9 al 11	8
C	---	---	3	----	----	----
D	D E F G	D E F	4	5 al 11	12 al 15	9 al 11
E	H I J	G	5	5 al 11	5 al 8	5 al 7
F	---	---	6	12 al 15	9 al 11	8
G	D E F G	H I J	7	----	----	----
H	D E F G	D E F	8	5 al 11	12 al 15	9 al 11
I	H I J	G	9	5 al 11	5 al 8	12 al 14
J	---	---	10	12 al 15	9 al 11	15
			11	----	----	----
			12	5 al 11	5 al 8	5 al 7
			13	12 al 15	9 al 11	8
			14	----	----	----
			15	5 al 11	12 al 15	9 al 11

En el ejemplo anterior, el bucle (D,D) de $2,0_{\Gamma}$ representa el camino cerrado que resulta de tomar en G cuatro veces consecutivas el bucle b. Además, $2,0_{\Gamma}$ contiene los bucles (G,G),(I,I), que representan, respectivamente, a los caminos cerrados c,d,c,d ; d,c,d,c. En $2,1_{\Gamma}$ el único bucle es (D,D) que determina el bucle b de G.

A su vez en $3,0_{\Gamma}$ sus bucles tienen por soporte los vértices que represen

tan los caminos cerrados de longitud tres en G , a saber: 5; 8; 9 y 13. De estos sólo 5 es generado por un bucle de G . En ${}^{3,1}G$ los bucles tienen por soporte los vértices 5, 10 y 15, que corresponden a los caminos (abiertos o cerrados) de G de longitud tres con primer y último arco iguales. En ${}^{3,2}G$ sólo hay un bucle, éste tiene soporte en el vértice 5 y determina el bucle b de G .

En el ejemplo anterior el camino cerrado de longitud cuatro definido en 2G por $(G,H), (H,D), (D,E), (E,G)$ corresponde al camino abierto de longitud seis c,d,b,b,c,d . Ambos determinan un circuito de longitud cuatro.

Las siguientes propiedades son extensión de otras ya vistas en el Capítulo III (caso $k=1$). Algunas de ellas fueron dadas en (26), (65), (119).

6.2.1. Cada camino μ de G de longitud $L \geq k \geq 1$ define en kG un camino μ' de longitud $L-k$ y recíprocamente. μ' es cerrado si y sólo si el k -subcamino inicial y el k -subcamino final de μ coinciden. Por otra parte, si μ es simple, μ' es elemental; la recíproca vale sólo si $k=1$ y μ' es abierto.

6.2.2. Cada circuito α de longitud $L \geq k \geq 1$ determina en kG un circuito α' de longitud L y recíprocamente. Si α es simple, α' es elemental; la recíproca es válida sólo si $k=1$.

6.2.3. Si G es fuertemente conexo no trivial, también lo es kG . La recíproca vale si G carece de componentes todos cuyos caminos son de longitud menor que k . Si G es conexo, sin entradas y sin salidas también lo es kG y recíprocamente.

6.2.4. Si G es conexo, carece de entradas y de salidas y para todo camino $a \rightarrow b$ de longitud $k \geq 1$ se tiene: $d_a^- = d_b^+$ entonces kG es euleriano y ${}^{k+1}G$ es hamiltoniano.

6.2.5. Si nos limitamos a considerar multigrafos sin vértices aislados las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) G es conexo y regular.
- b) kG es conexo y regular, $k \geq 1$.
- c) kG es euleriano y regular, $k \geq 1$.
- d) kG es hamiltoniano y regular, $k \geq 1$.

Extendiendo lo observado en pág. 55 cabe notar que de kG euleriano (hamiltoniano) no puede deducirse que también lo sean ${}^{k-1}G$ ó ${}^{k+1}G$. Basta al efecto considerar los adjuntos sucesivos de:



En (113) Roberts caracteriza los multigrafos en cuya sucesión de adjuntos iterados hay una infinidad de hamiltonianos (o equivalentemente de eulerianos). Si dicha sucesión contiene dos grafos hamiltonianos (eulerianos) entonces contiene una infinidad.

En cambio para el caso no orientado es suficiente que la sucesión de adjuntos iterados contenga uno hamiltoniano, para contener infinitos.

6.2.6. kG es vacío (disconexo) para k suficientemente grande si y sólo si G carece de caminos cerrados (contiene dos caminos cerrados que no están conectados por caminos).

6.2.7. El número de vértices de kG es arbitrariamente grande para k suficientemente grande si y sólo si G contiene al menos dos caminos cerrados y un camino (quizás de longitud nula) que los conecte.

6.2.8. G tiene adjuntos iterados periódicos (${}^kG \cong {}^{k+m}G$ para ciertos $m > 0$ fijo, $k \geq 0$) si y sólo si contiene caminos cerrados, pero no hay dos de ellos conectados por caminos (aún de longitud nula).

Generalizando 4.2.3. se tiene:

6.2.9. Si el multigrafo G carece de componentes conexas en las cuales el camino de mayor longitud tiene longitud menor que k , entonces G está unívocamente determinado por su grafo k -adjunto H si y sólo si H contiene a lo sumo una entrada y una salida. En tal caso, G contiene un único camino de longitud k con vértice inicial (final) en el vértice de entrada (salida) de G .

En efecto, si H contiene al menos dos entradas (salidas) los correspondientes caminos de longitud k en G pueden suponerse con igual o con distinto vértice inicial (final) y entonces G no está unívocamente determinado. Caso contrario, de $H = {}^kG$ y lo afirmado en 4.2.3 resulta que ${}^{k-1}G$ -supuesto sin vértices aislados - está unívocamente determinado. En tal caso ${}^{k-1}G$ contiene a lo sumo un arco entrada y a lo sumo un arco salida. Reiterando el razonamiento anterior resulta la unicidad de G con las condiciones requeridas.

3. GRAFOS k -ADJUNTOS.

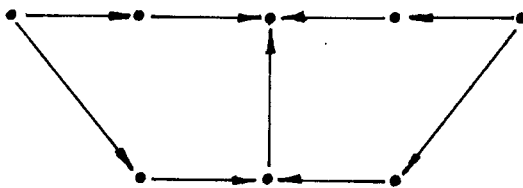
Hemminger introdujo con el nombre de "n-ésima condición de Heuchenne" (ver (88), (119)) la siguiente generalización de c) en 4.1.1.

"Si hay caminos vértice disjuntos de longitud n desde u hasta v, desde u hasta w y desde x hasta v entonces hay otro camino de longitud n vértice disjunto con los anteriores desde x hasta w".

Por inducción se deduce:

6.3.1. Si H es k-adjunto, en H se satisfacen las primeras k condiciones de Heuchenne.

Del siguiente esquema, que es adjunto pero no 2-adjunto, resulta que la recíproca de 6.3.1 es falsa.

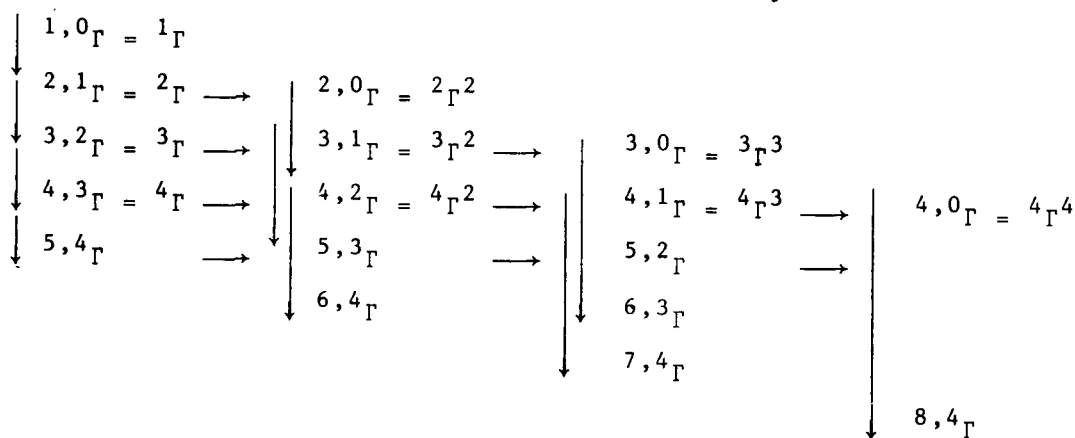


Con el objeto de buscar una caracterización de los grafos k-adjuntos similar a la dada para el caso k=1 observemos que de las definiciones respectivas se deduce:

6.3.2. La relación k, j_{Γ} de precedencia del grafo (k, j)-adjunto de G es de adjunción.

6.3.3. Cualquiera sea $1 \leq h \leq k$ se tiene $y \in k_{\Gamma}^h(x)$ si y sólo si $y \in k, j_{\Gamma}(x)$ con $j = k-h$. En consecuencia $k_{\Gamma}^h = k, k-h_{\Gamma}$.

De las prop. 6.1.1 y 6.3.3 resulta que la conexión existente entre las distintas relaciones k, j_{Γ} (todas son de adjunción) puede visualizarse por el siguiente esquema, en el cual cada flecha horizontal corresponde a una operación de composición y las restantes indican adjunción.



El esquema anterior puede extenderse indefinidamente si y sólo si G admite circuitos.

6.3.4. a) Si el grafo $\langle X, \Delta \rangle$ es k-adjunto de un multigrafo G, la relación Δ^h es de adjunción, cualquiera sea $1 \leq h \leq k$.

b) No siempre lo afirmado en a) puede extenderse a k+1.

c) La recíproca de a) sólo es válida para k=1.

DEMOSTRACION. La validez de a) es consecuencia inmediata de lo visto en 6.3.2 y 6.3.3. La de b) resulta de lo observado en la pág.45 . Que la recíproca de a) se cumple para k=1 es consecuencia del criterio de caracterización de grafos adjuntos (prop. 4.2.1), y que no vale en general de considerar el grafo $M = \langle X, \Delta \rangle$ con $X = \{a, b, c\}$, $\Delta(a) = \{b, c\}$, $\Delta(b) = \Delta(c) = a$, pues aún cuando Δ y Δ^2 son relaciones de adjunción, M no es 2-adjunto. En efecto, si existiera un multigrafo N del cual M fuera 2-adjunto, N tendría exactamente tres caminos de longitud dos: $a = p, q$; $b = q, r$; $c = q, s$ (pues $\Delta(a) = \{b, c\}$). Pero además de $\Delta(b) = \Delta(c) = a$ se infiere $r = s = p$, es decir $b = c$ en contradicción con lo supuesto.

COROLARIO. Si $\langle X, \Delta \rangle$ es un grafo k-adjunto, cualquiera sea $1 \leq h \leq k$, la relación Δ^h determina una partición de X-E (E conjunto de entradas) con clases de la forma $\Delta^h(x)$ y una participación de X-S (S conjunto de salidas) con clases de la forma $\Delta^{-h} \circ \Delta^h(x)$. Dichas particiones determinan sobre el conjunto de arcos la partición de clases $\Delta^{-h} \circ \Delta^h(x) \times \Delta^h(x)$.

Puesto que λ^2 del ejemplo de la pág.68 no es de adjunción se deduce que a) de la prop. 6.3.4 no puede extenderse al caso de grafos (k,j)-adjuntos.

En la demostración de la proposición anterior hemos elegido una relación no singular para demostrar que la recíproca de a) es falsa si $k \geq 2$. Para ver que también es falsa aún considerando adjuntos de grafos propiamente dichos podemos dar la siguiente relación de adjunción singular:

x	a	b	c	d	e	f	g
$\lambda(x)$	a, b, c	d, e	f	-	g	g	-

Puede verificarse que también λ^2 es de adjunción, no obstante ningún grafo G del cual $H = \langle X, \lambda \rangle$ es adjunto es a su vez adjunto. Por lo tanto H no es 2-adjunto.

Como ejemplo alternativo de la situación anterior puede elegirse el grafo (X, Γ) dado en la pág.55 . En este caso, y procediendo en forma distinta que en el Capítulo IV, vemos que $\langle X, \Gamma \rangle$ no es 2-adjunto, pues si lo fuera existiría un multigrafo con los siguientes caminos de longitud dos: $a = 1,1$, $b = 1,2$, $c = 2,3$, $d = 3,4$, $e = 4,4$, $f = 5,3$, $g = 6,5$, $h = 6,6$ e $i = 5,8$, y esto implicaría la existencia de otro camino de longitud dos, el 2,8.

De lo precedente es obvio inferir que para deducir si un cierto grafo es k -adjunto ($k > 1$) no basta considerar sólo las distintas potencias $1 \leq h \leq k$ de su relación de precedencia. Según veremos (prop. 6.3.6) ello es suficiente para algunos grafos carentes de entradas y de salidas.

Dada una relación $R \subseteq X \times X$ sea $\underline{R} \subseteq (X \times X) \times (X \times X)$ la relación definida por $((a,b), (b,c)) \in \underline{R}$ si y sólo si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$.

Se ve que si R es la relación de precedencia de un grafo G entonces \underline{R} es la relación de precedencia de su grafo adjunto, y por lo tanto es de adjunción.

Para todo $h \geq 1$ se verifica:

- A) $(p,q) \in \underline{R}^h(a,b)$ si y sólo si $q \in R(p)$, $p \in R^{h-1}(b)$, $b \in R(a)$.
- B) Si R^h es relación no singular y $R(x) \neq \emptyset$, $R^{-1}(x) \neq \emptyset$ cualquiera sea x , entonces \underline{R}^{h+1} es relación de adjunción no singular.
- C) Si S^h es relación de adjunción tal que $S(z) \neq \emptyset$, $S^{-1}(z) \neq \emptyset$ para todo z y existe R tal que $S = \underline{R}$ entonces R puede restringirse a un conjunto tal que $R(x) \neq \emptyset$, $R^{-1}(x) \neq \emptyset$ cualquiera sea x y donde R^{h-1} es relación de adjunción.

En efecto, si $R(x) = R^{-1}(x) = \emptyset$, x no interesa para la determinación de \underline{R} . Por otra parte, si $R(x) \neq \emptyset$ de $S = \underline{R}$ y $S^{-1}(z) \neq \emptyset$ se deduce $R^{-1}(x) \neq \emptyset$, y análogamente de $R^{-1}(x) \neq \emptyset$ resulta $R(x) \neq \emptyset$.

Así entonces, de $R(x) \neq \emptyset$, $R^{-1}(x) \neq \emptyset$ cualquiera sea x , por A) puede afirmarse que $r \in R^{h-1} \circ (R^{h-1})^{-1} \circ R^{h-1}(b)$ si y sólo si $(r,s) \in S^h \circ (S^h)^{-1} \circ S^h(a,b)$. Como además S^h es de adjunción, $r \in R^{h-1} \circ (R^{h-1})^{-1} \circ R^{h-1}(b)$ si y sólo si $r \in R^{h-1}(b)$. El razonamiento anterior es válido cualquiera sea b y por lo tanto R^{h-1} es de adjunción.

Si existen entradas o salidas, la propiedad C) es falsa. Consideremos, por ejemplo, el primero de los grafos dados a continuación del corolario de la prop.6.3.4 y su grafo opuesto ($S = \lambda$).

6.3.5. Si $H = \langle X, \Delta \rangle$ carece de entradas y de salidas y Δ^h es relación de adjunción cualquiera sea $1 \leq h \leq k$ y es además singular para $1 \leq h \leq k-1$ entonces H es k -adjunto de un grafo sin entradas y sin salidas, unívocamente determinado.

DEMOSTRACION. Por las hipótesis hechas, H es adjunto de un grafo G_1 unívocamente determinado. Si notamos R_1 la relación de precedencia de G_1 y en C) hacemos $S = \Delta = \underline{R}_1$ resulta que R_1^h es de adjunción cualquiera sea $1 \leq h \leq k-1$.

Como G_1 carece de entradas y de salidas, por B) y razonando por el absurdo se tiene que R_1^h ($1 \leq h \leq k-2$) es relación de adjunción singular.

Así entonces R_1^h verifica para $1 \leq h \leq k-1$ las mismas hipótesis que fueron supuestas para Δ con $1 \leq h \leq k$, y el razonamiento anterior puede repetirse. Luego de k reiteraciones se determina un grafo G del cual H es k -adjunto.

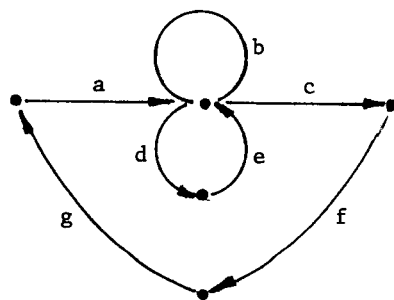
De 6.3.4 , 6.3.5 y 4.4.1.

6.3.6. Sea $G = \langle X, \Delta \rangle$ un grafo sin entradas y sin salidas. Si G es k -adjunto de un grafo entonces Δ^h es relación de adjunción para $1 \leq h \leq k$ y Δ es singular. Recíprocamente, si Δ^h es relación de adjunción para $1 \leq h \leq k$ y es singular para $1 \leq h \leq k-1$ entonces G es k -adjunto de un grafo.

De 6.3.6 y para $k=2$ se reencuentra la caracterización de los adjuntos de grafos carentes de entradas y de salidas dada por el Corolario de la prop. 4.4.3.

Obsérvese que si $k > 1$ aún cuando $\langle X, \Delta \rangle$ sea k -adjunto de un grafo sin entradas y sin salidas no puede asegurarse que Δ^h es singular para todo $1 \leq h \leq k-1$.

En efecto, dado G :



su grafo 4-adjunto $\langle X, \Delta \rangle$ contiene entre otros los vértices $p = a, b, b, c$;
 $q = a, d, e, c$; $r = c, f, g, a$. Por 6.3.3 de $\Delta = {}^4\Gamma$ resulta $\Delta^3 = {}^4\Gamma^3 = {}^4,1\Gamma$ de
donde $\{p, q\} \subseteq \Delta^3(r) \cap (\Delta^{-1})^3(r)$ y por lo tanto Δ^3 no es singular.

CAPITULO VII

GRAFOS ADJUNTOS DE GRADO n Y MULTIGRAFOS CONDICIONADOS.

En los párrafos 1 y 2 introducimos las nociones de cápsula adjunta y grado de adjunción de un grafo y damos algunas de sus propiedades. Ellas nos permiten enunciar en el 3 condiciones necesarias para que un grafo orientado sea hamiltoniano. En el 4 se consideran multigrafos condicionados, noción que hace posible pensar a todo grafo como adjunto de un multigrafo con condicionamientos. Más precisamente, se tiene que si G es adjunto de grado n del multigrafo H entonces H con un condicionamiento adecuado tiene por adjunto (de grado 1) al grafo G .

En el párrafo 5 se consideran dos métodos, cada uno de los cuales permite dado un grafo G construir un grafo adjunto H , ligado con G . El grafo H depende del procedimiento utilizado y es minimal en cierto sentido que depende del método empleado. Uno de ellos es consecuencia directa de lo visto en los párrafos 1 y 2, el otro está inspirado en un trabajo de Richards (58). Estos procedimientos se muestran útiles en problemas donde interesa traducir las relaciones de precedencia entre los vértices de un grafo a las de precedencia entre los arcos de un multigrafo. Ya lo mencionamos en la Introducción al referirnos al grafo etapas y al grafo tareas asociado a un mismo problema.

1. CAPSULA ADJUNTA.

Es inmediato que cualquiera sea el conjunto X la relación universal definida en él es de adjunción. En consecuencia, cualquiera sea $\Gamma \subseteq X \times X$ la familia de las relaciones de adjunción que contienen a Γ es no vacía y de acuerdo con 3.2.9 la intersección de todas ellas es también una relación de adjunción que llamaremos *cápsula adjunta de Γ* y notaremos $\bar{\Gamma}$.

Por otra parte, dada una relación $\Gamma \subseteq X \times X$, si definimos por recurrencia las relaciones $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_{j+1} = \Gamma_j \circ \Gamma_j^{-1} \circ \Gamma_j$, $j \geq 1$, tenemos:

7.1.1. $\Gamma_j \subseteq \Gamma_{j+1}$ cualquiera sea $j \geq 1$.

7.1.2. $\Gamma_j = \Gamma_{j+1}$ si y sólo si Γ_j es relación de adjunción.

7.1.3. $\Gamma_j \subseteq \bar{\Gamma}$ cualquiera sea $j \geq 1$.

En efecto, $\Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$ y como $\bar{\Gamma}$ es de adjunción $\Gamma_2 = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$ y el razonamiento puede reiterarse.

7.1.4. Si para cierto $x \in \Gamma_i(x) = \Gamma_{i+1}(x)$ entonces:

a) cualquiera sea $y \in \Gamma_i^{-1} \circ \Gamma_i(x)$ es $\Gamma_i(y) \subseteq \Gamma_i(x)$; $\Gamma_{i+1}(y) = \Gamma_i(x)$.

b) $\Gamma_{i+1}^{-1} \circ \Gamma_{i+1}(x) = \Gamma_i^{-1} \circ \Gamma_i(x)$.

c) $\Gamma_i(x) = \Gamma_j(x)$ para todo $j \geq i$.

7.1.5. Cualquiera sea $n \geq 1$, $\Gamma_n = \Gamma_1 \circ (\Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_1)^{k_n} = (\Gamma_1 \circ \Gamma_1^{-1})^{k_n} \circ \Gamma_1$ con $k_n = \frac{3^{n-1} - 1}{2}$.

2. GRADO DE ADJUNCION.

Dado $G = \langle X, \Gamma \rangle$ la relación Γ o el grafo G se dirán *adjuntos de grado* n si n es el menor valor de j ($j \geq 1$) para el cual $\Gamma_j = \Gamma_{j+1}$ y de *pos-clase* h (resp. de *pre-clase* h) si h es el menor valor de j ($j \geq 0$) para el cual $(\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^j = (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{j+1}$ (resp. $(\Gamma \circ \Gamma^{-1})^j = (\Gamma \circ \Gamma^{-1})^{j+1}$).

Es fácil ver que:

- ◆ Γ es adjunta de grado n si y sólo si n es el menor índice tal que $\Gamma_n = \bar{\Gamma}$.
- ◆ Γ y Γ^{-1} son adjuntas de igual grado.
- ◆ Si Γ es de pos-clase h (resp. de pre-clase h) entonces $\bar{\Gamma} = \Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h$ (resp. $\bar{\Gamma} = (\Gamma \circ \Gamma^{-1})^h \circ \Gamma$).

Dado un grafo $G = \langle X, \Gamma \rangle$ a la cadena de relaciones $\Gamma = \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_n = \bar{\Gamma}$ está canónicamente asociada la de grafos $G_i = \langle X, \Gamma_i \rangle$, $1 \leq i \leq n$, donde cada G_i es subgrafo cubriente de G_j , $j \geq i$.

7.2.1. Todo grafo $G = \langle X, \Gamma \rangle$ es subgrafo cubriente del grafo adjunto $\bar{G} = \langle X, \bar{\Gamma} \rangle$ que llamaremos la cápsula adjunta de G . \bar{G} es el grafo adjunto minimal que contiene a G como subgrafo cubriente.

7.2.2. Dado un grafo no discreto $G = \langle X, \Gamma \rangle$, Γ es una relación adjunta de grado n con

$$n \leq \min_{x \in A} (\min_{x \in A} |\bar{\Gamma}(x)|, \min_{x \in B} |\bar{\Gamma}^{-1}(x)|) \leq \min(|X-E|, |X-S|)$$

donde $A = \{x \in X: \Gamma_{n-1}(x) \neq \bar{\Gamma}(x)\}$ $B = \{x \in X: \Gamma_{n-1}^{-1}(x) \neq \bar{\Gamma}^{-1}(x)\}$
 y $E(S)$ denota el conjunto de entradas (salidas) de G .

DEMOSTRACION. Si Γ es adjunta de grado n se tiene la cadena
 $\Gamma = \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_n = \bar{\Gamma}$ con todas las inclusiones propias.

Para todo $x \in X$ tal que $\Gamma_{n-1}(x) \neq \bar{\Gamma}(x)$ por 7.1.4 - c) se verifica
 $\Gamma(x) \subset \Gamma_2(x) \subset \Gamma_3(x) \subset \dots \subset \Gamma_{n-1}(x) \subset \bar{\Gamma}(x)$ con todas las inclusiones pro-
 pias y por lo tanto $n \leq \min_{x \in A} |\bar{\Gamma}(x)| \leq |X-E|$. Por otra parte, como Γ y Γ^{-1}
 son adjuntas de igual grado, reiterando el razonamiento para Γ^{-1} se deduce que
 $n \leq \min_{x \in B} |\Gamma^{-1}(x)| \leq |X-S|$. De ambas cotas resulta la que se quiere demostrar.

COROLARIO. Todo grafo finito es adjunto de grado n para algún $1 \leq n \leq |x|$.

La relación dada por:

x	a	b	c	d	e
$\Gamma(x)$	c	c,d,e	-	-	-

es adjunta de grado dos. Para ella $A = \{a\}$, $B = \{d,e\}$ y se tiene que
 $3 = \min_{x \in A} |\bar{\Gamma}(x)| > \min_{x \in B} |\bar{\Gamma}^{-1}(x)| = 2$.

La pos-clase (pre-clase) de una relación está ligada con su grado de ad-
 junción.

7.2.3. Si Γ es una relación adjunta de grado n entonces es de pos-clase
 (pre-clase) h , con h perteneciente al intervalo $[1+k_{n-1}, 1+k_n]$, $k_0 = -1$,
 $k_s = \frac{3^s - 1}{2}$.

DEMOSTRACION. Si Γ es adjunta de grado n se tiene $\Gamma_n = \Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{k_n} =$
 $= \Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{k_n+1}$ pues $\Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{1+k_n} \subseteq \Gamma_{n+1}$. Luego $(\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{1+k_n} =$
 $= (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{2+k_n}$ y por lo tanto Γ es de pos-clase $h \leq 1+k_n$.

Si fuera de pos-clase $h \leq k_{n-1}$ se tendría $(\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{k_{n-1}} = (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{1+3k_{n-1}}$
 $= (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{k_n}$ de donde $\Gamma_{n-1} = \Gamma_n$ en contradicción con lo supuesto.

Luego $h > k_{n-1}$ y entonces $h \in [1+k_{n-1}, 1+k_n]$. Para acotar la pre-clase de Γ puede razonarse en forma similar.

COROLARIO. El grado de adjunción de una relación está unívocamente determinado por su pos-clase (pre-clase) h , excepto si $h = 1+k_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}$ para algún $n \geq 1$.

Las siguientes relaciones muestran que para $n=1, n=2$ las cotas dadas no pueden mejorarse

R ₁	
a	b
b	a

R ₂	
a	b,c
b	a
c	a

R ₃	
a	c,d
b	d
c	-
d	-

R ₄	
a	d,e
b	e,f
c	e,f
d	-
e	-
f	-

R ₅ = R ₄ ⁻¹	
a	-
b	-
c	-
d	a
e	a,b,c
f	b,c

En efecto, puede verse que satisfacen:

	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅
grado	1	1	2	2	2
pre-clase	0	1	1	2	1
pos-clase	0	1	1	1	2

3. GRAFOS ORIENTADOS HAMILTONIANOS - CONDICION NECESARIA.

Es inmediato que si un grafo es hamiltoniano también lo es su cápsula adjunta, por lo tanto el criterio de caracterización de adjuntos hamiltonianos dado en el Capítulo IV (ver 4.4.6) nos permite deducir:

7.3.1. Si $G = \langle X, \Gamma \rangle$ es hamiltoniano, $|\bar{\Gamma}(x)| = |\bar{\Gamma}^{-1} \circ \bar{\Gamma}(x)|$ para todo $x \in X$.

7.3.2. Dado un grafo $G = \langle X, \Gamma \rangle$ de pos-clase h , conexo sin salidas ni entradas, su cápsula adjunta $\bar{G} = \langle X, \bar{\Gamma} \rangle$ admite circuito hamiltoniano si y

sólo si $|\Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)| = |(\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)|$ cualquiera sea $x \in X$.

DEMOSTRACION. Por hipótesis sobre Γ sabemos que $\bar{\Gamma} = \Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h$ de donde $\bar{\Gamma}^{-1} \circ \bar{\Gamma} = (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^{1+2h} = (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h$.

En consecuencia $|(\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)| = |\Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)|$ equivale a $|\bar{\Gamma}^{-1} \circ \bar{\Gamma}(x)| = |\bar{\Gamma}(x)|$ y la demostración termina por aplicación de 4.4.6.

7.3.3. Si un grafo $\langle X, \Gamma \rangle$ de pos-clase h admite circuito hamiltoniano existe una biyección $\varphi \subset \Gamma$ tal que $\varphi((\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)) = \Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)$.

DEMOSTRACION. Si G es hamiltoniano también lo es \bar{G} y en consecuencia por la prop.7.3.2. se tiene $|\Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)| = |(\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)|$. Los arcos del circuito hamiltoniano de G definen una biyección que satisface lo indicado.

Para $h \geq 1$ la condición precedente no es suficiente según resulta del siguiente ejemplo, donde Γ es de pos-clase $h=1$ pero no de adjunción.

x	a	b	c	d	e	f
$\Gamma(x)$	b	c	a	e	c, f	b, d
$\varphi(x)$	b	c	a	e	f	d

Una conocida condición necesaria y suficiente para la existencia de una aplicación inyectiva contenida en una aplicación $A \rightarrow B$ (T. de König - Hall) nos permite enunciar la proposición anterior como sigue:

7.3.4. Si un grafo $\langle X, \Gamma \rangle$ de pos-clase h es hamiltoniano entonces

$$|(\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)| = |\Gamma \circ (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)| \text{ para todo } x, \text{ y para todo}$$

$$A \subseteq (\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x) \text{ se tiene } |A| \leq |\Gamma(A)|.$$

Es sabido que si un grafo $\langle X, \Gamma \rangle$ admite circuito hamiltoniano entonces $\max_{S \subseteq X} \{|S| - |\Gamma(S)|\} = 0$ (21). En esta igualdad se consideran todos los subconjuntos de X en tanto que por la prop.7.3.4. basta analizar los de la forma $(\Gamma^{-1} \circ \Gamma)^h(x)$.

Damos a continuación un algoritmo para verificar si un grafo satisface la condición necesaria para ser hamiltoniano. Su demostración resulta de 7.3.3.

ALGORITMO.

Sea $P = (p_{i,j})$ la matriz de precedencia (de vértices) de $G = \langle X, \Gamma \rangle$ ($p_{i,j} = 1$ si $j \in \Gamma(i)$ y $p_{i,j} = 0$ caso contrario).

ETAPA 1. Se elige una fila arbitraria f_r de P y se aplica la Etapa 2 a $F_1 = \{f_r\}$.

ETAPA 2. Se determina el conjunto C_i ($i \geq 1$) de columnas c_s tales que existe algún $p_{r,s} = 1$ para al menos una fila f_r de F_i y se pasa a la Etapa 3.

ETAPA 3. Se determina el conjunto F_{i+1} de filas f_r tales que existe algún $p_{r,s} = 1$ para al menos una columna $c_s \in C_i$. Si $F_i = F_{i+1}$ se pasa a la Etapa 4, caso contrario se reitera la Etapa 2 para $i+1$ en vez de i .

ETAPA 4. Si $|F_i| = |C_i|$ y existe una biyección $\varphi: F_i \rightarrow C_i$ tal que $\varphi \subset \Gamma$ se pasa a la Etapa 5. Caso contrario se da por terminada la aplicación del algoritmo, pues G no contiene circuito hamiltoniano.

ETAPA 5. Se eliminan en P todas las filas de F_i y todas las columnas de C_i . Si P^* es la matriz así obtenida y $P^* \neq \emptyset$ se reitera la Etapa 1 para $P = P^*$. Si $P^* = \emptyset$ es posible que G sea hamiltoniano.

Notemos que para todo G y cualquiera sea la fila f_r elegida inicialmente, se llega necesariamente a la Etapa 5 ó a la Etapa 4.

4. MULTIGRAFOS CONDICIONADOS.

El concepto que estudiamos en este párrafo tiene en cuenta restricciones que dependen del par de arcos que consideramos y no sólo de la consecutividad de los mismos.

Por ejemplo, en el grafo que queda asociado al sistema de calles y avenidas de una ciudad considerando el sentido de circulación, la regla de tránsito que prohíbe girar a la izquierda (aún cuando el sentido de circulación de la calle a tomar lo permitiera) condiciona en algunos vértices (esquinas) las posibles secuencias de arcos (cuadras) a recorrer.

Precisaremos dicha idea con la siguiente definición:

Dado un multigrafo $G = \langle X, U \rangle$ y fijado en cada uno de sus vértices x un subconjunto $C_x \subseteq U_x^- \times U_x^+$ sea $C = \bigcup_{x \in X} C_x$. El multigrafo G se dice *condicionado por C* si sólo se admiten como consecutivos los pares de arcos u, v tales que $\langle u, v \rangle \in C$. Notaremos $G_C = \langle X, U, C \rangle$.

Es obvio que en ejemplo citado los pares de arcos consecutivos, compatibles con el condicionamiento, corresponden a los pares de cuerdas posibles de recorrer sucesivamente sin faltar a las leyes de tránsito.

Si $C_x = U_x^- \times U_x^+$ diremos que el condicionamiento es de *restricción nula en x* y es claro que todo multigrafo puede considerarse como multigrafo condicionado por un condicionamiento de restricción nula en cada uno de sus vértices.

Para multigrafos condicionados "no interesa" el conjunto de vértices. En efecto, la identificación de dos vértices x, y en un vértice z no altera las relaciones de consecutividad entre los arcos si el condicionamiento en z se define por $C_z = C_x \cup C_y$.

7.4.1. Dados dos multigrafos condicionados $G_1 = \langle X, U, C_1 \rangle$, $G_2 = \langle X, U, C_2 \rangle$ si $C_1 \subseteq C_2$ entonces $(G_1)^*$ es subgrafo cubriente de $(G_2)^*$.

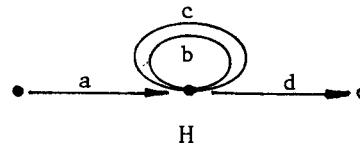
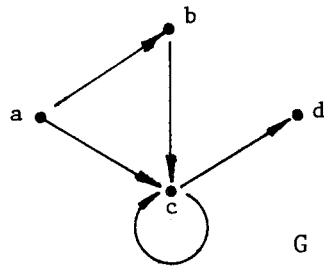
Como cualquiera sea x_i es posible definir $2^{d_i^- \cdot d_i^+}$ subconjuntos distintos en $U_{x_i}^- \times U_{x_i}^+$ se tiene:

7.4.2. Si $G = \langle X, U \rangle$ tiene n vértices existen 2^e multigrafos condicionados $\langle X, U, C \rangle$ distintos cuyos adjuntos respectivos son los 2^e subgrafos cubrientes de G^* , siendo $e = \sum_{i=1}^n d_i^- \cdot d_i^+$.

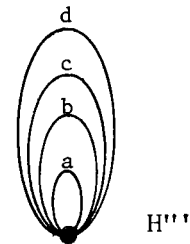
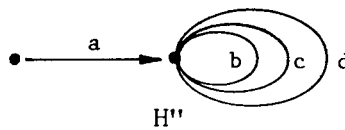
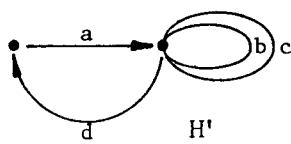
Puesto que cualquiera sea el grafo $G = \langle X, \Gamma \rangle$ su cápsula adjunta $\bar{G} = \langle X, \bar{\Gamma} \rangle$ es grafo adjunto de algún multigrafo H , si en H se define un condicionamiento C tal que $\langle u, v \rangle \in C$ si y sólo si (u, v) es arco de G entonces G es adjunto del multigrafo H condicionado por C , y de aquéllos que puedan obtenerse identificando vértices de H pero conservando el condicionamiento C . El paso de G a \bar{G} equivale a eliminar el condicionamiento en H .

En el siguiente ejemplo $G = \langle X, \Gamma \rangle$ (Γ es adjunta de grado dos), \bar{G} es adjunto de H y G es adjunto de H condicionado por:

$$C = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$$



G es también adjunto de cada uno de los siguientes H' , H'' , H''' , todos ellos condicionados por C.



Más precisamente, se demuestra:

7.4.3. A cada grafo G es posible asociarle una clase de multigrafos condicionados (todos con un mismo condicionamiento) de cada uno de los cuales G es adjunto. El condicionamiento a considerar es de restricción nula si y sólo si G es adjunto, y en tal caso la clase en cuestión es unitaria si nos limitamos a multigrafos resumidos.

5. INMERSION DE UN GRAFO EN UN GRAFO ADJUNTO.

Lo visto sobre grado de adjunción de un grafo G nos proporciona un método constructivo para obtener la cápsula adjunta. Puede aplicarse a grafos infinitos cuya relación de precedencia sea adjunta de grado n.

Otra forma de "sumergir" un grafo en uno adjunto consiste en modificar ciertos arcos mediante la incorporación de nuevos vértices, de forma de construir un grafo adjunto. En este caso el grafo dado no es subgrafo del adjunto obtenido.

Los vértices incorporados corresponden a las tareas ficticias que suelen introducirse al estudiar en un grafo etapas la planificación de un trabajo que requiere la realización de tareas interdependientes.

Un multigrafo G se dice *inmerso* en uno H si G es un submultigrafo de H o puede ser obtenido a partir de uno de ellos por sustitución de ciertos pares de arcos consecutivos (a,b),(b,c) por un único arco (a,c).

El método que indicamos a continuación es en esencia el dado por Richards (58) para determinar, a partir de una matriz booleana $A = (a_{i,j})$, otra $B = (b_{i,j})$ que admita un "arrow diagram", es decir que pueda ser la matriz de precedencia de los arcos de un cierto multigrafo.

Otro algoritmo de inmersión mediante el agregado de vértices fue indicado por Syslo (100).

Diremos matriz *colapsada* de R a la matriz R^* que resulta de identificar en una única fila (columna) todas las filas (columnas) idénticas de R .

En particular, R^* es una "matriz de permutación" si y sólo si R es la matriz de precedencia de los vértices de un grafo adjunto sin entradas y sin salidas.

Como cualquier matriz booleana cuadrada puede interpretarse como matriz de precedencia (de los vértices) de cierto grafo vale:

7.5.1. Dado un grafo G , sea R su matriz de precedencia. R puede extenderse a la matriz S de precedencia de un grafo adjunto H que contiene a todos los vértices de G . Las matrices R y S son tales que para ciertas matrices booleanas A, B, C , se tiene $R = A + B.C$ (conviniendo $1 + 1 = 1$) y

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix} .$$

G es adjunto si y sólo si $R=S$.

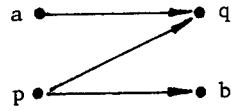
DEMOSTRACION. Resulta del siguiente algoritmo:

- 1- Se determina la matriz $R^*=(r_{i,j}^*)$ colapsada de R .
- 2- Por cada $r_{p,q}^* = 1$ tal que en la fila p y en la columna q existe al menos otra entrada no nula se agrega a R^* una fila y una columna. Dicha fila (columna) tendrá todas sus componentes nulas excepto la q -ésima (p -ésima) que será 1. Además $r_{p,q}^* = 1$ se sustituye por cero. Denotaremos P a la matriz (booleana) obtenida al reiterar 2 tanto como necesario.
- 3- Si la fila i (columna j) de P proviene de identificar h filas (k columnas) de R entonces se la reitera h (k) veces. Las restantes filas (columnas) de P se conservan.

La matriz así obtenida es la matriz S .

De 4.2.2 resulta que $R=S$ si y sólo si G es adjunto.

Si para cierto $r_{p,q}^* = 1$ existen a, b tales que $r_{a,q}^* = r_{p,b}^* = 1$ el grafo cuya matriz de precedencia es R^* contiene un subgrafo del tipo:

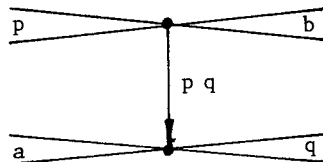


y el procedimiento indicado para obtener la matriz P equivale a la división del arco (p, q) mediante el agregado de un vértice que podemos notar pq , ya que es independiente del par a, b y en consecuencia útil para toda terna $r_{p,q}^* = r_{c,q}^* = r_{p,d}^* = 1$ (eventualmente $c=a, d=b$).

Sustituyendo en el grafo determinado por todas esas ternas el arco (p, q) por los arcos $(p, pq), (pq, q)$ se obtiene uno adjunto. Este carácter se conserva al pasar de P a S , es decir al reemplazarse los arcos $(p, pq), (p, d)$ por tantos arcos $(p_i, pq), (p_i, d_j)$ como vértices p_i, d_j estén identificados en p y en d , respectivamente. Análogo razonamiento cabe respecto de los arcos $(pq, q), (c, q)$.

Como cualquier otra terna $r_{u,v}^* = r_{x,v}^* = r_{u,y}^* = 1$ con $(u, v) \neq (p, q)$ requiere para la obtención de un adjunto el agregado de al menos un vértice que divida (u, v) , resulta que el método indicado da un grafo adjunto H en el cual G está inmerso mediante el agregado de un número mínimo de vértices.

Si $G = H^*$ a cada terna $r_{p,q}^* = r_{a,q}^* = r_{p,b}^* = 1$ luego de las operaciones indicadas corresponde en H una situación que podemos esquematizar:

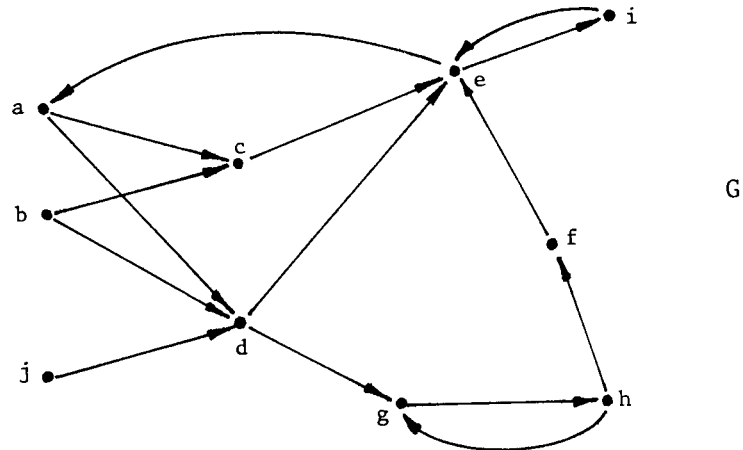


Es la que resulta de reemplazar cada par de arcos p_i, q_j por la terna p_i, pq, q_j y conservar las restantes relaciones de consecutividad entre arcos. En tal caso y puesto que $r_{a,b}^* = 0$ la presencia del arco pq (distinto de bucle) no afecta las relaciones de precedencia establecidas por R .

En (66) Cantor y Dimsdale reencuentran mediante la noción "edge-dual graph" el resultado de Richards que lleva a 7.5.1. Dan además un método que permite, cualquiera sea el grafo G , construir el "edge-dual graph" de G con menor número de vértices y un criterio que lo caracteriza.

EJEMPLO.

Dado G determinaremos su cápsula adjunta y el grafo adjunto que resulta de aplicar el método que demuestra 7.5.1.



	$\Gamma_1 = \Gamma$	Γ_2	$\Gamma_3 = \bar{\Gamma}$
a	c, d	c, d	c, d
b	c, d	c, d	c, d
c	e	e, g	e, f, g
d	e, g	e, g, f	e, f, g
e	a, i	a, i	a, i
f	e	e, g	e, f, g
g	h	h	h
h	f, g	e, f, g	e, f, g
i	e	e, g	e, f, g
j	d	c, d	c, d

Así entonces G es adjunto de grado tres y su cápsula adjunta se obtiene agregándole los arcos $(c, f), (c, g), (d, f), (f, f), (f, g), (h, e), (i, f), (i, g), (j, c)$.

Para aplicar el otro método, sea R la matriz de precedencia del grafo dado G. Si en R la fila (columna) x coincide con la fila (columna) y tendremos en notar x, y la fila (columna) de R^* que las representa. En nuestro caso R y su colapsada R^* son (omitimos escribir los ceros):

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a			1	1						
b			1	1						
c					1					
d					1		1			
e	1								1	
f					1					
g								1		
h						1	1			
i					1					
j				1						

	a, i	b	c	d	e	f	g	h	j
a, b			1	1					
c, f, i					1				
d					1		1		
e	1								
g									
h							1	1	
j					1				

De R^* se construye la siguiente matriz P :

	a, i	b	c	d	e	f	g	h	j	(a, b)d	de	dg	hg
a, b			1	0						1			
c, f, i					1								
d					0		0				1	1	
e	1												
g								1					
h						1	0						1
j				1									
(a, b)d				1									
de					1								
dg							1						
hg								1					

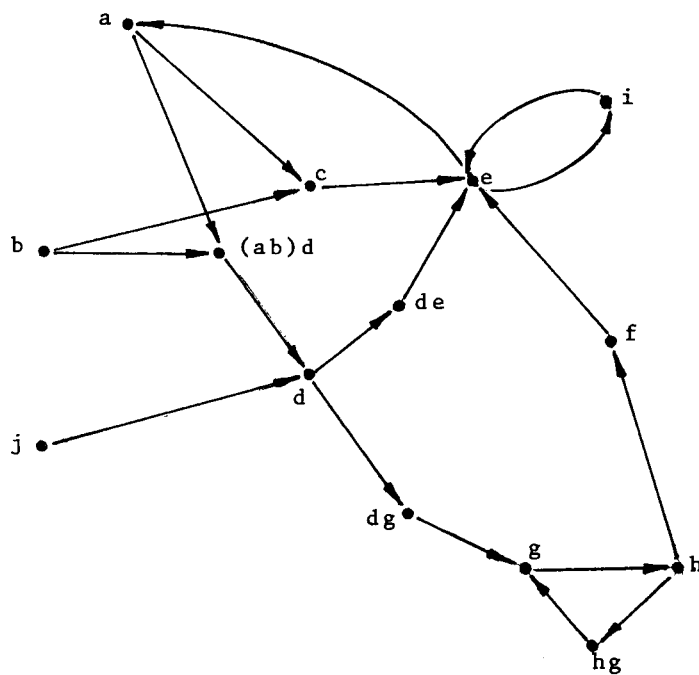
La matriz S obtenida al desdoblar la fila a, b , la fila c, f, i y la columna a, i es :

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	(a,b)d	de	dg	hg
a			1								1			
b			1								1			
c					1									
d												1	1	
e	1								1					
f					1									
g								1						
h						1								1
i					1									
j				1										
(a,b)d				1										
de					1									
dg							1							
hg								1						

Puede verificarse que las líneas punteadas determinan las submatrices A, B, C y nula tales que $R = A + B.C$ y

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} .$$

El grafo adjunto que se obtiene a partir de G por división de sus arcos admite el siguiente esquema:



Puede ser de interés destacar que ambos métodos presentan un cierto carácter de "complementaridad" entre los arcos incorporados y los arcos divididos. En efecto, en el ejemplo anterior los arcos divididos (a,d) , (b,d) son "complementarios" en $\{a,b,j\} \times \{c,d\}$ del arco incorporado (j,c) . Análogamente cada uno de los arcos divididos (d,e) , (d,g) , (h,g) es "complementario" en $\{c,d,f,h,i\} \times \{e,f,g\}$ de algunos de los arcos incorporados (c,f) , (c,g) , (d,f) , (f,f) , (f,g) , (h,e) , (i,f) , (i,g) .

Notemos también que las modificaciones de G que exige la aplicación del primer método parecen, en general, mas fáciles de introducir que las que conlleva el último.

CAPITULO VIII

GRAFOS ADJUNTOS HAMILTONIANOS (CASO NO ORIENTADO).

En este capítulo consideramos multigrafos no orientados y damos una caracterización intrínseca de los adjuntos con al menos tres vértices que son hamiltonianos (8.2.5). Para ello damos previamente una caracterización de los multigrafos con al menos tres aristas cuyo adjunto es hamiltoniano (8.2.1). Esta propiedad que reformula y extiende la dada por Chartrand (37) al estudiar grafos sin bucles, nos permite además explicitar cierta relación entre los ciclos hamiltonianos del adjunto de G y ciertos circuitos del simétrico G^s asociado a G .

Para deducir 8.2.1 utilizamos 8.1.2 que muestra como el adjunto - caso no orientado - puede reencontrarse a partir del adjunto - caso orientado - con otras operaciones definidas sobre grafos. La demostración de 8.1.2 la dimos en (122), donde introdujimos dos definiciones, la de e-adjunto y la de v-adjunto de un multigrafo no orientado, que extienden la habitual de adjunto de un grafo de ese tipo. Ambas coinciden con esta última para multigrafos sin bucles.

1. ADJUNTOS DE MULTIGRAFOS NO ORIENTADOS.

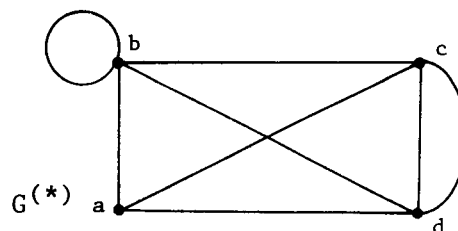
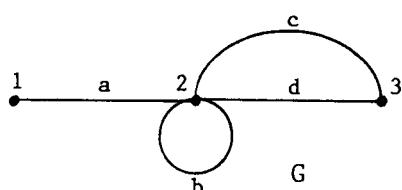
Con vistas a su aplicación en el párrafo 2 damos seguidamente y con leves cambios en su formulación algunos de los resultados de (122). De las dos nociones de adjunto allí definidas utilizaremos sólo la de v-adjunto, y la designaremos adjunto.

DEFINICION. El multigrafo no orientado H se dice *adjunto* del multigrafo no orientado G si:

- 1- Cada vértice H está identificado con cada arista de G .
- 2- Los vértices u, v ($u \neq v$) de H están conectados por tantas aristas como vértices de incidencia en común tienen en G las aristas u, v .
- 3- Si u es bucle de G entonces u es soporte de un único bucle en H .

Notaremos $H = G^{(*)}$.

EJEMPLO:



A cada multigrafo no orientado G asociamos el multigrafo simétrico G^S obtenido por aplicación de las siguientes reglas:

- 1- Los vértices de G^S coinciden con los de G .
- 2- Si u es una arista de G incidente en los vértices x, y ($x \neq y$), u es sustituida en G^S por los arcos opuestos $(x, y), (y, x)$. Uno de ellos será notado u y el otro u^{\sim} .
- 3- Todo bucle de G es conservado en G^S (pensamos en $u = u^{\sim}$).

Aún cuando las denominaciones u, u^{\sim} no están unívocamente asociadas a los arcos opuestos que sustituyen la arista u (u distinta de bucle) es claro que G^S determina unívocamente G .

De 4.2.1 y 4.4.2 se tiene:

8.1.1. Si el grafo $\langle X, \Gamma \rangle$ es adjunto de un multigrafo de la forma G^S existe sobre X al menos una involución \sim tal que se verifican:

- 1- $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$.
- 2- $u^{\sim} \in \Gamma(u)$ cualquiera sea el vértice u .
- 3- Los puntos unidos de la involución coinciden con los soportes de bucles.

Además por 4.1.1 resulta que una vez fijada la involución se cumplen:

8.1.1.a) $v \in \Gamma(u)$ si y solamente si $u^{\sim} \in \Gamma(v^{\sim})$.

8.1.1.b) Las clases $\Gamma(x)$ y $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$ tiene igual número de elementos y éstos se corresponden a la involución elegida. Más precisamente,

$v \in \Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$ equivale a $v^{\sim} \in \Gamma(x)$ cualquiera sea x .

8.1.1.c) u y u^{\sim} pertenecen a una misma clase $\Gamma(x)$ (resp. $\Gamma^{-1} \circ \Gamma(x)$) si y sólo si u es bucle de G ($u = u^{\sim}$).

Notaremos C la aplicación que a cada grafo de la forma $(G^S)^*$ le asocia el

grafo que se obtiene mediante las siguientes reglas.

- 1- Identificar cada par de vértices u, u^{\sim} (conjugados en la involución) en un único vértice u^0 .
- 2- Si $u \neq u^{\sim}$ quitar los arcos (u, u^{\sim}) , (u^{\sim}, u) .

La proposición 8.1.1 asegura que la aplicación C está bien definida y por 8.1.1. a) resulta que $C(G^S)$ es orientado simétrico.

Considerando los grafos K_3 y $K_{1,3}$ se ve que C no es inyectiva.

Sea D la aplicación definida de los multigrafos simétricos en los no orientados, que a cada multigrafo hace corresponder el que se obtiene conservando los bucles y sustituyendo cada par de arcos *recíprocos* (opuestos y ligados por una involución) diferentes de bucles por una arista incidente en los mismos vértices que los arcos sustituidos.

8.1.2. El multigrafo H es adjunto de un multigrafo G si y sólo si

$$H = G^{(*)} = D(C((G^S)^*)).$$

Observemos que D puede ser interpretada como la inversa de la simetrización y por lo tanto $(G^{(*)})^S = C((G^S)^*)$.

La caracterización de los adjuntos de grafos carentes de bucles dada por Krausz (8) puede ser extendida a nuestro caso.

Un grafo (no orientado) se dirá *clan* si en cada vértice incide a lo sumo un bucle y cada par de vértices está conectado por exactamente una arista. Un *clan singular* es un vértice que no es soporte de bucles.

Un clan sin bucles es un grafo completo y recíprocamente.

Dado un multigrafo H una *descomposición* de H es una familia $F = \{F_i\}$ de subgrafos de H tal que cada F_i es un clan y además:

- 1- Si el vértice u es soporte de bucles, u pertenece a un único F_i , caso contrario pertenece a exactamente dos elementos de F , los dos singulares si y sólo si u es aislado.
- 2- Cada arista de H pertenece a un único F_i .

Observemos que dos aristas paralelas deben pertenecer a diferentes elementos de F .

8.1.3. Un multigrafo H es adjunto si y sólo si admite una descomposición.

De la demostración de la proposición anterior resulta que si $H = G^{(*)}$ cada vértice x_i del multigrafo G está en correspondencia con un elemento F_i de la descomposición del multigrafo $G^{(*)}$ y que el grado del vértice x_i (los bucles se cuentan dos veces) coincide con el número de vértices de F_i contando doble a los vértices soporte de bucles.

Así por ejemplo, los clanes de $G^{(*)}$ de pág. 91 son los de vértices $\{a\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{c,d\}$. Estos corresponden respectivamente a los vértices 1, 2, 3 de G .

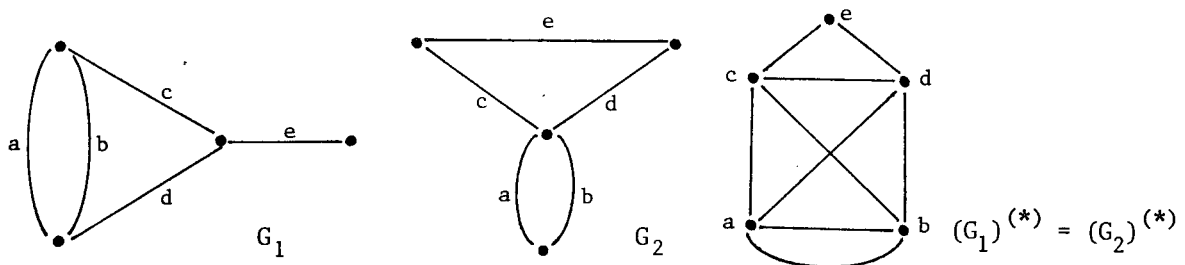
En general la descomposición de un multigrafo (si existe) no está unívocamente determinada. K_3 admite dos descomposiciones, y según sea la elegida se tiene $K_3 = K_3^{(*)}$ ó $K_3 = K_{1,3}^{(*)}$

Un importante resultado de Whitney (4) relativo a grafos no orientados conexos sin bucles según el cual, excepto en cuatro casos, todo "arista isomorfismo" es inducido por un "vértice isomorfismo" (ver (32) Cap.15, (87)) admite la siguiente reformulación:

"Si G_1 y G_2 son grafos no orientados conexos sin bucles y sus respectivos adjuntos son isomorfos, entonces G_1 y G_2 son isomorfos, excepto si uno de ellos es K_3 y el otro es $K_{1,3}$ ".

Entre otras demostraciones del resultado anterior citaremos la de Krausz (8) que dió origen a la noción de grafo adjunto, y la de Jung (49) válida también para grafos infinitos (ver (119)).

Un resultado análogo al de Whitney es válido para multigrafos adjuntos con bucles (pues admiten una única descomposición) pero no para aquellos con aristas paralelas, sin bucles. Basta considerar los esquemas dados en (122) o los siguientes:



El problema similar para otras generalizaciones del concepto grafo adjunto fue estudiado por Sabidussi (28), Nešetřil (90), Hemminger (78), (79),

Berge y Rado (85), Dörfler (96). Para el caso de multigrafos orientados (eventualmente infinitos con bucles) fue abordado por Hemminger y Zelinka (91), quienes dan teoremas del "tipo Whitney". Sus estudios llevan a una extensión del concepto de grafo adjunto - caso orientado - (ver (91), (116)).

2. GRAFOS ADJUNTOS HAMILTONIANOS.

Nuestro propósito es caracterizar los multigrafos adjuntos hamiltonianos.

Un multigrafo se dice *secuencial* si sus aristas pueden designarse $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m, u_{m+1} = u_1$ de forma tal que u_i, u_{i+1} ($1 \leq i \leq m$) sean adyacentes.

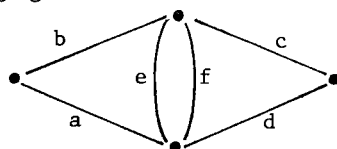
Es fácil ver que todo multigrafo euleriano o hamiltoniano es secuencial, y que todo multigrafo secuencial sin vértices aislados es conexo. Las respectivas recíprocas son falsas.

En un multigrafo simétrico con involución \sim llamaremos *circuito semieuleriano* a todo circuito simple que de cada par de arcos recíprocos contiene a uno y sólo a uno si $u \neq \tilde{u}$ y a ambos si $u = \tilde{u}$, y *circuito cuasi semi-euleriano* a todo circuito simple $\varepsilon = u_1, u_2, u_3, \dots, u_k (u_1)$ que de cada par de arcos recíprocos contiene al menos uno, y tal que si $u \neq \tilde{u}$ y ambos pertenecen a ε entonces uno de ellos es u_i y el otro es u_{i+1} para algún $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ con $k+1 = 1$ (o sea que u, \tilde{u} son consecutivos en ε).

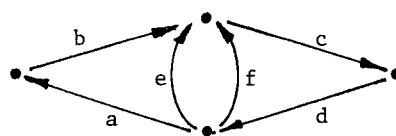
Es claro que todo circuito cuasi semi euleriano que no contiene pares de arcos recíprocos (excepto $u = \tilde{u}$) es semi euleriano y recíprocamente. Un cuasi semi euleriano que no es semi euleriano se dirá *cuasi semi euleriano propio*.

Un multigrafo simétrico puede admitir un circuito cuasi semi euleriano propio y uno semi euleriano.

En efecto, dado G



sea G^S



(indicamos sólo uno de los arcos de cada par de arcos recíprocos).

El multigrafo G^S admite el circuito semi euleriano $a, b, c, d, e, f, \tilde{a}$ y el circuito cuasi semi euleriano propio $a, b, f, \tilde{f}, e, c, d, \tilde{a}$.

De las definiciones respectivas se deduce:

A) Excepto si el multigrafo no orientado G tiene exactamente dos vértices, G admite ciclo hamiltoniano si y sólo si el multigrafo G^S admite circuito hamiltoniano.

B) Un multigrafo no orientado G es euleriano si y sólo si el multigrafo G^S admite un circuito semi euleriano, y es secuencial si y sólo si G^S admite un circuito cuasi semi euleriano.

8.2.1. Sea G un multigrafo con al menos tres aristas. $G^{(*)}$ admite ciclo hamiltoniano si y solamente si G^S admite circuito cuasi semi euleriano.

A cada uno de los ciclos hamiltonianos de $G^{(*)}$ puede asociarse al menos uno de los circuitos cuasi semi eulerianos de G^S y recíprocamente.

DEMOSTRACION. Como $(G^{(*)})^S = C((G^S)^*)$ y tiene al menos tres vértices, por A) se tiene que $G^{(*)}$ admite ciclo hamiltoniano si y sólo si $C((G^S)^*)$ admite circuito hamiltoniano.

Veamos que esto equivale a la existencia de circuito cuasi semi euleriano en G^S .

Recordemos que cada vértice u^0 de $C((G^S)^*)$ representa al par de vértices u, \tilde{u} de $(G^S)^*$ y cada arco $p = (u^0, v^0)$ a un único arco p_1 perteneciente a $\{u, \tilde{u}\} \times \{v, \tilde{v}\}$. Así entonces, al camino de arcos $(u^0, v^0), (v^0, w^0)$ con $u^0 \neq w^0$ corresponde en $(G^S)^*$ otro con un arco de $\{u, \tilde{u}\} \times \{v, \tilde{v}\}$, uno de $\{v, \tilde{v}\} \times \{w, \tilde{w}\}$ y eventualmente uno de los de la forma (v, \tilde{v}) ó (\tilde{v}, v) .

En consecuencia, a cada circuito hamiltoniano de $C((G^S)^*)$ puede asociarse un circuito elemental de $(G^S)^*$ que contiene exactamente un arco de U_A^+ y uno de U_A^- cualquiera sea $A = \{u_i, \tilde{u}_i\}$ (aún cuando $u_i = \tilde{u}_i$) y a lo sumo uno de los arcos $(u_i, \tilde{u}_i), (\tilde{u}_i, u_i)$. Un tal circuito elemental de $(G^S)^*$ representa un circuito simple de G^S que es cuasi semi euleriano (eventualmente semi euleriano).

Recíprocamente, cada circuito cuasi semi euleriano de G^S determina un circuito elemental de su adjunto con características análogas a las indicadas y a éste corresponde uno hamiltoniano de $C((G^S)^*)$.

Observemos que un ciclo hamiltoniano de $G^{(*)}$ puede representar a distintos circuitos cuasi semi eulerianos de G^S (ver ejemplo de página 97).

De 8.2.1 y B) es inmediato que :

Un multigrafo G con al menos tres aristas admite adjunto hamiltoniano si y sólo si G es secuencial.

Esto, que es fácil demostrar directamente, es en realidad una extensión al caso de grafos que admiten bucles o aristas paralelas de la caracterización de grafos con adjunto hamiltoniano dada por Chartrand en su tesis doctoral (37) (ver también (41),(61)). Otra caracterización similar a la anterior es la dada en (42).

La condición necesaria y suficiente que hemos dado para que un multigrafo adjunto H sea hamiltoniano hace referencia explícita al multigrafo del cual H es adjunto. Para dar una caracterización intrínseca de estos multigrafos introducimos la siguiente definición:

Una descomposición $F = \{F_i\}$ de $G^{(*)}$ es *par* si cada clan F_i contiene un número par de vértices, contando doble los que son soporte de bucle, y es *cuasi par* si cada clan contiene un número par de vértices, contando doble los que son soporte de bucle y además los que pertenecen a un clan singular (son los representantes de aristas pendientes en G).

Toda descomposición par es cuasi par. Una cuasi par que no es par se dirá *cuasi par propia*.

Todo grafo completo K_p ($p \geq 1$) admite descomposición cuasi par propia (con p clanes singulares si $p \geq 2$). De ellos, sólo K_3 admite además una descomposición par.

La descomposición de $K_{1,2}$ no es par ni cuasi par y la del ejemplo de pág. 91 es cuasi par propia.

Según observamos, las distintas descomposiciones de un multigrafo H están asociadas, respectivamente, con los distintos multigrafos G de los cuales H es adjunto, y elegida una descomposición $\{F_i\}$ tal que $H = G^{(*)}$ hay correspondencia biyectiva entre los vértices del clan F_j y las aristas de G incidentes en x_j . Así entonces se tiene que:

$G^{(*)}$ admite descomposición par si y solamente si cada vértice de G es de grado par (bucles y vértices soporte de bucles se cuentan doble).

Además, si G carece de vértices aislados, G es conexo si y sólo si también

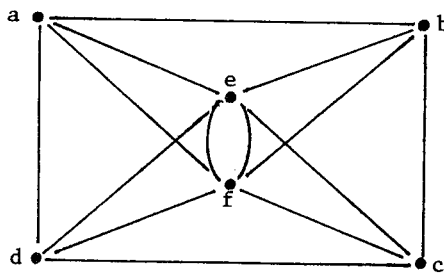
lo es $G^{(*)}$, y como cada ciclo euleriano de G determina canónicamente un ciclo hamiltoniano de $G^{(*)}$ (la recíproca, a diferencia del caso orientado, es falsa) vale:

8.2.2. Un multigrafo conexo H admite descomposición par si y solamente si existe un multigrafo euleriano G tal que $H = G^{(*)}$. En tal caso H es hamiltoniano.

Respecto del resultado anterior, enunciada por Toranzos y Costa (59), observemos que en ese caso H contiene al menos un ciclo hamiltoniano asociado a un circuito semi euleriano de G^s , pero que, eventualmente, dicho ciclo puede también asociarse a uno cuasi semi euleriano propio.

Además, no todo ciclo hamiltoniano de H proviene necesariamente de uno euleriano en G .

En efecto, el adjunto del multigrafo de la página 94 es



y admite la descomposición par $\{a,b\}, \{c,d\}, \{b,c,e,f\}, \{a,d,e,f\}$. Al ciclo hamiltoniano $a,b,c,d,e,f,(a)$ puede asociarse en G^s el circuito semi euleriano a,b,c,d,e,f,\tilde{a} , (a) ó el cuasi semi euleriano propio $a,b,c,d,e,e\tilde{,}f,\tilde{f},(a)$. Por otra parte, al ciclo hamiltoniano $a,d,e,f,c,b,(a)$ puede asociarse el circuito cuasi semi euleriano $a\tilde{,}d\tilde{,}d,e,e\tilde{,}f,c,c\tilde{,}b\tilde{,}(a\tilde{)}$ ó el $a\tilde{,}d\tilde{,}d,e,f\tilde{,}f,c,c\tilde{,}b\tilde{,}(a\tilde{)}$ pero ninguno semi euleriano.

8.2.3. Sea L un multigrafo conexo con al menos tres aristas. Su adjunto admite descomposición cuasi par propia si y sólo si L es de la forma $K_{1,p}$ ($p \geq 3$) o resulta de incrementar con aristas pendientes un multigrafo euleriano M . En tal caso $L^{(*)}$ es hamiltoniano.

DEMOSTRACION. Si $L = K_{1,p}$ ($p \geq 3$), $L^{(*)} = K_p$ que admite descomposición cuasi par propia y ciclo hamiltoniano.

Si L es un conexo obtenido agregando aristas pendientes a un multigrafo euleriano M y F es una descomposición par de $M^{(*)}$ (existe al menos una),

a F corresponde canónicamente una descomposición \bar{F} cuasi par propia de $L^{(*)}$. En efecto, cada clan no singular \bar{F}_j resulta de incrementar el clan F_j con tantos vértices como aristas pendientes incidentes en x_j hay en L y conectarlos adecuadamente. Así entonces, de la paridad de la descomposición F y como cada vértice agregado debe contarse doble, resulta que \bar{F} es cuasi par propia.

Por otra parte, como los vértices agregados al clan F_j son conectados entre sí y con todos los vértices de F_j resulta que cada ciclo hamiltoniano de $M^{(*)}$ (existen pues M es euleriano) puede ser extendido a uno hamiltoniano de $L^{(*)}$.

Recíprocamente, si el conexo $L^{(*)}$ admite descomposición cuasi par propia, mediante la eliminación de cada vértice de $L^{(*)}$ perteneciente a un clan singular (y de las aristas incidentes en él) se obtiene un multigrafo $M^{(*)}$ vacío o conexo que admite una descomposición par (es adjunto del que resulta de eliminar en L todas sus aristas pendientes y sólo ellas). Si el multigrafo así obtenido es vacío, $L = K_{1,p}$ ($p \geq 3$), caso contrario M es euleriano, y por la conexidad de L puede afirmarse que satisfacen las condiciones indicadas.

8.2.4. Si G es un multigrafo con al menos tres aristas tal que G^s carece de circuito semi euleriano pero contiene al menos uno cuasi semi euleriano entonces $G^{(*)}$ contiene un submultigrafo N , conexo, cubriente, no necesariamente propio, que es adjunto de un multigrafo de la forma $K_{1,p}$ o de un conexo L obtenido incrementando con aristas pendientes uno euleriano. En tal caso N admite una descomposición cuasi par propia, cuyos clanes son subgrafos de los de la descomposición de $G^{(*)}$.

DEMOSTRACION. Por hipótesis cualquier circuito cuasi semi euleriano ϵ de G^s (existe al menos uno) contiene un conjunto no vacío α de pares de arcos recíprocos (α contiene todos los pares de arcos correspondientes a las eventuales aristas pendientes de G).

Si $\alpha = \epsilon$, ϵ es de la forma $u_1, u_1^{\sim}, u_2, u_2^{\sim}, u_3, \dots, u_p, u_p^{\sim}, (u_1)$.

En tal caso $G = K_{1,p}$ y $N = G^{(*)} = K_p$ ($p \geq 3$).

Si $\alpha \neq \epsilon$, los arcos de ϵ no pertenecientes a α determinan un circuito semi euleriano de $G^s - \{\alpha\}$. Sea M el submultigrafo de G tal que $M^s = G^s - \{\alpha\}$.

Es claro que M es euleriano y pueden presentarse dos situaciones:

i) Si todas las aristas de $G-M$ son pendientes, como G es conexo satisface las condiciones indicadas para L y también en este caso el submultigrafo cubriente en cuestión es impropio ($N = G^{(*)}$).

ii) Si $G-M$ contiene aristas no pendientes, supongamos $\epsilon = u_1, u_2, u_2^{\sim}, u_3, \dots, u_r, (u_1)$, $u_1 = [x, a]$, $u_2 = [a, b]$, $a \neq b$ y que u_2 no es arista pendiente de $G = \langle V, U \rangle$.

Mediante la incorporación de un vértice $b' \notin V$, sustituyendo $u_2 = [a, b]$ por $u_2 = [a, b']$ y manteniendo todas las restantes relaciones de adyacencia entre los elementos de G construiremos un multigrafo conexo G_b que tiene $[a, b']$ como arista pendiente.

Por construcción, el adjunto de G_b es el submultigrafo propio cubriente y conexo de $G^{(*)}$ que resulta de eliminar en éste todas las aristas $[u_2, v]$ para $v \in U_b - \{u_2\}$ y sólo ellas. Todas las aristas eliminadas pertenecen a un mismo clan de la descomposición de $G^{(*)}$.

Si $\alpha = \{u_2, u_2^{\sim}\}$ contiene aún pares de arcos recíprocos correspondientes a aristas no pendientes en G_b se reitera el razonamiento anterior tanto como sea necesario hasta obtener un grafo conexo \hat{G} en el cual cada par de arcos pertenecientes a α representa a una de sus aristas pendientes.

\hat{G} satisface las condiciones requeridas a L . En este caso, $N = (\hat{G})^{(*)}$ es submultigrafo conexo, cubriente propio de $G^{(*)}$ y del razonamiento seguido resulta que los clanes de su descomposición son subgrafos de los que determinan la descomposición de $G^{(*)}$.

Además por 8.2.3 la descomposición de N es cuasi par propia y esto termina la demostración.

La descomposición $F' = \{F'_i\}$ se dice *más fina* que la descomposición $F = \{F_j\}$ si todo clan F'_i es subgrafo (eventualmente impropio) de algún clan F_j .

8.2.5. Sea H un multigrafo adjunto conexo con al menos tres vértices.

1) H es hamiltoniano si y sólo si admite descomposición par o contiene un submultigrafo conexo cubriente (no necesariamente propio) que admite una descomposición cuasi par propia más fina que una de H .

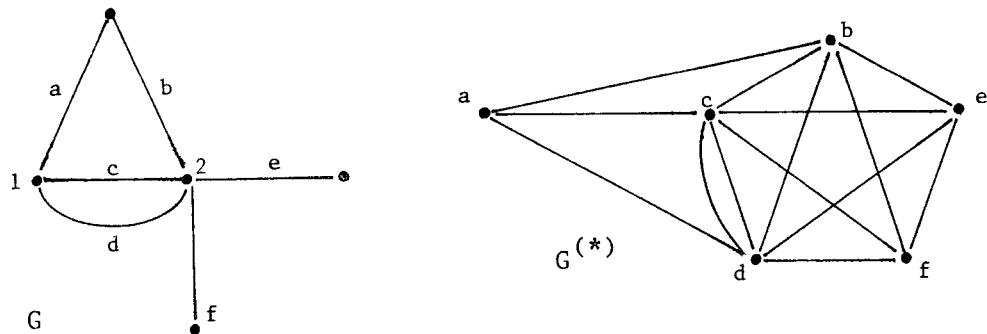
2) Si para cierta descomposición par es $H = G^{(*)}$ entonces uno al menos de sus ciclos hamiltonianos representa a un circuito semi euleriano de G^S . En otro caso cada ciclo hamiltoniano de $G^{(*)}$ representa por lo menos a un circuito cuasi semi euleriano propio de G^S .

DEMOSTRACION. Si $H = G^{(*)}$ por 8.2.1 puede afirmarse que H es hamiltoniano si y sólo si G^S admite circuito cuasi semi euleriano. Si G^S contiene circuito semi euleriano entonces $G^{(*)}$ tiene descomposición par (ver B y 8.2.2), si en cambio G^S carece de ellos pero contiene circuitos cuasi semi eulerianos, por 8.2.4 resulta que $G^{(*)}$ contiene un submultigrafo (no necesariamente propio) cubriente y conexo que admite descomposición cuasi par propia y más fina que la de $G^{(*)}$.

Recíprocamente, si $G^{(*)}$ admite descomposición par por 8.2.2 es hamiltoniano, y si contiene un submultigrafo S (no necesariamente propio) cubriente y conexo que admite descomposición cuasi par propia, por 8.2.3, S es hamiltoniano y por lo tanto también lo es $G^{(*)}$.

La validez de 2) es consecuencia de 8.2.1, y de lo observado a continuación de 8.2.2.

EJEMPLO.



La descomposición de $G^{(*)}$ definida por los clanes: $\{a,b\}$; $\{a,c,d\}$; $\{b,c,d,e,f\}$; $\{e\}$; $\{f\}$ no es par ni cuasi par. Puede verse que para una adecuada notación de los arcos de G^S el ciclo hamiltoniano $a,b,c,f,e,d,(a)$ representa al circuito cuasi semi euleriano $a,b,c,c^{\sim},f,f^{\sim},e,e^{\sim},d,(a)$. El mismo circuito está contenido en $(G_1)^S$ si G_1 es el grafo que resulta de sustituir en G la arista $c = [1,2]$ por la arista $c = [1',2]$, $1' \notin G$ (G_1 coincide con K_3 incrementado con tres aristas pendientes).

Precisamente, el subgrafo cubriente de $G^{(*)}$ que resulta de quitarle la

arista $[a,c]$ y una de las aristas $[c,d]$ coincide con el adjunto de G_1 y admite una descomposición cuasi par propia, la dada por $\{a,b\}$; $\{a,d\}$; $\{b,c,d,e,f\}$: $\{f\}$; $\{c\}$; $\{e\}$. Cada uno de estos clanes es subgrafo de alguno de los de la descomposición inicial de $G^{(*)}$.

Otro subgrafo conexo cubriente de $G^{(*)}$ que admite descomposición cuasi par propia es el que resulta de eliminar las aristas $[b,c]$, $[c,e]$, $[c,f]$ y una de las aristas $[c,d]$.

Este es adjunto del grafo que resulta de sustituir la arista $c = [1,2]$ por $[1,2']$, $2' \notin G$.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1894

- (1) de RIVIÈRE, A., *Question N°48*, L'Intermédiaire des Mathématiciens, 1, (1894), 19-20.
- (2) FLYE SAINTE-MARIE, C., *Solution to question N°48*, L'Intermédiaire des Mathématiciens, 1, (1894), 107-110.

Se determina el número de sucesiones $(2,m)$ -equilibradas y con ello se resuelve el problema planteado en (1).

1897

- (3) MANTEL, W., *Resten van Wederkerige reeksen*, Nieuw Archief voor Wiskunde, Serie 2, Vol.1, (1897), 172-184.

Según indica de Bruijn (103), utilizando propiedades de los cuerpos finitos se da un método para construir algunas de las sucesiones (h,m) -equilibradas, con h primo.

1932

- (4) WHITNEY, H., *Congruent graphs and the connectivity of graphs*, Amer. J. Math., 54, (1932), 150-168, Zb. 3-328.

Estudia grafos no orientados conexos, y demuestra que excepto en cuatro casos todo "arista isomorfo" es inducido por un "vértice isomorfo".

1934

- (5) MARTIN, M.H., *A problem in arrangements*, Bull. Amer. Math. Soc., XL, (1934), 859-864, Zb.10-289.

Da un algoritmo que permite construir una sucesión (h,m) -equilibrada cualesquiera sean h,m .

1935

- (6) POPPER, Karl R., *La lógica de la investigación científica*, (1962), Editorial Tecnos, Madrid. Traducido de *The logic of Scientific Discovery*. Hutchinson and Co., Londres, (1959). Versión ampliada de *Logik der Forschung*, Springer, Viena, (1935), M.R.21#6318. Zb.10-242.

En el capítulo VIII utiliza las sucesiones $(2,m)$ -equilibradas en relación con su fundamentación axiomática del cálculo de probabilidades. En el Apéndice IV da un método para construirlas.

1941

- (7) TUTTE, W.T. and SMITH, C.A.B., *On unicursal paths in a network of degree 4*, Amer. Math. Monthly, 48, (1941), 233-237. Zb.25-91.

Se demuestra, por inducción, que el número de circuitos eulerianos de un multigrafo 2-regular puede obtenerse como valor del determinante de cierta matriz.

1943

- (8) KRAUSZ, J., *Démonstration nouvelle d'un théorème de Whitney sur les reseaux*, Mat. Fiz. Lapok, 50, (1943), 75-85 (en húngaro). M.R.8-284.

Da otra demostración del conocido resultado de Whitney (4) sobre los arista isomorfos no inducidos por vértice isomorfismos.

1946

- (9) de BRUIJN, N.G., *A combinatorial problem*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 49, (1946), 758-764. Indagat Math., 8 (1946), 461-467. M.R.8-247. Zb.60-27.

Por inducción y utilizando grafos adjuntos determina el número de sucesiones $(2,m)$ -equilibradas. Se reencuentra el resultado de (2).

- (10) GOOD, I.J., *Normal recurring decimals*, J. London Math. Soc., 21, (1946), 167-169. M.R.8-430. Zb.60-27.

Un problema sobre "números normales" lo lleva a demostrar mediante

un grafo "ad hoc" que el problema de las palabras equilibradas siempre admite solución.

- (11) REES, D., *Note on a paper by I.J. Good*, J. London Math. Soc., 21, (1946), 169-172. M.R.8-431. Zb.60-27.

Demuestra en forma algebraica que el problema planteado siempre tiene solución y utilizando los cuerpos finitos da un método para construir algunas de ellas.

1948

- (12) TUTTE, W. T., *The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 44, (1948), 463-482. M.R.10-319. Zb.30-409.

Para resolver un problema que plantea hace uso de una analogía con la teoría de redes eléctricas. Entre otros, obtiene un resultado del que se deduce II de la página 16..

1950

- (13) KOROBOV, N. M., *Concerning some questions of uniform distribution*, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R., Ser. Mat. 14, (1950), 215-238, (en ruso). M.R. 12-321.

Entre otros resultados da dos condiciones suficientes sobre el irracional α que aseguran la distribución uniforme de las funciones αh^x , $h \geq 2$. Con tal objeto da un algoritmo para construir soluciones del problema considerado en el Capítulo I.

1951

- (14) van AARDENNE-EHRENFEST, T. and de BRUIJN, N. G., *Circuits and trees in oriented linear graphs*, Simon Stevin, 28, (1951), 203-217. M.R.13-857. Zb.44-382.

Se relaciona el número de circuitos eulerianos de un multigrafo con el de los que tiene su adjunto y de esto resulta el número de soluciones que admite el problema del Capítulo I. El número de circuitos eulerianos es obtenido también mediante una correspondencia en-

tre éstos y ciertas arborescencias cubrientes (ver I, pág.16) y un resultado de Tutte (ver II, pág.16) del que se da una nueva demostración.

- (15) KOROBOV, N.M., *Normal periodic systems and their applications to the estimation of sums of fractional parts*, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat. 15, (1951), 17-46, (en ruso) . Amer. Math. Soc. Translations, (1956), Serie 2 Vol.4, 31-58. M.R.13-213.

Con el objeto de estudiar las sumas de las "fractional parts" de αh^x (para ciertos irracionales α) da métodos para construir sistemas periódicos normales, es decir sucesiones (h,m) -equilibradas. Uno de los métodos permite construirlas todas.

- (16) LESSARD, R., *Cycles of n-digit binary integers. Solution to problem 4385*, Amer. Math. Monthly, 58, (1951), 573-575.

Demuestra para $h=2$ un algoritmo equivalente al de Martin (5).

1956

- (17) GOODSTEIN, R.L., *Note 2590. A permutation problem*, Math. Gazette, XL, (1956), 46-47.

Demuestra para $h=2$ un algoritmo equivalente al de Martin (5).

1957

- (18) DAWSON, R. and GOOD, I.J., *Exact Markov probabilities from oriented linear graphs*, Ann. Math. Statist, 28, (1957), 946-956. M.R.20#339.

Se estudia la distribución condicional de las m -uplas de una sucesión circular, dadas las frecuencias de las n -uplas ($n < m$) que la componen. Del procedimiento seguido resulta como caso particular una evaluación del determinante que da el número de arborescencias cubrientes con cierta raíz y por ende el de circuitos eulerianos de $G_{h,p}$.

- (19) FORD, L.R. (Jr.), *A Cyclic Arrangement of M-tuples*, Report N°P-1071 Rand Corporation, Santa Mónica-California, (1957).
- (20) GOLOMBS, S.W. and WELCH, L., *Nonlinear shift register*, Jet Propulsion Laboratory, California - Institute of Technology - Pasadena, (1957).

1958

- (21) BERGE, C., *Théorie des graphes et ses applications*, Ed. Dunod, (1958), (2^a Edit.(1963)). M.R.21#1608. Zb.88-154.
- (22) ELDERT, C., GRAY, H.J., GURK, H.M. and RUBINOFF, M., *Shifting counters*, AIEE-Trans. 77, (1958), 70-74. (Commun. and Electronics N°35, (1958)).

1959

- (23) BERGE, C., *Espaces topologiques. Fonctions multivoques*, Ed. Dunod (1959). M.R.21#4401.
- (24) FRIEDLAND, B. and Stern, T., *Applications of modular sequential circuits to single error-correcting P-Nary - codes*, IRE Trans. Inf. Theory, I.T. 5, (1959), 114-123.
- (25) NADLER, M. and SENGUPTA, A., *Shift - register code for indexing applications*, Communications of the ACM, Vol.2 (10), (1959), 40-43.
 Describen el uso de una sucesión (2,10)-equilibrada para registrar automáticamente los informes de 64 estaciones pluviométricas.

1960

- (26) HARARY, F. and NORMAN, R.Z., *Some properties of line-digraphs*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Tomo IX - Serie II, (1960), 161-168. M.R. 24A # 693. Zb.99-182.

Se deducen propiedades de los grafos adjuntos y de los adjuntos iterados de multigrafos sin bucles. Dan un criterio de caracterización de los grafos adjuntos y uno de los grafos conexos isomorfos con su adjunto.

- (27) LEACH, E.B., *Regular sequences and frequency distributions*, Proc. Amer. Math. Soc., 11, (1960), 566-574. M.R. Vol.23A # 679. Zb.114-338.
 Describe el conjunto asociado a la "distribución límite de sucesiones regulares" y da dos métodos para construir sucesiones periódicas donde cada una de sus m-uplas tenga igual frecuencia. Uno de éstos es aplicable al problema estudiado en los Capítulos I y II.

1961

- (28) SABIDUSSI, G., *Graph derivatives*, Math. Zeitschr, 76, (1961), 385-401. M.R.24A#53.

Da condiciones bajo las cuales grafos no orientados sin bucles admiten ciertos cubrimientos especiales y de éstas deduce el resultado de Whitney dado en la página 93. Da además una definición de adjunto de grafos con aristas paralelas para la cual deduce un teorema similar al de Whitney pero válido bajo ciertas restricciones.

- (29) STEIN, S.K., *The mathematician as an explorer*, Sci. Amer., 204, (1961), 149-158. M.R.22A#7945.

Se dan amplias referencias bibliográficas relativas al problema que estudiamos en los Capítulos I y II.

- (30) YOELI, M., *Nonlinear feedback shift registers*, IBM Data Systems Div., Poughkeepsie, N.Y. Tech.Rept. TR 00.809, (1961).

1962

- (31) BRYANT, P.R., HEATH, F.G. and KILLICK, R.D., *Counting with feedback shift register by means of a jump technique*, IRE Trans. on Electronic Computers, E.C. 11, (1962), 285-286.

Se indica cómo modificar un "feedback shift register" lineal que genere un ciclo de longitud $2^n - 1$ para obtener otro con ciclos de longitud k ($1 \leq k < 2^n - 1$).

- (32) ORE, O., *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XXXVIII°, (1962). M.R.27#740. Zb.105-354.

- (33) YOELI, M., *Binary ring sequences*, Amer. Math. Monthly 69, (1962), 852-855. M.R.26#44. Zb.107-249.

Se demuestra que cualquiera sea $k \leq 2^m$ es posible construir sucesiones binarias circulares con k m -uplas distintas.

1963

- (34) KASTELEYN, P.W., *A soluble self-avoiding walk problem*, Physica, 29, (1963), 1329-1337. M.R.28#2859.

Utilizando la noción de grafo adjunto y las propiedades I y II de

la página 16 se enumeran los caminos hamiltonianos de algunas configuraciones que aparecen en física.

- (35) MAGLEBY, K.B., *The synthesis of nonlinear feedback shift registers*, Stanford Electronic Laboratory, Stanford, Calif.Tech.Rep.6207-1 , (1963), 60-62.
- (36) STEIN, S.K., *Memory-wheels*, (*Mathematics, the man made universe*, Ch. 10), Freedman and Co. (1963). *Les roues à mémoire*. (*Les mathématiques, ce monde que crée l'homme*, Ch.9). Ed. Dunod, (1967). Zb.115-1.

Reproduce con leves variantes (29).

1964

- (37) CHARTRAND, G.T., *Graphs and their associated line-graphs*, Ph.D. thesis, Michigan State University, (1964).

Se estudian los grafos adjuntos de grafos no orientados sin bucles. Entre otros resultados se dan algunos relativos a propiedades eulerianas o hamiltonianas y en particular se ve que si un grafo es distinto de una cadena y tiene p vértices ($p \geq 3$) entonces los que resultan de aplicarle al menos $p-3$ veces el operador de adjunción son hamiltonianos.

- (38) HEUCHENNE, C., *Sur une certaine correspondance entre graphes*, Bull. Soc.Roy.Sci.Liège, 33, (1964), 743-753. M.R.30#5297. Zb.134-433.

Caracteriza los grafos adjuntos de multigrafos y los grafos conexos isomorfos con su adjunto.

- (39) KAUFMANN, A et DESBAZEILLE, G., *La méthode du chemin critique*, Ed. Dunod , (1964). Zb.127-370.

1965

- (40) BUSACKER, R.G. and SAATY, T.L., *Finite graphs and networks. An introduction with applications*, Mc.Graw - Hill Co., (1965). M.R.35#79. Zb.146-201.
- (41) CHARTRAND, G.T., *The existence of complete cycles in repeated line-graphs*, Bull.Amer.Math.Soc., 71, (1965), 668-670. M.R.31#82. Zb.133-168.

Se dan algunos de los resultados de (37) relativos a propiedades hamiltonianas de los grafos adjuntos (caso no orientado).

- (42) HARARY, F. and NASH-WILLIAMS, C. St. J. A., *On eulerian and hamiltonian graphs and line-graphs*, *Canad. Math. Bull.*, 8, (1965), 701-709. M.R. 33#66. Zb.136-447.

Consideran grafos no orientados sin bucles y dan propiedades relativas al carácter de euleriano o al de hamiltoniano de sus adjuntos y de otros grafos ligados con esta noción.

- (43) MENON, P. K., *On a combinatorial problem of Good*, *Arch. Math.*, 16, (1965), 37-46. M.R.31#3350. Zb.134-251.

Mediante propiedades de los cuerpos finitos da un método para construir sucesiones (h,m)-equilibradas y muestra que tienen ciertas propiedades de ortogonalidad.

- (44) MURACCHINI, L. e GHIRLANDA, A. M., *Sul grafo commutato e sul grafo opposto di un grafo orientato*, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 14, (1965), 87-97. M.R. 33#2570. Zb.134-433.

Dan una condición que no pueden satisfacer los adjuntos de grafos que carecen de pares de arcos opuestos. Caracterizan los grafos conexos sin pares de arcos opuestos isomorfos con su adjunto.

- (45) MURACCHINI, L. e GHIRLANDA, A. M., *Sui grafi segnati et i grafi commutati*, *Statistica (Bologna)*, 25, (1965), 677-680. M.R. 33#7272.

Se considera la existencia de grafos con adjuntos iterados periódicos y se estudia una noción que refleja parcialmente la adyacencia, no la consecutividad de arcos.

1966

- (46) BARBUT, M., *Mots circulaires et équilibrés. Histoire du problème vue à travers la bibliographie*, *Math. Sci. Hum.* N°17, (1966), 59-61.

Contiene referencias bibliográficas relativas al problema estudiado en los Capítulos I y II.

- (47) CAMION, P., *Codes correcteurs d'erreur*, *Revue du CETHEDC*, Cahier N°3, (1966). M.R.35#5251.

Según referencias de Barbut (46) se consideran "soluciones lineales" del problema de las palabras circulares.

- (48) CHARTRAND, G. T. and STEWART, M. J., *Total digraphs*, *Canad. Math. Bull.*

9, (1966), 171-176. M.R.34#82. Zb.139-416.

Introducen la noción de grafo total (caso orientado) y deducen un criterio de caracterización de estos grafos. Dan además ciertas relaciones entre la noción introducida y la de conexidad.

- (49) JUNG, H.A., *Zu einem Isomorphiesatz von H. Whitney für Graphen*, Math. Ann., 164, (1966), 270-271. M.R.33#5518. Zb.141-411.

Extiende al caso infinito el resultado de Whitney (4) según el cual, excepto si $H=K_3$, si H es adjunto de un grafo conexo sin bucles éste está unívocamente determinado por H .

1967

- (50) AIGNER, M., *On the line-graph of a directed graph*, Math. Zeitschr., 102, (1967), 56-61. M.R.36#76. Zb.158-209.

Deduce propiedades de los grafos adjuntos de grafos y los caracteriza. Da también condiciones para el isomorfismo entre un grafo y su adjunto

- (51) BALCONI, G., *Singrammi commutati di singrammi orientati*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend., A-101, (1967), 49-55. M.R.37#3960. Zb. 162-279.

Se reencuentran algunos de los resultados de (26), (38) y se estudia el concepto "conexo por caminos".

- (52) BEINEKE, L.W., *On derived graphs and digraphs*, Beiträge zur Graphentheorie Vertragen auf dem internationalen Kolloquium in Manebach (DDR) (1967). Edit.: H. Sachs, H. J. Voss H. Walther. B.G. Teubner, (1968), 17-23. M.R.39#2645. Zb.179-292.

Caracteriza los grafos adjuntos en términos de subgrafos no permitidos y da propiedades de los adjuntos iterados.

- (53) DURJP, H., *Graphes et plans d'expériences temporels, mots circulaires et plans toriques*, Math. Sci. Hum. N°18, (1967), 1-31.

Con vistas a su aplicación en psicología experimental se estudian distintos planes de experiencias. Algunos de ellos están ligados con las sucesiones equilibradas.

- (54) GOLOMB, S.W., *Shift register sequences*, With portions co-authored by L.R. Welch, R.M. Goldstein and A.W. Hales, Holden-Day Inc., (1967). M.R.39#3906. Zb.267#94022. 2° Edición, Aegean Park (1980).

Se estudian los "feedback shift registers" y sus aplicaciones. En particular se consideran aquellos cuya función "feedback" es lineal y los que generan solamente ciclos. Se da un método que permite por recurrencia construir todas las sucesiones (h,m)-equilibradas y se da una nueva demostración de su número para $h=2$. Se deducen además algunas de sus propiedades aleatorias.

- (55) HALL, M. (Jr.), *Combinatorial theory*, Blaisdell Publ. Co., Waltham, Mass. (1967). M.R.37#80. Zb.196-24.

En el capítulo IX considera el problema de las palabras circulares y en particular los trabajos de Good (10) y de Bruijn (9).

- (56) KASTELEYN, P. W., *Graph theory and crystal physics*. (*Graph theory and theoretical physics*, Ch.2), Acad. Press, (1967), 43-110. M.R. 40#6903. Zb.205-284.

Se estudian problemas que aparecen en distintas estructuras físicas y se extienden los resultados de (34).

- (57) KNUTH, D. E., *Oriented subtrees of an arc digraph*, *J. Combinatorial Theory* 3, (1967), 309-314. M.R.35#5361. Zb.161-210.

Relaciona el número de arborescencias cubrientes de raíz dada que admite el grafo adjunto de un multigrafo G con el de las que tiene G (ver 3.2.13). Aplicándola a multigrafos regulares reencuentra el número de soluciones del problema que estudiamos en los Capítulos I y II.

- (58) RICHARDS, P. I., *Precedence constraints and arrow diagrams*, *S.I.A.M. Review*, 9, (1967), 548-553. Zb.149-417.

Demuestra que toda matriz booleana cuadrada R puede extenderse a otra S que admite un "arrow diagram". Esto lleva a dar una caracterización de los grafos adjuntos y a un método de "inmersión de un grafo en otro adjunto".

- (59) TORANZOS, F. A. y COSTA, J. C., *Sobre el gráfico de intercambio*, *Comunicaciones Científicas J.I.C.E.F.A.*, (4), (1967), 1-5.

Consideran grafos no orientados sin bucles y reencuentran una condición necesaria y suficiente para el isomorfismo entre un grafo G y su adjunto. Dan además una condición suficiente para que un grafo adjunto sea hamiltoniano.

- (60) BALCONI, G., *Sui singrammi a commutato periodico*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend., A-102, (1968), 427-436. M.R.39#1361. Zb.183-524.

Caracteriza los grafos con adjuntos iterados periódicos y estudia el caso de grafos isomorfos con su adjunto.

- (61) CHARTRAND, G.T., *On hamiltonian line-graphs*, Trans. Amer. Math. Soc., 134, (1968), 559-566. M.R.38#68. Zb.169-554.

Se reproducen algunos de los resultados dados en (37) relativos al carácter de euleriano o al de hamiltoniano de los grafos adjuntos iterados de grafos no orientados sin bucles.

- (62) CHIAPPA, R.A. et OKLANDER, E.T., *Une solution d'un problème sur les mots circulaires et équilibrés*, Math.Sci.Hum. N°21, (1968), 53-55.

Se da un algoritmo que permite construir distintas sucesiones (h,m)-equilibradas, cualesquiera sean h,m.

- (63) FREDRICKSEN, H.M., *Disjoint cycles from the de Bruijn graph*, Ph.D. Thesis. Dep. Elect. Engineering, Univ. of Southern California, Los Angeles, (1968).

Demuestra para $n \leq 6$ la validez de la conjetura de Golomb, según la cual todo conjunto de circuitos disjuntos dos a dos en $G_{2,n}$ contiene a lo sumo $Z_n = \frac{1}{n} \sum_d 2^{n/d} \phi(d)$ circuitos ($\phi(d)$ = números de naturales menores o iguales que d y primos con d (indicador de Euler) y suma extendida a todos los divisores d de n).

- (64) GELLER, D. and HARARY, F., *Arrow diagrams are line-digraphs*, S.I.A.M., J. Appl. Math., 16, (1968), 1141-1145. M.R.38#3179. Zb.184-493.

Se demuestra una equivalencia entre los "arrow diagrams" y los "grafos adjuntos", y se los caracteriza.

- (65) WALL, C.E., *Arc-digraphs and traversability. The Many Facets of Graph Theory*. (Proc. Conf. Western Michigan Univ.-Kalamazoo, (1968). Lecture notes N°110, Springer, (1969), 287-290. M.R.40#4170. Zb.187-212.

Demuestra relaciones válidas entre los multigrafos conexos y sus adjuntos iterados, referidas fundamentalmente al carácter de euleriano o al de hamiltoniano.

1969

- (66) CANTOR, D.G. and DIMSDALE, B., *On direction-preserving maps of graphs*, J. Combinatorial Theory, 6, (1969), 165-176. M.R.38#5673. Zb.181-519.

Introducen y estudian dos nociones, las de "vertex-dual graph" y "edge-dual graph". Ambas son inversas en cierto sentido. La primera de ellas extiende la noción de grafo adjunto y la segunda está ligada con el problema de inmersión que estudiamos en el Capítulo VII. Dan métodos para construir, a partir de un grafo dado G , el "edge-dual" y el "vertex-dual" con menor número de vértices.

- (67) JOHNSON, D.M. and MENDELSON, N.S., *Planarity properties of the Good-de Bruijn graphs*. *Combinatorial Structures and their Applications*. (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta, (1969)) Gordon and Breach, (1970), 177-183. M.R.42#1711. Zb.243#05106.

Estudian condiciones de planaridad para los grafos $G_{h,p}$.

- (68) KNUTH, D.E., *The Art of Computer Programming (Vol. I)*, Addison-Wesley, 2ª Edición, (1969), M.R.44#3530. Zb.191-179.

- (69) LEMPEL, A., *On a homomorphism of the de Bruijn graph and its applications to the design of feedback shift registers*, Proc. Seventh Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory, Monticello, Illinois, (1969). University of Illinois, Urbana, Ill. (1969), 652-661. M.R.41#8154.

Ver (75).

- (70) MENDELSON, N.S., *Directed graphs with the unique path property*. *Combinatorial Theory and its Applications II*, (Proc. Coll. Balatonfüred, (1969)) North-Holland, (1970), 783-799. M.R.45#6690. Zb.209-284.

Estudia los grafos $G_{h,p}$ como caso particular de otros en los cuales entre cada par de vértices hay un único camino de longitud p .

1970

- (71) BERGE, C., *Graphes et Hypergraphes*, Edit. Dunod, (1970) (2ª Edit. (1973)). M.R.50#9639. Zb.213-257.

- (72) FREDRICKSEN, H., *The lexicographically least de Bruijn cycle*, J. Combinatorial Theory, 9, (1970), 1-5. M.R.41#3287. Zb.199-317.

Estudia la función "feedback" del "shift register" que construye la

- sucesión que para $h=2$ determina el algoritmo de Martin-Ford.
- (73) FREDRICKSEN, H., *Asymptotic behavior of Golomb's $Z(n)$ conjecture*, IEEE Trans. Inf. Theory, IT 16, (1970), 509-510. M.R.43#1740. Zb. 199-594.
- El valor asintótico del número máximo de circuitos disjuntos que admite $G_{2,n}$ satisface para $n \rightarrow \infty$ la conjetura estudiada.
- (74) GOODSTEIN, R.L., *A generalized permutation problem*, Math.Gaz., LIV, (1970), 266-267. M.R.58#21665. Zb.229#05005.
- Extiende el método dado en (17) al caso no binario.
- (75) LEMPEL, A., *On a homomorphism of the de Bruijn graph and its applications to the design of feedback shift registers*, IEEE Trans.Computer, Vol.C-19, (1970), 1204-1209. M.R.41#8154. Zb.225#94028.
- Define un epimorfismo $D: G_{2,n} \rightarrow G_{2,n-1}$ ($n \geq 2$) y lo aplica al diseño de un "feedback shift register" que genere solamente ciclos. Deduce un método que permite obtener un circuito euleriano de $G_{2,n}$ conociendo uno en $G_{2,n-1}$ y da la expresión recurrente de la función "feedback" del "shift register" que efectiviza su construcción.
- (76) ROY, B., *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Edit. Dunod (T.1 (1969), T.2 (1970)). M.R.40#4159, 41#5039. Zb.238#90072 y 90073.

1971

- (77) CHIAPPA, R.A., *Sur les graphes adjoints*, Rev. Un.Mat. Argentina, 25, (1971), 299-302. M.R.51#239. Zb.293#05124.
- Se da una caracterización de los grafos adjuntos de multigrafos y se introducen dos nociones ligadas entre sí; una de ellas extiende la de grafo adjunto. (Ver Capítulo VII).
- (78) HEMMINGER, R.L., *More on line isomorphisms on pseudographs*, Proc. Second Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing. (Louisiana State Univ., Baton Rouge, Louisiana, (1971)). Louisiana State Univ. Press, (1971), 297-314. M.R.47#8358. Zb.288#05131.
- Estudia ciertos isomorfismos entre multigrafos no orientados que admiten bucles y extiende el conocido resultado de Whitney relativo a arista-isomorfismos no inducidos por isomorfismos.
- (79) HEMMINGER, R.L., *Isomorphism - induced line isomorphisms on pseudographs*, Czechoslovak Math. J., 21, (1971), 672-679. M.R.45#3233.

Zb.223#05129.

Estudia multigrafos no orientados eventualmente infinitos y siguiendo el método de (49) caracteriza los arista-isomorfismos inducidos por vértice-isomorfismos. Además describe aquellos que no lo son y esto lleva a clasificar los multigrafos en 9 clases (ver (87)).

- (80) LEMPEL, A., *m-ary closed sequences*, J. Combinatorial Theory, 10 (A), (1971), 253-258. M.R.43#1856. Zb.224#05008.

Se demuestra que cualesquiera sean h, m, k es posible construir sucesiones circulares con k palabras distintas, cada una de las cuales tiene m letras tomadas de un alfabeto de h .

- (81) LEMPEL, A., *On extremal factors of the de Bruijn graph*, J. Combinatorial Theory, 11 (B), (1971), 17-27. M.R.43#1874. Zb.239#05121.

Propone y estudia dos conjeturas relativas a la cardinalidad del número máximo de circuitos disjuntos dos a dos en $G_{2,n}$. Son demostradas para $n \leq 8$.

- (82) MOSSIGE, S., *Constructive theorems for the truth table of the Ford sequence*, J. Combinatorial Theory, 11 (A), (1971), 106-110. M.R.43#1857. Zb.217-309.

Se estudia la función "feedback" del "shift register" que construye la sucesión obtenida por el algoritmo de Martin-Ford.

- (83) ROTH, E., *Permutations arranged around a circle*, Amer. Math. Monthly, 78, (1971), 990-992. M.R.45#3215. Zb.243#05026.

Se da un algoritmo que permite construir distintas sucesiones (h, m) -equilibradas, cualesquiera sean h, m .

- (84) ZAMFIRESCU, C., *Disconnected digraphs isomorphic with their line digraphs*, Boll. Un. Mat. Ital., 4, (4), (1971), 888-893. M.R.46#90. Zb.236#05113.

Da una condición necesaria para que un grafo sin bucles una de cuyas dos únicas componentes conexas es un vértice aislado, sea isomorfo a su adjunto.

1972

- (85) BERGE, C. and RADO, R., *Note on isomorphic hypergraphs and some extensions of Whitney's theorem to families of sets*, J. Combinatorial Theory, 13 (B), (1972), 226-241. M.R.47#72. Zb.275#05128.

Estudian la posibilidad de extender a hipergrafos el conocido resultado de Whitney según el cual, excepto en pocos casos, cualquier isomorfismo entre los adjuntos de G_1 y de G_2 es inducido por uno entre G_1 y G_2 .

- (86) FREDRICKSEN, H., *Generation of the Ford Sequence of Length 2^n , n Large*, J. Combinatorial Theory, 12 (A), (1972), 153-154. M.R.44#5231. Zb.229#05004.

Propone un algoritmo que requiere menor capacidad de memoria que la necesaria según el método de (72).

- (87) HEMMINGER, R.L., *On Whitney's line graph theorem*, Amer. Math. Monthly, 79, (1972), 374-378. M.R.45#8562. Zb.239#05135.

Analiza el porqué de los casos excepcionales a los cuales se refiere el resultado de Whitney extendido por Jung.

- (88) HEMMINGER, R.L., *Line digraphs. Graph Theory and Applications*, (Proc. Conf. Western Michigan Univ. Kalamazoo, Michigan, (1972)). Lecture Notes in Mathematics, Vol.303. Springer, (1972), 149-163. M.R.51#243. Zb.247#05129.

Extiende al caso infinito caracterizaciones conocidas de grafos adjuntos y de grafos adjuntos con características particulares. Reencuentra la condición necesaria y suficiente para la existencia de isomorfismo entre un grafo finito conexo y su adjunto y da una solución parcial para el caso infinito.

- (89) MYKKELTVEIT, J., *A proof of Golomb's conjecture for the de Bruijn graph*, J. Combinatorial Theory, 13 (B), (1972), 40-45. M.R.48#1985. Zb.221#05068.

Demuestra una conjetura de Lempel (81) que implica otra de Golomb relativa al número máximo de circuitos disjuntos que admite $G_{2,n}$. (ver (63), (73)).

- (90) NEŠETŘIL, J., *Homomorphisms of derivative graphs*, Discrete Math., 1, (1971/72), 257-268. M.R.46#99. Zb.227#05109.

Estudia grafos no orientados sin bucles eventualmente infinitos y da condiciones bajo las cuales un homomorfismo del adjunto de G_1 en el de G_2 es inducido por otro de G_1 en G_2 . Para grafos conexos se reencuentra un resultado de Whitney-Jung.

1973

- (91) HEMMINGER, R.L. and ZELINKA, B., *Line isomorphisms on dipseudographs*, J. Combinatorial Theory, 14 (B), (1973), 105-121. M.R.47#3230. Zb. 263#05107.

Estudian en multigrafos (eventualmente infinitos) distintas nociones de arco isomorfismo y sus respectivas relaciones con la de vértice isomorfismo.

- (92) van LANTSCHOOT, E.J., *Double adjacencies between cycles of a circulating shift register*, IEEE Trans. Computers, C - 22, (1973), 944-955. M.R.50#6659. Zb.266#94024.

Se estudian las "doble adyacencias" de circuitos en los "shift register" cuya función "feedback" es $f(s_1, s_2, \dots, s_n) = (s_n, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$.

- (93) STONE, H.S., *Discrete mathematical structures and their applications*, Science Research Associated Inc., (1973). Zb.293#00002.

- (94) STREET, A.P., *Eulerian washing machines. Combinatorial Mathematics*, (Proc. Second Australian Conf., Melbourne, (1973)). Lecture Notes in Math. Vol.403. Springer, (1974), 105-108. M.R.51#12538. Zb.308#05110.

Se muestra una aplicación de las sucesiones $(2, m)$ -equilibradas.

1974

- (95) DEO, N., *Graph theory with applications to engineering and computer science*, Prentice-Hall Inc., (1974). M.R.50#12772. Zb.285#05102

- (96) DÖRFLER, W., *Kantenisomorphismen von Mengensystemen*, Studia Sci. Math. Hungar., 9, (1974), 1-7. M.R.51#7952. Zb.301#05128.

Estudia hipergrafos y deduce condiciones bajo las cuales los arista isomorfismos son inducidos por vértice isomorfismos.

- (97) HEMMINGER, R.L., *Digraphs with periodic line digraphs*, Studia Sci. Math. Hungar., 9, (1974), 27-31. M.R.52#2948. Zb.304#05112.

Se estudian multigrafos con adjuntos iterados periódicos. Se los caracteriza para el caso finito y se da una evaluación del período en términos de la "estructura básica" de G.

- (98) van LINT, J.H., *Combinatorial Theory Seminar*, Eindhoven Univ. of Technology. (Ch. IX - de Bruijn sequences). Lect. Notes in Math. Vol.

382. Springer-Verlag, (1974), 82-92. M.R.50#4311. Zb.315#05001.

En el Capítulo IX considera los problemas de enumeración y construcción de sucesiones (h,m) -equilibradas. Se refiere también a ciertas propiedades aleatorias de estas sucesiones y a su relación, en el caso $h=2$, con los "feedback shift register".

- (99) RHEINBOLDT,W.C. and MESZTENYI,Ch.K., *Arc graphs and their possible application to sparse matrix problems*, Nordisk Tidskrift Information sbehandling (BIT), 14, (1974), 227-239. M.R.58#16379. Zb.284# 05109.

Introducen una representación de G que atiende sólo a la relación de consecutividad de sus arcos y que es alternativa de la que se logra mediante el adjunto de G . Lo aplican para estudiar la LU descomposición de una matriz.

- (100) SYSLO,M.M., *Remarks on line-digraphs*, Bull.Acad.Polan.Sci.Ser.Math., Astronom.Phys., XXII, (1974), 5-10. M.R.52#7957. Zb.273#05114.

Estudia y caracteriza los grafos adjuntos de multigrafos y de multigrafos con características particulares. Considera además la inmersión de un grafo en uno adjunto.

- (101) ZELINKA,B., *Polar graphs and railway traffic*, Apl.Mat., 19, (1974), 169-176. M.R.49#12066. Zb.283#05116.

Para resolver un problema práctico introduce y aplica las nociones de "grafo polar" y "adjunto de grafo polar" (caso no orientado).

1975

- (102) BOVET,P., *Génération automatique de mots circulaires et équilibrés*, Math.Sci.Hum. N°49, (1975), 29-41. M.R.55#150. Zb.312#92008.

Considera un método aleatorio elemental para construir palabras circulares.

- (103) de BRUIJN,N.G., *Acknowledgement of priority to C.Flye Sainte-Marie on the counting of circular arrangements of 2^n zeros and ones that show each n -letter word exactly once*, Technological Univerity Eindhoven, Netherland, Report 75 - WSK 06. Zb.323#05119.

Se dan referencias históricas del problema de las palabras circulares y se reproducen (1),(2) y (9).

- (104) CHIAPPA,R.A., *Caractérisation des graphes adjoints hamiltoniens*, Math.Japon., 20, (1975), 53-56. M.R.53#196. Zb.316#05122.

Se caracterizan, en términos de su relación de precedencia, los grafos adjuntos que admiten caminos hamiltonianos.

- (105) FREDRICKSEN, H., *A Class of nonlinear de Bruijn cycles*, J. Combinatorial Theory, 19 (A), (1975), 192-199. M.R.52#9670. Zb.311#05007.

Se ve que intercambiando secciones de la sucesión $(2, m)$ -equilibrada que se genera por el algoritmo de Martin-Ford, pueden obtenerse 2^{2^m-5} . Además se describe el método introducido en (86) para generarla y se indica como modificarlo para hallar las que resultan aplicando el intercambio indicado. Se incluyen breves referencias históricas.

- (106) FREDRICKSEN, H. and KESSLER, I., *Lexicographic composition and de Bruijn sequences*, Proc. Sixth Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ.-Boca Raton, Florida, (1975))- Congressus Numerantium N°XIV, Utilitas Math., (1975), 315-339. M.R.52#13626. Zb.325#05002.

Ver (115).

- (107) HUTCHINSON, J.P., *On words with prescribed overlapping subsequences*, Utilitas Math., 7, (1975), 241-250. M.R.51#12602. Zb.306#05113.

Se determina el número de soluciones de un problema relacionado con sucesiones de polímeros. Incluye el estudiado en (108).

- (108) HUTCHINSON, J.P. and WILF, H.S., *On eulerian circuits and words with prescribed adjacency patterns*, J. Combinatorial Theory, 18 (A), (1975), 80-87. M.R.51#10115. Zb.297#05128.

Se evalúa el número de soluciones que admite cierto problema combinatorio ligado con otro que se presenta en bioquímica y que extiende el planteado en el Capítulo I.

- (109) KLERLEIN, J.B., *Characterizing line dipseudographs*, Proc. Sixth Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Florida, (1975)). Congressus Numerantium N°XIV, Utilitas Math., (1975), 429-442. M.R.53#190. Zb.325#05106.

Se dan caracterizaciones de una noción que extiende la de grafo ad junto, caso orientado.

- (110) MYKKELTVEIT, J., *Generating and counting the double adjacencies in a pure circulating shift register*, IEEE Trans. Computers, C-24, (1975), 229-304. M.R.54#9875. Zb.298#94038.

Se reencuentran algunos de los resultados dados en (92).
Se da un método para construir todos los pares de circuitos con "doble adyacencia" y se los enumera.

1976

- (111) BEINEKE, L.W. and HEMMINGER, R.L., *Infinite digraphs isomorphic with their line digraphs*, J. Combinatorial Theory, 21 (B), (1976), 245-256. M.R.58#5339. Zb.297#05115.

Extienden resultados anteriores y completan para el caso infinito la descripción de los multigrafos isomorfos a su adjunto.

- (112) LEPEŠINSKIĬ, N.A. and MALYŠKO, V.V., *Arc graphs and the determination of elementary paths between pairs of vertices of a graph*, (En ruso), Vescí Akad. Navuk. BSSR Ser. Fíz-Mat. Navuk, (1976), N°1 5-8, M.R.53#10639. Zb.374#05031.

Definen un "k-arc graph" de G que no refleja los eventuales circuitos de G y lo utilizan para determinar un conjunto de caminos con ciertas restricciones.

- (113) ROBERTS, J. *Hamiltonian persistency is periodic among iterated line digraphs. Theory and Applications of Graphs*, (Proc. Internat. Conf. Western Michigan Univ., (1976)). Lecture Notes in Math. Vol. 642, Springer-Verlag, (1978), 491-499. M.R.58#21819. Zb.398#05063.

Se dan condiciones necesarias y suficientes para que la sucesión de adjuntos iterados de G contenga una infinidad de hamiltonianos (eulerianos). Se ve que si contiene dos, contiene infinitos.

1977

- (114) FERNANDEZ de la VEGA, W. et GUENOCHÉ, A., *Construction de mots circulaires aléatoires uniformément distribués*, Math. Sci. Hum. N°58, (1977), 25-29, M.R.56#15453. Zb.364#94051.

Se propone un método para construir sucesiones (h,m)-equilibradas fundado en la construcción aleatoria de arborescencias.

- (115) FREDRICKSEN, H. and KESLLER, I., *Lexicographic compositions and de Bruijn sequences*, J. Combinatorial Theory, 22 (A), (1977), 17-30. M.R.54#11837. Zb.343#05008.

Relacionan las "composiciones lexicográficas de $m-1$ " con los "necklaces" de longitud $m-1$ a dos colores y dan un algoritmo que genera una lista ordenada de éstas. Otro algoritmo permite, a partir de dicha lista, construir una sucesión $(2,m)$ -equilibrada para cuya construcción se requiere una capacidad de almacenaje lineal en m .

- (116) HEMMINGER, R.L. and KLERLEIN, J.B., *Line-pseudo-digraphs*, J. Graph Theory, 1, (1977), 365-377. M.R.57#5812. Zb.379#05032.

Definen el concepto "R-line-digraph" que extiende el de grafo adjunto y dan un teorema "de tipo Withney" que caracteriza los multigrafos conexos cuyos R-line-digraphs son isomorfos.

- (117) MALYŠKO, V.V., *A search for elementary contours using arc graphs*, (en ruso) Vesci. Akad. Navuk BSSR Ser Fiz-Mat. Navuk, N°2, (1977) 102-103, M.R.58#348.

Define un "arc graph" que omite la representación de arcos opuestos y deduce propiedades de esta operación así como de los grafos que resultan de aplicarla reiteradamente. Referencias de otros trabajos en M.R.58#347 y M.R.58#5346.

1978

- (118) FREDRICKSEN, H. and MAIORANA, J., *Necklaces of beads in k-colors and k-ary de Bruijn sequences*, Discrete Math., 23, (1978), 207-210. M.R.80e#05007. Zb.384#05004.

Extienden el método de (106), (115) y dan un algoritmo para construir una sucesión ordenada de "necklaces" en k colores. Lo aplican para determinar una solución del problema del Capítulo I.

- (119) HEMMINGER, R.L. and BEINEKE, L.W., *Line graphs and line digraphs*, (Selected Topics in Graph Theory, Ch.10), Ed. L.W. Beineke - R.J. Wilson. Academic Press, (1978), 271-305. Zb.434#05056.

Se dan amplias referencias generales sobre los grafos adjuntos caso orientado y caso no orientado.

- (120) ORLIN, J.B., *Line-digraphs, arborescences and Theorems of Tutte and Knuth*, J. Combinatorial Theory, 25 (B), (1978), 187-198. M.R.80a#05105. Zb.328#05113.

Da una caracterización de grafos adjuntos y aplicando métodos combinatorios reencuentra los resultados de Knuth (57) y uno de Tutte del cual resulta II de la página 16.

- (121) ŠIMÁNEĚ,Č., *de Bruijn cycles and their application for encoding of discrete positions*, Kybernetika (Prague), 14, (1978), 408-420. M. R.80e#05073. Zb.392#94012.

Da un método para construir circuitos de $G_{2,n+1}$ a partir de uno en $G_{2,n}$.

1979

- (122) CHIAPPA,R.A., *Sur la notion d'adjoint aux graphes orientés et aux graphes non orientés*, Rend.Mat., 12, (1979), 85-104. M.R.80m# 05091. Zb.425#05048.

Se dan dos extensiones del concepto grafo adjunto -caso no orientado- y se las relaciona con el de adjunto -caso orientado-. Esta relación permite reencontrar la condición necesaria y suficiente para el isomorfismo entre un multigrafo no orientado y su adjunto, utilizando la análoga del caso orientado.

- (123) JACKSON,D.M. and GOULDEN,I.P., *Sequence enumeration and the de Bruijn - van Aardenne-Ehrenfest-Smith-Tutte theorem*, Canad., J. Math., XXXI, (1979), 448-495. M.R.81j#05013. Zb.431#05004.

A partir de la función generadora de cierto tipo de sucesiones reen cuentan además de I (pág. 16) un resultado de (108) y dan una expresión para determinar el número de circuitos hamiltonianos que admite un grafo G.

- (124) MYKKELTVEIT,J., SIU,M.K. and TONG,P., *On the cycle structure of some non-linear shift register sequences*, Inform. and Control, 43, (1979), 202-215. M.R.81a#94037. Zb.431#68059.

Estudian la generación de ciclos mediante "shift registers" no lineales y dan dos métodos para construir palabras binarias equilibradas. Uno de ellos reformula el dado en (75).

- (125) PULTR,A., *On linear representations of graphs. Fundamentals of computation theory*, (Proc.Conf. Algebraic, Arith. and Categorical Methods in Comput.Theory. Berlin, Wendisch-Rietz, (1979)). Math. Research 2 - Akademie-Verlag, (1979), 362-369. M.R.81g#05079.

Propiedades del funtor de la categoría de los multigrafos en la de los adjuntos permiten dar una caracterización de éstos últimos. Se estudia además una "representación lineal" de los grafos.

- (126) WAN, Z.X. and LIU, M.L., *Automorphisms and homomorphisms of the de Bruijn-Good graph*, (En chino), *Acta Math. Sinica*, 22, (1979), 170-177. M.R.80i#05047. Zb.397#05027.

Reencuentran un resultado de Yoeli (30) según el cual excluida la identidad hay un único automorfismo en $G_{2,n}$. Determinan además que hay seis homomorfismos -dos a uno- de $G_{2,n} \rightarrow G_{2,n-1}$.

1980

- (127) CHIAPPA, R.A., *Palabras circulares equilibradas. Grafos adjuntos*, Tesis doctoral. Universidad Nacional del Sur, (1980).

Presenta pocas diferencias con éste trabajo.

- (128) GOLOMB, S.W., *On the classification of balanced binary sequences of period $2^n - 1$* , *IEEE Trans. Inf. Theory*, I.T., 26, (1980), 730-732. M.R.81k#94050.

Sea U el conjunto de las sucesiones binarias de período $p = 2^n - 1$ con $\frac{p+1}{2}$ unos y $\frac{p-1}{2}$ ceros por período. Se definen ciertos subconjuntos de U (uno de ellos está en correspondencia biunívoca con el de las sucesiones $(2,n)$ -equilibradas) y se muestran algunas propiedades del reticulado que definen. Se hacen además tres conjeturas respecto del mismo.

- (129) LEPEŠINSKIĀ, N.A. and MALYŠKO, V.V., *Characterization and uniqueness of representation by arc graphs*, (en ruso), *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 24, (1980), 200-202, M.R.81j#05064. Zb.421#05059.

Definen recursivamente un "k-arc graph" de G que no refleja los circuitos de G y lo caracterizan en términos de ciertos subgrafos no permitidos.

- (130) SIU, M.K. and TONG, P., *Generation of some de Bruijn sequences*, *Discrete Math.*, 31, (1980), 97-100. M.R.81j#05041. Zb.444#05035.

Se extienden técnicas de (124) para contruir soluciones binarias del problema estudiado en los Capítulos I y II.

INDICE ALFABETICO DE AUTORES CITADOS

van AARDENNE-EHRENFEST, T.	(14)
AIGNER, M.	(50)
BALCONI, G.	(51) (60)
BARBUT, M.	(46)
BEINEKE, L.	(52) (111) (119)
BERGE, C.	(21) (23) (71) (85)
BOVET, P.	(102)
de BRUIJN, N.G.	(9) (14) (103)
BRYANT, P.R.	(31)
BUSACKER, R.G.	(40)
CAMION, P.	(47)
CANTOR, D.G.	(66)
COSTA, J.C.	(59)
CHARTRAND, G.T.	(37) (41) (48) (61)
CHIAPPA, R.A.	(62) (77) (104) (122) (127)
DAWSON, R.	(18)
DEO, M.	(95)
DESBAZEILLE, G.	(39)
DIMSDALE, B.	(66)
DÖRFLER, W.	(96)
DURUP, H.	(53)
ELDERT, C.	(22)
FERNANDEZ de la VEGA, W.	(114)
FLYE SAINTE-MARIE, C.	(2)
FORD, L.R. (Jr.)	(19)
FREDRICKSEN, H.M.	(63) (72) (73) (86) (105) (106) (115) (118)
FRIEDLAND, B.	(24)
GELLER, D.	(64)

GHIRLANDA, A.M.	(44) (45)
GOLOMB, S.W.	(20) (54) (128)
GOOD, I.J.	(10) (18)
GOODSTEIN, R.L.	(17) (74)
GOULDEN, I.P.	(123)
GRAY, H.J.	(22)
GUENOCHÉ, A.	(114)
GURK, H.M.	(22)
HALL, M. (Jr.)	(55)
HARARY, F.	(26) (42) (64)
HEATH, F.G.	(31)
HEMMINGER, R.L.	(78) (79) (87) (88) (91) (97) (111) (116) (119)
HEUCHENNE, C.	(38)
HUTCHINSON, J.P.	(107) (108)
JACKSON, D.M.	(123)
JOHNSON, D.M.	(67)
JUNG, H.A.	(49)
KASTELEYN, P.W.	(34) (56)
KAUFMANN, A.	(39)
KESSLER, I.	(106) (115)
KILLICK, R.D.	(31)
KLERLEIN, J.B.	(109) (116)
KNUTH, D.E.	(57) (68)
KOROBOV, N.M.	(13) (15)
KRAUSZ, J.	(8)
van LANTSCHOOT, E.J.	(92)
LEACH, E.B.	(27)
LEMPEL, A.	(69) (75) (80) (81)
LEPEŠINSKIĀ, M.A.	(112) (129)
LESSARD, R.	(16)
van LINT, J.H.	(98)
LIU, M.L.	(126)
MAGLEBY, K.B.	(35)
MAIORANA, J.	(118)

MALYŠKO, V. V.	(112) (117) (129)
MANTEL, W.	(3)
MARTIN, M. H.	(5)
MENDELSON, N. S.	(67) (70)
MENON, P. K.	(43)
MESZTENYI, Ch. K.	(99)
MOSSIGE, S.	(82)
MURACCHINI, L.	(44) (45)
MYKKELTVEIT, J.	(89) (110) (124)
NADLER, M.	(25)
NASH-WILLIAMS, C. St. J. A.	(42)
NEŠETŘIL, J.	(90)
NORMAN, R. Z.	(26)
OKLANDER, E. T.	(62)
ORE, O.	(32)
ORLIN, J. B.	(120)
POPPER, K. R.	(6)
PULTR, A.	(125)
RADO, R.	(85)
REES, D.	(11)
RHEINBOLDT, W. C.	(99)
RICHARDS, P. I.	(58)
de RIVIÈRE, A.	(1)
ROBERTS, J.	(113)
ROTH, E.	(83)
ROY, B.	(76)
RUBINOFF, M.	(22)
SAATY, T. L.	(40)
SABIDUSSI, G.	(28)
SENGUPTA, A.	(25)
ŠIMANĚ, Č.	(121)
SIU, M. K.	(124) (130)
SMITH, C. A. B.	(7)
STEIN, S. K.	(29) (36)

STERN, T.	(24)
STEWART, M. J.	(48)
STONE, H. S.	(93)
STREET, A. P.	(94)
SYSLO, M. M.	(100)
TONG, P.	(124) (130)
TORANZOS, F. A.	(59)
TUTTE, W. T.	(7) (12)
WALL, C. E.	(65)
WAN, Z. X.	(126)
WELCH, L.	(20)
WILF, H. S.	(108)
WHITNEY, H.	(4)
YOELI, M.	(30) (33)
ZAMFIRESCU, C.	(84)
ZELINKA, B.	(91) (101)