

2

RAUL A. CHIAPPA

**RECUENTO Y ENUMERACION DE CAMINOS
Y DE CADENAS ELEMENTALES**

1994

**INMABB - CONICET
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA**

NOTAS DE MATEMATICA DISCRETA (*)

N ° 2

**RECUESTO Y ENUMERACION DE CAMINOS
Y DE CADENAS ELEMENTALES**

RAUL A. CHIAPPA

INMABB - CONICET

1994

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

() La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.*

RECUESTO Y ENUMERACION DE CAMINOS Y DE CADENAS ELEMENTALES

RESUMEN

En este trabajo nos proponemos abordar los conocidos y frecuentes problemas de recuento y de enumeración de caminos y de cadenas elementales.

A tal efecto propondremos, en 1), un método para evaluar el número de caminos elementales de longitud $L \geq 1$, entre cada par de vértices de un multidigrafo finito.

Dicho procedimiento que fue comunicado en la XLII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Tandil, octubre de 1992, nos llevará a enunciar, en 2), un algoritmo para decidir sobre la existencia de tales caminos.

Además, el procedimiento dado en 1) nos permitirá, en 3), determinar dichos caminos. Pero para esto será más eficiente emplear el algoritmo que daremos en 5), que está fundado en una operatoria diferente y fue comunicado en la XLIII Reunión Anual de la Unión Matemática, Argentina, Neuquén, octubre de 1993.

Por otra parte, de la correspondencia biyectiva indicada en 4), resultará que los métodos en cuestión podrán ser utilizados para resolver los problemas similares en el caso no dirigido.

En el apéndice nos referiremos a algunos de los trabajos en los cuales se estudió el problema que nos ocupa.

INTRODUCCION

En lo que sigue presupondremos un conocimiento mínimo de la terminología propia de la teoría de grafos. No obstante, atento a la diversidad de designaciones de sus conceptos puntualizaremos aquellos que nos interesen particularmente.

Entenderemos por camino elemental de longitud L , $L \geq 1$, a toda sucesión $C : x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, u_L, x_{L+1}$ de arcos u_i de la forma $u_i = (x_i, x_{i+1})$ y de pares de vértices, tales que $x_i \neq x_j$ si $i, j \in \{1, \dots, L\}$ (x_1 y x_{L+1} pueden ser iguales).

Admitiremos que cada vértice determina un camino nulo.

A $C : x_1, u_1, \dots, x_{L+1}$, no nulo, lo notaremos $C : x_1 \Rightarrow x_{L+1}$.

Un camino $C : x_1 \Rightarrow x_{L+1}$ es abierto si $x_1 \neq x_{L+1}$ y cerrado (en x_1) caso contrario.

Habitualmente omitiremos explicitar los vértices de los caminos.

La clase de equivalencia de todos los caminos que se obtienen por permutación circular a partir de un camino elemental cerrado (no nulo) es un circuito elemental.

Frecuentemente, por abuso de lenguaje, suele emplearse el vocablo "camino" para referirse, tanto a las sucesiones de arcos y vértices que lo definen como al conjunto de elementos que integran dicha sucesión. Análogamente, el término "circuito" se emplea también para designar a los caminos cerrados que lo generan y al conjunto de sus elementos. Atentos a nuestro objetivo evitaremos tal identificación y cuando querramos enfatizar que nos referimos al conjunto de elementos que integran un circuito lo designaremos s-circuito.

Para el caso no dirigido cabe la introducción de nociones similares a las de camino y circuito.

Más precisamente, diremos cadena de longitud L , $L \geq 1$, a toda sucesión $C: x_1, u_1, \dots, u_L, x_{L+1}$ de aristas $u_i = [x_i, x_{i+1}]$.

Si además, cada vez que $u_i = u_j$ entonces $x_i = x_j$; $x_{i+1} = x_{j+1}$ C es cadena orientable.

Admitiremos que cada vértice es una cadena nula.

Una cadena C de extremos x_1, x_{L+1} es abierta si $x_1 \neq x_{L+1}$; cerrada (en x_1) si $x_1 = x_{L+1}$ y elemental si para cualesquiera $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, L\}$, $x_i \neq x_j$ (se admite $x_1 = x_{L+1}$).

En particular, cada arista u , de extremos x, y , $x \neq y$, determina las cadenas elementales abiertas x, u, y ; y, u, x y las cadenas elementales cerradas no orientables x, u, y, u, x ; y, u, x, u, y .

Nótese que si omitimos la indicación expresa de los vértices no se podría distinguir entre las dos cadenas que componen cada uno de los pares que acabamos de indicar.

La clase de equivalencia de todas las cadenas que se obtienen por permutación circular a partir de una cadena cerrada orientable (no nula) es un ciclo.

A excepción de los pares de cadenas elementales cerradas no orientables de longitud dos asociadas a cada arista distinta de bucle (son las de la forma x, u, y, u, x) las cadenas elementales son orientables y por lo tanto, las cerradas generan ciclos.

En particular, cada par de aristas paralelas $a = [x, y] = b$ determinan 4 cadenas elementales cerradas orientables de longitud dos, a saber $C_1 = x, a, y, b, x$; $C_2 = y, b, x, a, y$; $C_3 = x, b, y, a, x$

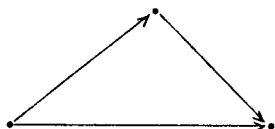
$C_4 = y, a, x, b, y.$

Las cadenas C_1, C_2 generan un ciclo, que es "opuesto" del que inducen $C_3, C_4.$

Respecto de los vocablos "cadena" y "ciclo" es habitual un abuso de lenguaje análogo al indicado con relación a los términos "camino" y "circuito".

Con referencia al problema que nos ocupa, notemos que asignando a todo arco valor uno, los métodos para determinar caminos de longitud mínima llevan a determinar caminos elementales, pero que no todos los elementales podrían hallarse de este modo.

Ejemplo :



Observemos además, que para algunas configuraciones muy particulares es relativamente fácil deducir expresiones que permiten obtener el número buscado.

Así por ejemplo, en el completo de orden n :

- el número de sus cadenas elementales abiertas de longitud r ($1 \leq r \leq n-1$) es : $n(n-1)(n-2)\dots(n-r) = \prod_{r+1}^n$.
- el de sus cadenas elementales de longitud r y extremos prefijados $i \neq j$ es \prod_{r-1}^{n-2} .
- el número de sus cadenas elementales, abiertas, de longitud $(n-1)$ coincide con el de las elementales, cerradas, de longitud n .

Toda cadena elemental cerrada de longitud $h \geq 3$ es orientable y las h obtenidas por permutación circular generan el mismo ciclo. En consecuencia, si $n \geq 3$ el número de ciclos elementales de longitud n en K_n es $(n-1)!$.

Por lo tanto, el de sus ciclos elementales es $\sum \binom{n}{i} (i-1)!$ con $3 \leq i \leq n$.

Finalmente, K_1 y K_2 no contienen ciclos elementales, K_3 contiene dos de dichos ciclos, K_4 contiene catorce y para $n \geq 5$ el número de los ciclos elementales de K_n supera ampliamente a 2^n .

En (1) Ali dedujo, además de resultados estrechamente ligados con algunos de los anteriores, una expresión que permite calcular el número de cadenas elementales, entre pares de vértices de grafos planares normales maximales y muestra como sucesivas eliminaciones de vértices permitirían aplicar sus resultados a grafos arbitrarios.

Por otra parte, de acuerdo con los comentarios de Mathematical Reviews y Zentralblatt für Mathematik, Harary y Manvel (14) dieron, en 1971, una expresión que permite calcular en términos de la matriz precedencia (adyacencia) el número de circuitos (ciclos) elementales de longitudes $L = 3,4,5$, dando así una solución parcial del problema que nos ocupa.

Obtuvieron, además, otros resultados parciales y una evaluación del número de n -ciclos en el completo K_n y de los $2n$ -ciclos en grafos $K_{r,s}$.

1- RECUESTO DE CAMINOS ELEMENTALES

El primero de los métodos que proponemos se basa en los dos resultados siguientes :

A) Si $P = (p_{i,j})$ es la matriz de precedencia de un multidigrafo G la componente $p_{i,j}^{(h)}$ de P^h , ($h \geq 1$) da el número de caminos de longitud h que van desde i hasta j (no necesariamente $i \neq j$).

Sólo si G carece de caminos cerrados de longitud $L < h$ puede afirmarse que todos los $p_{i,j}^{(h)}$ son caminos elementales.

B) El camino $u_1, u_2, u_3, \dots, u_h, u_{h+1}$ es elemental si y solamente si sus subcaminos : u_1, \dots, u_h ; u_2, \dots, u_{h+1} son elementales y abiertos. Además, en tal caso, también son elementales y abiertos u_1 y u_{h+1} .

En particular, el camino u_1, u_2 es elemental si y solamente si carece de bucles.

Obviamente, si G es de orden n existe un valor $L_0 \leq n$ tal que el conjunto de los caminos elementales de longitud $L > L_0$ es vacío.

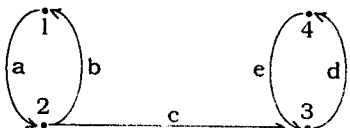
Sea \bar{E}_h (\bar{E}_h^0) la matriz cuyos elementos dan el número de caminos elementales (caminos elementales abiertos) de longitud h .

Aplicando A) y B) se tiene que si existen caminos elementales de longitud $(h+1)$ desde i hasta j , eventualmente $i=j$, entonces

$$(\bar{E}_1^0 \circ \bar{E}_h^0)_{i,j} \wedge (\bar{E}_h^0 \circ \bar{E}_1^0)_{i,j} \neq 0.$$

La recíproca de la afirmación anterior es falsa; puede suceder que al contar esos caminos uno de los que llevan desde i hasta j , perteneciente a $(\bar{E}_1^0 \circ \bar{E}_h^0)$ pero no a $(\bar{E}_h^0 \circ \bar{E}_1^0)$ se compense con otro, también desde i hasta j , que está contado en $(\bar{E}_h^0 \circ \bar{E}_1^0)$ pero no en $(\bar{E}_1^0 \circ \bar{E}_h^0)$.

Ejemplo 1

Dado el digrafo G  y poniendo . en vez de 0

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_1^0 = \begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . \end{bmatrix} \quad \bar{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & . & 1 & . \\ . & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{E}_2^0 = \begin{bmatrix} . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$A = (\bar{E}_1^0 \circ \bar{E}_2^0) \wedge (\bar{E}_2^0 \circ \bar{E}_1^0) = \begin{bmatrix} . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que la unidad de $(A)_{1,4}$ corresponde al camino elemental a, c, d . A su vez las unidades de $(\bar{E}_1^0 \circ \bar{E}_2^0)_{2,3}$ y de $(\bar{E}_2^0 \circ \bar{E}_1^0)_{2,3}$ representan, respectivamente, a los caminos b, a, c ; c, d, e que implican $(A)_{2,3} = 1$, aún cuando no hay camino elemental de longitud tres desde 2 hasta 3.

Visto que para $h \geq 2$ un camino u_1, u_2, \dots, u_{h+1} está en $\bar{E}_1^0 \circ \bar{E}_h^0$ pero no en $\bar{E}_h^0 \circ \bar{E}_1^0$ (en $\bar{E}_h^0 \circ \bar{E}_1^0$ pero no en $\bar{E}_1^0 \circ \bar{E}_h^0$) si y solamente si u_1, u_2, \dots, u_h (u_2, u_3, \dots, u_{h+1}) es camino elemental cerrado, para evitar situaciones como la del ejemplo anterior

basta asegurar que al calcular el ínfimo en cuestión solamente se considerarán pares de unidades de $(\bar{E}_1^0, \bar{E}_h^0)_{i,j}$ y de $(\bar{E}_h^0, \bar{E}_1^0)_{i,j}$ que representen, respectivamente, sucesiones de arcos con un mismo primer (último) arco.

Las notaciones y operaciones que consideraremos a continuación, nos permitirán tener en cuenta cual es el primero de los arcos de los distintos caminos y posibilitarán la evaluación buscada.

Es claro que representando cada conjunto de arcos paralelos en G por uno único, la determinación de sus caminos puede reducirse a la búsqueda de caminos en el digrafo \underline{G} así obtenido.

En efecto, los caminos de G se obtendrán substituyendo en los de \underline{G} y de todas las formas posibles, cada arco de \underline{G} por alguno de los de G que representa.

En \underline{G} habrá tantos arcos de vértice inicial i como conjuntos de arcos paralelos con vértice inicial i en G . Luego $d_i^+(\underline{G}) \leq d_i^+(G)$. Convendremos que cada conjunto de arcos paralelos en G , de extremo inicial i se notará α_{i_d} ; $1 \leq d \leq d_i^+(G)$

En lo que sigue consideraremos matrices cuadradas M cuyos elementos $(M)_{i,j}$ serán pares de la forma $(\emptyset, 0)$ o bien, conjuntos de pares que se indicarán $U_d (\alpha_{i_d}, m_{i,j})$

donde $\left[\begin{array}{l} \alpha_{i_d} \\ m_{i,j} \in \mathbb{Z}^+ \end{array} \right.$ es uno de los conjuntos de arcos paralelos de vértice inicial i .
denotará el número de caminos $i \Rightarrow j$ cuyo primer arco pertenece a α_{i_d} .

Las matrices en cuestión serán operadas de acuerdo con las reglas que siguen:

-I-

$$(C)_{i,j} = (A \circ B)_{i,j} = \bigcup_d (\alpha_{i_d}, c_{i,j}) \quad \text{con} \quad c_{i,j} = \sum a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

supuesto que la suma se extiende a todas las componentes

$(A)_{i,k}$ cuyo primer elemento es α_{i_d} .

Si $c_{i,k} = 0$ pondremos $(\emptyset, 0)$.

Véase que para la determinación de los elementos $(C)_{i,j}$ solamente interesan las segundas componentes de los elementos $(B)_{k,j}$ y que todos estos podrían sustituirse por el correspondiente $\sum b_{k,j}$.

Esta forma abreviada y más cómoda de proceder será empleada en los Ejemplos 3 y 4.

-II-

$$(D)_{i,j} = (A \wedge B)_{i,j} = \bigcup_d (\alpha_{i_d}; a_{i,j} \wedge b_{i,j}) \quad \text{supuesto que}$$

existan $(A)_{i,j} = (\alpha_{i_d}; a_{i,j})$; $(B)_{i,j} = (\alpha_{i_d}; b_{i,j})$

tales que $a_{i,j} \wedge b_{i,j} \neq 0$. Caso contrario pondremos $(\emptyset; 0)$.

-III-

Por otra parte, indicaremos con M^0 la matriz obtenida a partir de M sustituyendo sus componentes de la diagonal principal por $(\emptyset, 0)$.

De las definiciones resulta que el conjunto de estas matrices es cerrado para las operaciones indicadas y en consecuencia podrán aplicarse reiteradamente.

En lo que sigue, dado un multidigrafo G de orden n notaremos $E_h(G)$ ($E_h^0(G)$), $1 \leq h \leq n$, a las matrices definidas recursivamente por :

$$(E_1(G))_{i,j} = \begin{cases} (\emptyset; 0) & \text{si no existen arcos } (i,j) \\ (\alpha_{i_d}; p_{i,j}) & \text{si } \alpha_{i_d} \text{ contiene } p_{i,j} \text{ arcos } (i,j) \end{cases}$$

$$E_h(G) = (E_1^0(G) \circ E_{h-1}^0(G)) \wedge (E_{h-1}^0(G) \circ E_1^0(G))$$

En particular, $E_2(G) = E_1^0(G) \circ E_1^0(G)$.

Puede verse que $(E_h(G))_{i,j}$ es $(\emptyset; 0)$, o bien es de la forma $\cup (\alpha_{i_d}; z_{i,j})$ con $z_{i,j} \in \mathbb{Z}^+$.

De A), B) y las operaciones propuestas se infiere que la segunda componente de cada $(\alpha_{i_d}; z_{i,j})$ da el número de los caminos elementales $i \Rightarrow j$ de longitud h , con primer arco en α_{i_d} .

Así entonces, $(E_h(G))_{i,j}$ resume información respecto de todos los caminos elementales $i \Rightarrow j$ de longitud h , especificando sus respectivos arcos iniciales y su cantidad.

Cuando no haya lugar a confusión pondremos E_h en lugar de $E_h(G)$.

Habitualmente, por brevedad y para una más fácil lectura de las matrices pondremos . en lugar de $(\emptyset, 0)$.

Para determinar el número de caminos elementales de longitud h desde i hasta j , basta calcular $\sum z_{i,j}$ donde la suma se supone extendida a todos los elementos de $(E_h)_{i,j}$. En particular, si $i=j$ se obtiene el número de los que son cerrados en i .

Como todos los caminos obtenidos a partir de uno cerrado permutando circularmente sus arcos determinan el mismo circuito se tiene que la suma de las segundas componentes de los elementos diagonales de $(E_L(G))$ dividido por L , da el número de circuitos elementales de longitud L en G .

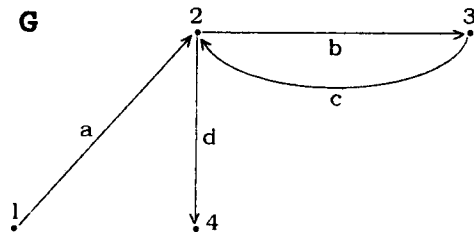
Por otra parte, si G es simétrico el número de los caminos elementales desde i hasta j , de longitud h , coincide con el de los elementales de igual longitud desde j hasta i .

Así entonces, si G es simétrico, la suma de las segundas componentes de $(E_h)_{i,j}$ coincide con la suma de las de $(E_h)_{j,i}$.

Lamentablemente, si $j \geq 2$ no puede afirmarse la validez de

$$E_h = (E_j^0 \circ E_{h-j}^0) \wedge (E_{h-j}^0 \circ E_j^0).$$

En efecto: dado G



tendremos

$$E_1 = E_1^0 = \begin{bmatrix} \cdot & (a,1) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & (b,1) & (d,1) \\ \cdot & (c,1) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & (a,1) & (a,1) \\ \cdot & (b,1) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & (c,1) & (c,1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

y aún cuando G carece de caminos elementales de longitud cuatro se tendrá que $(E_2^0 \circ E_2^0)_{1,4} = (a,1) \neq (\emptyset, 0)$.

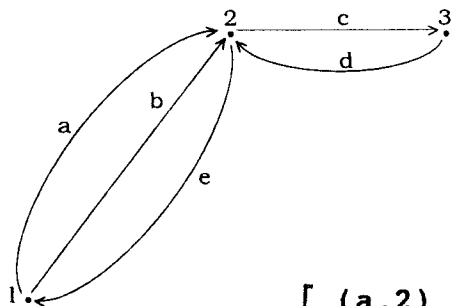
Por lo tanto, a diferencia de lo que ocurre con la potencia de matrices, que nos permite calcular M^L a partir de M^h y M^k siempre que $h+k=L$, para obtener E_L será necesario el cálculo

de todas las E_h con $1 \leq h < L$.

Seguidamente aplicaremos el método propuesto a un par de casos.

Ejemplo 2 :

Identificando el par de arcos a, b por \underline{a} y conservando las restantes notaciones tendremos



$$E_1 = E_1^O = \begin{bmatrix} . & (\underline{a}, 2) & . \\ (e, 1) & . & (c, 1) \\ . & (d, 1) & . \end{bmatrix}$$

$$E_2 = E_1^O \circ E_1^O = \begin{bmatrix} (\underline{a}, 2) & . & (\underline{a}, 2) \\ . & (e, 2) \cup (c, 1) & . \\ (d, 1) & . & (d, 1) \end{bmatrix}$$

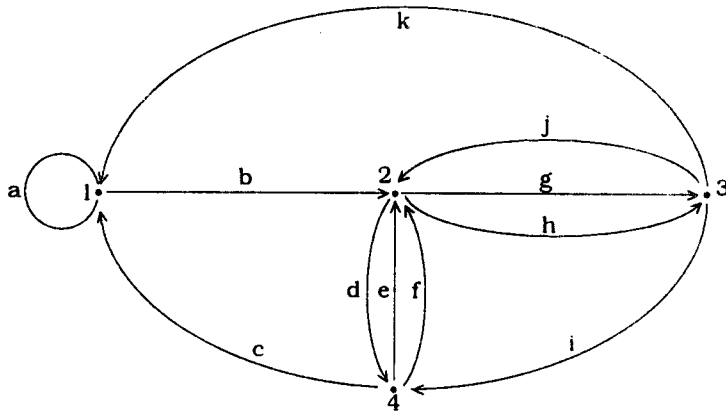
$$E_1^O \circ E_2^O = \begin{bmatrix} . & . & . \\ (c, 1) & . & (e, 2) \\ . & . & . \end{bmatrix} \quad E_2^O \circ E_1^O = \begin{bmatrix} . & (\underline{a}, 2) & . \\ . & . & . \\ . & (d, 2) & . \end{bmatrix}$$

Puede verse que las componentes no nulas de $E_1^O \circ E_2^O$ corresponden, respectivamente, al camino c, d, e y a los dos de longitud tres que llevan desde 2 hasta 3; a saber : e, a, c ; e, b, c .

Análogamente, en $E_2^O \circ E_1^O$ se representan los dos que llevan desde el 1 al 2; a saber : a, c, d ; b, c, d y los dos desde 3 hasta 2, es decir : d, e, a ; d, e, b .

Al calcular E_3 resulta que en G no hay camino elemental de longitud tres.

Ejemplo 3



Substituyendo los pares e,f ; g,h por \underline{f} ; \underline{h} , respectivamente, y conservando las otras notaciones resulta:

$$E_1 = \begin{bmatrix} (a,1) & (b,1) & . & . \\ . & . & (\underline{h},2) & (d,1) \\ (k,1) & (j,1) & . & (i,1) \\ (c,1) & (\underline{f},2) & . & . \end{bmatrix}$$

$$E_2 = E_1^O \circ E_1^O = \begin{bmatrix} . & . & (b,2) & (b,1) \\ (\underline{h},2) \cup (d,1) & (\underline{h},2) \cup (d,2) & . & (\underline{h},2) \\ (i,1) & (k,1) \cup (i,2) & (j,2) & (j,1) \\ . & (c,1) & (\underline{f},4) & (\underline{f},2) \end{bmatrix}$$

Explicitando la observación hecha en ocasión de dar la composición de matrices se tiene :

$$A = E_1^O \circ E_2^O = \begin{bmatrix} . & (b,1) & . & . \\ . & . & (\underline{h},2) & (d,1) \\ (k,1) & (j,1) & . & (i,1) \\ (c,1) & (\underline{f},2) & . & . \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} . & . & 2 & 1 \\ 3 & . & . & 2 \\ 1 & 3 & . & 1 \\ . & 1 & 4 & . \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (b,3) & . & . & (b,2) \\ (\underline{h},2) & (\underline{h},6) \cup (d,1) & (d,4) & (\underline{h},2) \\ (j,3) & (i,1) & (k,2) \cup (i,4) & (k,1) \cup (j,2) \\ (\underline{f},6) & . & (c,2) & (c,1) \cup (\underline{f},4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
B = E_2^O \circ E_1^O &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & (b,2) & (b,1) \\ (\underline{h},2) \cup (d,1) & \cdot & \cdot & (\underline{h},2) \\ (i,1) & (k,1) \cup (i,2) & \cdot & (j,1) \\ \cdot & (c,1) & (\underline{f},4) & \cdot \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} (b,3) & (b,4) & \cdot & (b,2) \\ (\underline{h},2) & (\underline{h},6) \cup (d,1) & \cdot & \cdot \\ (j,1) & (i,1) \cup (j,2) & (k,2) \cup (i,4) & (k,1) \cup (i,2) \\ (\underline{f},4) & (\underline{f},4) & (c,2) & (c,1) \cup (\underline{f},4) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De donde

$$E_3 = A \wedge B = \begin{bmatrix} (b,3) & \cdot & \cdot & (b,2) \\ (\underline{h},2) & (\underline{h},6) \cup (d,1) & \cdot & \cdot \\ (j,1) & (i,1) & (k,2) \cup (i,4) & (k,1) \\ (\underline{f},4) & \cdot & (c,2) & (c,1) \cup (\underline{f},4) \end{bmatrix}$$

Poniendo :

$$\begin{aligned}
C = E_1^O \circ E_3^O &= \begin{bmatrix} \cdot & (b,1) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & (\underline{h},2) & (d,1) \\ (k,1) & (j,1) & \cdot & (i,1) \\ (c,1) & (\underline{f},2) & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 4 & \cdot & 2 & \cdot \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} (b,2) & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\underline{h},2) \cup (d,4) & (\underline{h},2) & (d,2) & (\underline{h},2) \\ (j,2) \cup (i,4) & \cdot & (i,2) & (k,2) \\ (\underline{f},4) & \cdot & \cdot & (c,2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$D = E_3^O \circ E_1^O = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & (b,2) \\ (\underline{h},2) & \cdot & \cdot & \cdot \\ (j,1) & (i,1) & \cdot & (k,1) \\ (\underline{f},4) & \cdot & (c,2) & \cdot \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (b,2) & (b,4) & . & . \\ . & (\underline{h},2) & . & . \\ (k,1) & (j,1) \cup (k,2) & (i,2) & (i,1) \\ (c,2) & (\underline{f},4) \cup (c,2) & . & (c,2) \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$E_4 = C \wedge D = \begin{bmatrix} (b,2) & . & . & . \\ . & (\underline{h},2) & . & . \\ . & . & (i,2) & . \\ . & . & . & (c,2) \end{bmatrix}$$

Así, en E_4 quedan reflejados los dos circuitos elementales de longitud cuatro que admite el ejemplo dado, a saber $b,g,i,c,(b)$ y $b,h,i,c,(b)$. Es obvio que cada uno de ellos está asociado a cuatro caminos cerrados y que todo elemento de E_5 será $(\emptyset,0)$.

2) EXISTENCIA DE CAMINOS ELEMENTALES

Para cuando solamente interese decidir sobre la existencia de caminos elementales y no sobre su número, lo visto nos lleva a enunciar el siguiente método.

Las matrices M_L , $L \geq 1$, a construir, serán tales que cada componente no nula $(M_L)_{i,j} = a$ indicará la existencia de al menos un camino elemental $i \Rightarrow j$ de longitud L y primer arco a .

Algoritmo (para verificar la existencia de caminos elementales).

Dado un multidigrafo de orden n notaremos M_h (M_h^0); $1 \leq h \leq n$; a las matrices construidas por aplicación de las siguientes reglas que serán repetidas en tanto la matriz hallada no sea nula.

1) M_h^0 se obtiene sustituyendo por \emptyset los elementos de la diagonal principal de M_h , $h \geq 1$.

$$2) (M_1)_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si existe un arco } a = (i,j) \\ \emptyset & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$3) (M_{L+1})_{i,j} = \begin{cases} \cup a & \text{supuesto que existan } h, \text{ (no necesariamente distintos) tales que } (M_1^0)_{i,h} = a; \\ & (M_L^0)_{h,j} \neq \emptyset; (M_L^0)_{i,k} = a; (M_1^0)_{k,j} \neq \emptyset. \\ \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(en particular, para $L+1 = 2$ se tiene $h=k$)

Aplicándolo al multidigrafo del Ejemplo 3, poniendo \cdot en lugar de \emptyset e ignorando los arcos e y h tendremos:

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & g & d \\ k & j & \cdot & i \\ c & f & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & b & b \\ g \cup d & g \cup d & \cdot & g \\ i & k \cup i & j & j \\ \cdot & c & f & f \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} b & \cdot & \cdot & b \\ g & g \cup d & \cdot & \cdot \\ j & i & k \cup i & k \\ f & \cdot & c & c \cup f \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & g & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$$

Para evitar que en cada etapa sea necesario considerar simultáneamente dos matrices, a saber M_1^0 y M_L^0 , podríamos incorporar toda la información necesaria en una única matriz $M_{1,L}^0$ conviniendo en poner $(M_{1,L}^0)_{i,j} = (M_1^0)_{i,j} / (M_L^0)_{i,j}$ y $*$ cuando no existan caminos (de longitud 1 o L) que conecten los pares de vértices correspondientes.

Así, de las precedentes M_1^0 y M_2^0 deviene

$$M_{1,2}^0 = \begin{bmatrix} . & b/* & */b & */b \\ */gud & . & g/* & d/g \\ k/i & j/ki & . & i/j \\ c/* & f/c & */f & . \end{bmatrix}$$

En general, cada componente a de $(M_{L+1})_{i,j}$ queda asociada con esquemas del siguiente tipo, donde $\gamma \neq \emptyset$, $\delta \neq \emptyset$.

	h	j	k
h	*/ γ	
i	a/* . . .	a . . .	*/a
k		δ /*

Para $L+1 = 2$, el esquema anterior se reduce a un único par.

En nuestro caso, uno de los pares que lleva a $(M_3)_{1,1} = b$ es

$$\begin{array}{ccc} & b/* & */b \\ */gud & \dots\dots & \vdots \\ k/i & \dots\dots & \vdots \end{array}$$

A su vez, $(M_3)_{2,2} = d$ resulta de considerar los pares

$$\begin{array}{ccc} & b/* & \\ */gud & & d/g \\ & f/c \dots\dots & \vdots \end{array}$$

y $(M_3)_{2,2} = g$ de los pares

$$\begin{array}{ccc} & g/* & d/g \\ j/iuk & \dots\dots & \vdots \\ f/c & \dots\dots & \vdots \end{array}$$

Los esquemas precedentes permiten mecanizar la determinación de las componentes de M_{L+1} .

En particular:

- para las de M_2 bastará constatar, para cada h , $1 \leq h \leq n$, si existen pares i, j tales que $(M_1^0)_{i,h} = a$; $(M_1^0)_{h,j} \neq \emptyset$. En tal caso, y sólo entonces, $(M_2)_{i,j} = a$

- para las de M_{L+1} , $L \neq 1$, bastará verificar, para cada i , $1 \leq i \leq n$, si existen pares h, k tales que $(M_{1,L}^0)_{i,h} = a/*$; $(M_{1,L}^0)_{i,k} = */a$.

En tal caso, para todo j tal que $(M_{1,L}^0)_{h,j} = */\gamma$ y $(M_{1,L}^0)_{k,j} = \delta/*$ resulta $(M_{L+1})_{i,j} = a/*$.

3) DETERMINACION DE LOS CAMINOS ELEMENTALES

Veamos ahora que el método propuesto en 1) también permite determinar, regresivamente, los distintos caminos elementales $i \rightarrow j$ de longitud L . Los primeros arcos de dichos caminos están indicados en E_L , los que les siguen en E_{L-1} , los terceros en E_{L-2} , y así sucesivamente hasta llegar a E_1 .

En particular, del esquema del Ejemplo 3 es inmediato que hay dos caminos elementales de longitud tres que llevan desde el vértice 2 al vértice 1. Ellos son g, i, c y h, i, c . Al mismo resultado puede llegarse considerando, sucesivamente, las matrices E_3, E_2, E_1 .

Efectivamente :

De $(E_3)_{2,1}$ se tiene que desde 2 hasta 1 hay dos caminos de longitud tres y que sus respectivos primeros arcos pertenecen a h . Ellos son g ; h , ambos de la forma $(2,3)$. En cada uno de esos

caminos su segundo arco es primero del camino de longitud dos desde 3 hasta 1, que según se infiere de $(E_2)_{3,1}$ es el arco $i=(3,4)$. Finalmente, de $(E_1)_{4,1}$ se deduce que el tercer arco de los dos caminos buscados es c.

Análogamente, de $(E_3)_{2,2}$ resulta que hay siete caminos elementales de vértice inicial y final 2. El único que comienza con $d = (2,4)$ continúa con c y b, de acuerdo con $(E_2)_{4,2}$ y $(E_1)_{1,2}$ respectivamente. De los seis restantes una mitad tiene primer arco g, la restante comienza con h. De los tres caminos de longitud dos que llevan de 3 a 2 uno tiene primer arco k, y los dos restantes el $i=(3,4)$ (ver $(E_2)_{3,2}$). Finalmente, de E_1 se tiene que los terceros arcos son b, o alguno de los dos de la forma $(4,2)$.

De $(E_3)_{4,1} = (\underline{f},4)$ se deduce que los cuatro caminos elementales $4 \Rightarrow 1$ de longitud tres tienen primer arco e o bien f. Como éstos son de la forma $(4,2)$ los segundos arcos se indican en $(E_2)_{2,1} = (\underline{h},2) \cup (d,1)$.

El arco d no puede ser elegido pues su vértice final coincide con el inicial de los que componen \underline{f} y sería segundo arco de un camino de longitud tres. A su vez, los dos caminos representados en $(\underline{h},2)$ son : g,k ; h,k . Combinándolos con los arcos e,f se obtienen los cuatro caminos existentes, a saber : e,g,k ; e,h,k ; f,g,k ; f,h,k.

Para el caso general y procediendo en forma similar se tiene:

I) Si $(E_L)_{i,j} = \bigcup_d (\alpha_{i_d}, z_{i,j})$ hay $z_{i,j}$ caminos elementales de longitud L, desde i hasta j, con primer arco en α_{i_d}

II) Los segundos arcos de los caminos buscados están entre los que son primeros en los caminos de longitud $(L-1)$ y llevan hasta j , desde el extremo final de los arcos de cada α_i . Más precisamente, si los arcos del α_i en consideración son de la forma (i,h) , los primeros arcos de los caminos de $(E_{L-1})_{h,j}$ son segundos en los caminos a construir, siempre que no sean de la forma (h,i) , cuando $L > 2$. Para $L=2$ se aceptarán pues ahora $E_{L-1} = E_1$ y estos arcos determinarán caminos cerrados (en i).

III) En general y para las sucesivas extensiones de los caminos en construcción, reiterar la operatoria de II) para las distintas E_{L-k} , $2 \leq k \leq L-1$; cuidando de elegir en cada etapa arcos que no incidan en vértices que ya pertenecen al camino que estamos extendiendo, excepto si se está en E_1 y la repetición lleva a construir un camino cerrado.

4- CASO NO DIRIGIDO

Sustituyendo cada una de las aristas $u_i = [x,y]$ con $x \neq y$ de un multigrafo G por un par de arcos opuestos $u_i = (x,y)$; $\check{u}_i = (y,x)$ y conservando sus otros elementos, se obtiene un multidigrafo simétrico G^S que diremos simetrizado de G .

La notación asignada a los arcos del par que corresponde a cada arista no está unívocamente determinada, no obstante resulta que la relación precedente entre aristas de G y arcos de G^S permite fijar una correspondencia biyectiva, canónica, entre las cadenas elementales $p = x_1, u_1, x_2, \dots, x_L, u_L, x_{L+1} = q$ (eventualmente

$p = q$) de G y los caminos elementales $p \Rightarrow q$ de G^S , de igual longitud L .

De lo antedicho se deduce que considerando G^S en lugar de G , la metodología dada en 1) puede aplicarse también para evaluar el número de cadenas elementales y para hallarlas.

En cambio y de acuerdo con lo observado en (30), como el número de circuitos elementales de un multidigrafo puede ser notablemente inferior al de los ciclos elementales de su sostén se tiene que algoritmos aptos para determinar ciclos elementales pueden no ser útiles para abordar el caso dirigido mediante la consideración de su configuración sostén.

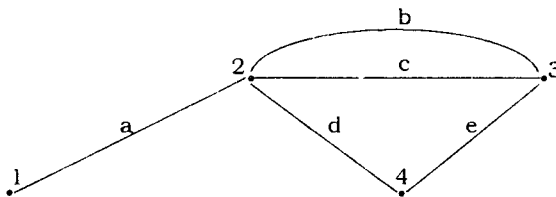
El número de caminos elementales cerrados de longitud dos en G^S coincide con la suma, del doble de aristas distintas de bucles en G más el de sus cadenas elementales cerradas generadas por pares de aristas paralelas. Así entonces, si notamos c_g este último conjunto y G contiene m aristas distintas de bucle, el número de los 2-caminos asociados en G^S es $|c_{gs}| = 2.m + |c_g|$.

Visto que cada elemento de c_{gs} (c_g) genera un circuito (ciclo) y que hay 2 (4) de ellos con un mismo conjunto de elementos resulta que si el número de s -circuitos (s -ciclos) es c_{gs}^* (c_g^*) se puede afirmar que $c_{gs}^* = 2 c_g^* + m$.

Seguidamente ejemplificaremos la aplicación del método dado en 1), al caso no dirigido.

Ejemplo 4

Sea el grafo G



Eligiendo en G^S : $a=(1,2)$; $b=(2,3)$; $c=(2,3)$; $d=(2,4)$; $e=(4,3)$ y reemplazando, respectivamente, los pares de arcos paralelos b,c (\check{b},\check{c}) por \underline{c} (\check{c}) tendremos :

$$E_1^O(G^S) = \begin{bmatrix} . & (a,1) & . & . \\ (\check{a},1) & . & (\underline{c},2) & (d,1) \\ . & (\check{c},2) & . & (\check{e},1) \\ . & (\check{d},1) & (e,1) & . \end{bmatrix}$$

$$E_2(G^S) = \begin{bmatrix} (a,1) & . & (a,2) & (a,1) \\ . & (\check{a},1) \cup (\underline{c},4) \cup (d,1) & (d,1) & (\underline{c},2) \\ (\check{c},2) & (\check{e},1) & (\check{c},4) \cup (\check{e},1) & (\check{c},2) \\ (\check{d},1) & (e,2) & (\check{d},2) & (\check{d},1) \cup (e,1) \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que en $(E_2)_{1,3}$ se cuentan los caminos a,b ; a,c y en $(E_2)_{3,1}$ sus opuestos, que corresponden, respectivamente, a las cadenas : $1,a,2,b,3$; $1,a,2,c,3$; $3,b,2,a,1$ y $3,c,2,a,1$. Por otra parte, de $(E_2)_{2,2}$ resulta que en G^S hay seis caminos elementales de longitud 2 con vértice inicial y final 2. Las cadenas elementales que ellos representan son : $2,a,1,a,2$; $2,b,3,b,2$; $2,b,3,c,2$; $2,c,3,b,2$; $2,c,3,c,2$ y $2,d,4,d,2$.

La suma de las segundas componentes de los elementos de $(E_2)_{i,j}$ con $i \neq j$ da 16, que es el número de cadenas elementales abiertas en G con $L = 2$; la de aquellos con $i = j$ da 14 que resulta

de sumar las cuatro cadenas 2,b,3,c,2 ; 2,c,3,b,2 ; 3,b,2,c,3 ; 3,c,2,b,3 con las diez de longitud dos asociadas a las cinco aristas de G.

En nuestro caso :

$$A = E_1^0 \circ E_2^0 = \begin{bmatrix} \cdot & (a,1) & \cdot & \cdot \\ (\check{a},1) & \cdot & (\underline{c},2) & (d,1) \\ \cdot & (\check{c},2) & \cdot & (\check{e},1) \\ \cdot & (\check{d},1) & (e,1) & \cdot \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \cdot & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \cdot \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & (a,1) & (a,2) \\ (\underline{c},4) \cup (d,1) & (\underline{c},2) \cup (d,2) & (\check{a},2) \cup (d,2) & (\check{a},1) \cup (\underline{c},4) \\ (\check{e},1) & (\check{e},2) & (\check{c},2) \cup (\check{e},2) & (\check{c},4) \\ (e,2) & (e,1) & (\check{d},1) & (\check{d},2) \cup (e,2) \end{bmatrix}$$

$$B = E_2^0 \circ E_1^0 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & (a,2) & (a,1) \\ \cdot & \cdot & (d,1) & (\underline{c},2) \\ (\check{c},2) & (\check{e},1) & \cdot & (\check{c},2) \\ (\check{d},1) & (e,2) & (\check{d},2) & \cdot \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & (a,5) & (a,1) & (a,2) \\ \cdot & (d,2) \cup (\underline{c},2) & (\underline{c},2) & (d,1) \\ (\check{e},1) & (\check{c},4) & (\check{c},2) \cup (\check{e},2) & (\check{e},1) \\ (e,2) & (\check{d},5) & (e,4) & (\check{d},2) \cup (e,2) \end{bmatrix}$$

luego

$$E_3 = A \wedge B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & (a,1) & (a,2) \\ \cdot & (\underline{c},2) \cup (d,2) & \cdot & \cdot \\ (\check{e},1) & \cdot & (\check{c},2) \cup (\check{e},2) & \cdot \\ (e,2) & \cdot & \cdot & (\check{d},2) \cup (e,2) \end{bmatrix}$$

En la matriz anterior se representan las seis cadenas elementales abiertas de longitud tres en G con un extremo en 1; o sea : a,d,e ; a,b,e ; a,c,e ; e,d,a ; e,b,a ; e,c,a y las doce cerradas de vértices $2,3,4$. De ellas se obtienen los ciclos $b,e,d,(b)$; $c,e,d,(c)$; $b,d,e,(b)$; $c,d,e,(c)$.

5) ENUMERACION DE LOS CAMINOS (LAS CADENAS) ELEMENTALES

En 3), aplicando lo dado en 1) hemos dado un método para hallar los caminos elementales y en 4) hemos visto como aplicarlo para el caso no dirigido.

Dicho procedimiento y otros a los cuales nos referiremos en el apéndice recurren al producto de matrices y permiten encontrar, simultáneamente, todos los caminos (cadenas) de igual longitud.

Otro método mas eficiente que los precedentes, pues no necesita del producto de matrices, pero que no lleva a una determinación directa de todos los caminos (cadenas) elementales de determinada longitud es el que proponemos seguidamente. Se basa en la misma idea que inspira el Algoritmo de Roy-Warshall (36),(37), (47) para calcular clausuras transitivas.

Los elementos de las matrices a considerar serán sucesiones de vértices y los eventuales caminos distintos que pudieran obtenerse intercambiando arcos paralelos no quedan reflejados, pero sabemos que la enumeración de todos ellos es inmediata a partir del conocimiento de uno. Por ello nos limitaremos a considerar digrafos.

Los caminos del digrafo G se irán determinando en un orden que es independiente de sus respectivas longitudes. Dependerá del que induce la designación de sus vértices.

Convengamos que los elementos de la matriz $P(G)$ de orden n , son

$$p_{i,j} = \begin{cases} i,j & \text{si existe arco } (i,j) \\ \emptyset & \text{caso contrario} \end{cases}$$

A partir de P se construye la matriz $Q^1 = (q_{i,j}^1)$ donde

$$q_{i,j}^1 = \begin{cases} p_{i,j} & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ \text{o bien} \\ p_{i,j} & / \text{ el conjunto de sucesiones de la forma } i,1,j \\ & \text{con } i \neq 1 \neq j, \text{ eventualmente } i = j, \text{ siempre} \\ & \text{que } p_{i,1} \neq \emptyset \text{ y } p_{1,j} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Nótese que en Q^1 quedan representados todos los caminos elementales de longitud uno y aquellos de longitud dos cuyo vértice interior es el 1.

En general, a partir de Q^{h-1} , $1 \leq h-1 < n$, se construye Q^h cuyo elemento $q_{i,j}^h$ es $q_{i,j}^{h-1}$ agregado al conjunto de sucesiones que resultan de concatenar las sucesiones $i, \dots, h \in q_{i,h}^{h-1}$ con las sucesiones $h, \dots, j \in q_{h,j}^{h-1}$ siempre que la sucesión resultante i, \dots, h, \dots, j carezca de elementos repetidos, excepto posiblemente $i = j$.

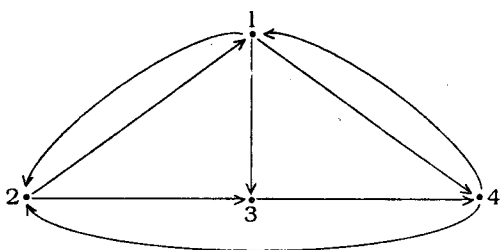
La recurrencia que lleva a la construcción de Q^h permite afirmar que en ella quedan indicados todos los caminos elementales de longitud uno y aquellos (abiertos o cerrados) con todos sus vértices interiores, numerados menor o igual que h .

Como todo camino elemental es arco o bien tiene al menos un vértice interior $1 \leq i \leq n$, al calcularse Q^n quedan determinados todos los caminos buscados.

Por otra parte, es claro que si P es la matriz correspondiente a un digrafo simétrico $p_{i,j} = i,j$ si y sólo si $p_{j,i} = j,i$. En tal caso, las sucesivas matrices a obtener serán tales que las componentes $q_{i,j}^r$; $q_{j,i}^r$ estarán integradas por sucesiones opuestas.

Ejemplo 5

Dado el digrafo G y poniendo . en lugar de \emptyset tendremos



$$P(G) = \begin{bmatrix} . & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 2,1 & . & 2,3 & . \\ . & . & . & 3,4 \\ 4,1 & 4,2 & . & . \end{bmatrix}$$

$$Q^1 = \begin{bmatrix} . & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 2,1 & 2,1,2 & 2,3/2,1,3 & 2,1,4 \\ . & . & . & 3,4 \\ 4,1 & 4,2/4,1,2 & 4,1,3 & 4,1,4 \end{bmatrix}$$

omitiendo, por razones de espacio, las comas entre los dígitos se tendrán :

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 121 & 12 & 13/123 & 14 \\ 21 & 212 & 23/213 & 214 \\ . & . & . & 34 \\ 41/421 & 42/412 & 413/423/4213/4123 & 414/4214 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 121 & 12 & 13/123 & 14/134/1234 \\ 21 & 212 & 23/213 & 214/234/2134 \\ . & . & . & 3,4 \\ 41/421 & 42/412 & 413/423/4213/4123 & 414/4214/4134/4234/42134/41234 \end{bmatrix}$$

Al calcular Q^4 las cuartas filas y columnas de Q^3 se conservan,

los restantes elementos, ordenados por columnas son :

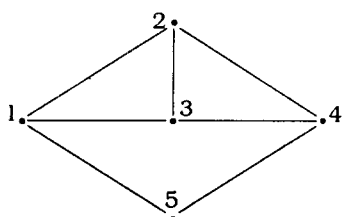
- 1ra.) 121/141/1421/1341/13421/12341 -- 21/2341 -- 341/3421
 2da.) 12/142/1342 -- 212/2142/2342/23412/21342 -- 342/3412
 3ra.) 13/123/1423 -- 23/213 -- 3413/3423/34213/34123

Véase, que si en lugar de los vértices extremos de los arcos se consideran sus respectivas designaciones, el método precedente permite, previo modificaciones simples y evidentes, determinar los caminos simples (es decir, sin arcos repetidos) de multidi-grafos arbitrarios.

Por otra parte, de la correspondencia biyectiva entre cadenas elementales de G y caminos elementales de G^S resulta que es posible aplicar el método anterior también para hallar cadenas.

Ejemplo 6

Dado el grafo G



$$P(G^S) = \begin{bmatrix} \cdot & 1,2 & 1,3 & \cdot & 1,5 \\ 2,1 & \cdot & 2,3 & 2,4 & \cdot \\ 3,1 & 3,2 & \cdot & 3,4 & \cdot \\ \cdot & 4,2 & 4,3 & \cdot & 4,5 \\ 5,1 & \cdot & \cdot & 5,4 & \cdot \end{bmatrix}$$

Q^1 se obtiene "agregando" a la precedente, la matriz

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2,1,2 & 2,1,3 & \cdot & 2,1,5 \\ \cdot & 3,1,2 & 3,1,3 & \cdot & 3,1,5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 5,1,2 & 5,1,3 & \cdot & 5,1,5 \end{bmatrix} \quad \text{de donde}$$

$$Q^1 = \begin{bmatrix} \cdot & 1,2 & 1,3 & \cdot & 1,5 \\ 2,1 & 2,1,2 & 2,3/2,1,3 & 2,4 & 2,1,5 \\ 3,1 & 3,2/3,1,2 & 3,1,3 & 3,4 & 3,1,5 \\ \cdot & 4,2 & 4,3 & \cdot & 4,5 \\ 5,1 & 5,1,2 & 5,1,3 & 5,4 & 5,1,5 \end{bmatrix}$$

En forma similar se construirían las restantes Q^i , $2 \leq i \leq 5$.

APENDICE

La mayor parte de la información que sigue resulta de los respectivos comentarios en *Mathematical Reviews* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Según parece, la primera evaluación del número de caminos elementales - pero restringida al caso de los de longitud $L \leq 3$ - fue dada en 1949 por Luce y Perry (23).

En 1952, Ross y Harary (35) extendieron dicho resultado a los de longitud $L \leq 6$ y propusieron un método que permitiría resolver el problema en el caso general. La idea directriz del mismo (ver(9) 4.3) es simple y evidente pero útil sólo muy ocasionalmente, pues es de implementación larga y engorrosa.

Consiste en restar al total de caminos los que no son elementales. Para evaluar este número puede recordarse que un L -camino es no elemental si y sólo si contiene un subcamino inicial de longitud $a \geq 0$, otro central, cerrado, de longitud $b \geq 1$ y un subcamino final de longitud $c \geq 0$, con $a+b+c = L$; no simultáneamente nulos a y c .

Pero, visto que un mismo camino puede admitir distintas particiones del tipo indicado, para hallar el número buscado sería necesario recurrir al Principio de Inclusión-Exclusión.

Mas precisamente, si un camino $a \rightarrow b$ admite $k \geq 1$ particiones del tipo indicado, admite tantas particiones que toman en cuenta sólo i de las k ocurrencias repetidas de sus vértices como combinaciones de k tomadas de a i.

Asi entonces, recordando que $1 = \sum (-1)^{i+1} \binom{k}{i}$; $1 \leq i \leq k$; si cada elemento en (a,b) de la matriz R_i es la suma del número de particiones de los distintos caminos $a \rightarrow b$ obtenidas considerando i de las ocurrencias reiteradas, el número total de caminos elementales esta representado en $\sum (-1)^{i+1} R_i$.

Por otra parte, en 1964, Parthasarathy (32) propuso un método

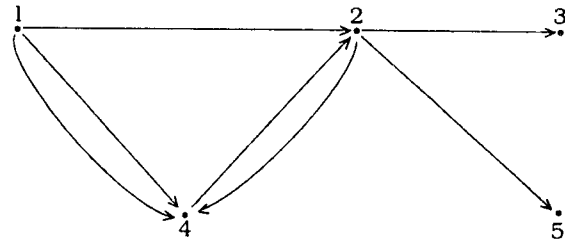
que permite contar, todos los caminos elementales, abiertos, de longitud $h \geq 2$, en una matriz $P_h(G)$.

En (13), donde puede verse una justificación del método, se indica que si bien este procedimiento exige numerosas operaciones puede ser realizado utilizando computadoras.

Para construir $P_h(G)$ es necesario conocer las distintas $P_{h-1}(G_j)$ donde G_j es el subdigrafo cubriente que se obtiene eliminando todos los arcos de G incidentes en x_j , cualquiera sea x_j .

La j -ésima columna de $P_h(G)$ coincide con la j -ésima del producto $P_{h-1}(G_j) \circ P_1(G)$; donde $P_1(G)$ es la matriz precedencia de G .

Aplicándolo al multidigrafo G



tendríamos

$$P_1(G) = \begin{bmatrix} . & 1 & . & 2 & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$P_1(G_1) = \begin{bmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$P_1(G_2) = \begin{bmatrix} . & . & . & 2 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$P_1(G_3) = \begin{bmatrix} . & 1 & . & 2 & . \\ . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$P_1(G_4) = \begin{bmatrix} . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$P_1(G_5) = \begin{bmatrix} . & 1 & . & 2 & . \\ . & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Seleccionando de cada producto $P_1(G_i) \circ P_1(G)$ la i -ésima columna tendremos

$$P_2(G) = \begin{bmatrix} . & 2 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que los valores de $(P_2(G))_{i,j}$ dan el número de sus 2-caminos elementales abiertos.

Reiterando la misma operatoria con las distintas $P_2(G_i)$, $1 \leq i \leq 5$ se obtendrá

$$P_3(G) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

También Marcu (24) cuenta los caminos elementales $i \Rightarrow j$, con longitud L mediante el producto de una matriz que considera los caminos de longitud $L-1$ que no inciden en j , con la matriz de precedencia. En (27) da un algoritmo para determinar los circuitos elementales de un digrafo y en (25), (26) estudia los que tienen un número par de arcos.

El caso particular de la determinación de circuitos o de ciclos elementales, fue considerado por numerosos autores.

Al respecto, Mateti y Deo publicaron en 1976 (30) una versión resumida de un trabajo de 1973 (29) en donde hacen un estudio comparativo de las eficiencias de 21 métodos conocidos a esa época y los clasifican de acuerdo con sus respectivas ideas generadoras, a saber : considerar el espacio vectorial de ciclos, dar algoritmos de búsqueda, pasar a sucesivos digrafos adjuntos o utilizar propiedades del álgebra matricial. Concluyen que de los algoritmos analizados, el dado por Johnson (18) para determinar todos los circuitos elementales de un digrafo sin bucles, es asintóticamente el más veloz.

En (18) Johnson compara su algoritmo con otros y en especial con el de Tarjan (40) que le sirvió de base. A su vez, Tarjan da dos ejemplos en los cuales su método mejora la performance del de Weinblatt (48) y también la del de Tiernan (42) en el cual se inspira.

Al respecto notemos que el algoritmo dado en (4) para hallar todos los circuitos elementales presenta ventajas computacionales respecto del dado por Tiernan.

Otro algoritmo para determinar los circuitos que nos ocupan fue dado por Syslo (38).

En (45) se hace una revisión de varios algoritmos para generar los circuitos de un digrafo, se estudian y comparan los de Tarjan, Tiernan, Johnson y se propone otro basado en este último. Al respecto ver también (44).

Szwarcfiter y Lauer (39) estudian la determinación de circuitos elementales y dan un algoritmo, que sigue la línea de los trabajos de Tiernan-Tarjan-Johnson. Incluyen información referente a otros y datos comparativos del que proponen con algunos de los indicados. El algoritmo allí propuesto fue mejorado por Loizou y Thanisch (22).

Itai y Rodeh (16) dan, entre otros resultados, tres algoritmos fundados en principios diferentes y con distintos niveles de complejidad, para hallar 3-ciclos. Estudian también el caso dirigido. Posteriormente, Richard y Liestman (34) propusieron otros, para determinar ciclos de mayor longitud.

Bermond y Thomassen (3) dan una extensa e interesante recopilación de resultados y conjeturas ligadas a circuitos y ciclos elementales. La conjetura por la cual cualquiera sea el natural k , existe un valor mínimo $f(k)$, tal que todo digrafo con semigrados positivos mayores o iguales que $f(k)$ tiene al menos k circuitos elementales, disjuntos, fue verificada parcialmente por Thomassen (41).

En (8) se considera la existencia de circuitos elementales de mínima longitud prefijada.

Extendiendo el hecho de que todo bucle de G identifica a uno de sus circuitos elementales de longitud $L = 1$, otro método para determinar circuitos elementales es el propuesto por Chen (7) basándose en la aplicación reiterada del siguiente proceso.

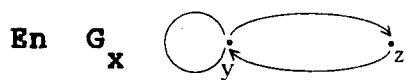
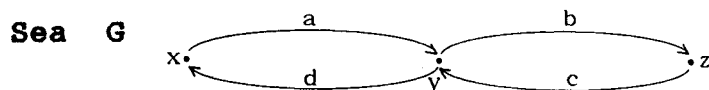
Mediante la eliminación de cierto " vértice de reducción x " y la substitución de cada par de arcos (r,x) , (x,s) por el (r,s) se construye, a partir de un multidigrafo G el G_x ; de orden menor en una unidad.

Excepción hecha de los bucles de G con soporte en x , a todo camino cerrado de G con longitud L corresponde en G_x otro de longitud $L' \leq L$.

En particular, a cada camino cerrado elemental de longitud $L > 1$ que contiene x corresponde otro de longitud $L-1$, en G_x .

Así entonces, en líneas generales, luego de sucesivas reducciones a cada camino cerrado de G corresponderá un bucle. La verificación de si éste proviene o no de un circuito elemental de G puede ser larga y dificultosa. Obviamente, esto reduce notablemente la aplicabilidad del método.

A continuación esquematizamos distintas situaciones que pueden presentarse según sea el orden en que se eligen los sucesivos vértices de reducción.



el bucle representa al camino cerrado elemental y, d, x, a, y



los bucles se corresponden, respectivamente, con : y, d, x, a, y ; y, b, z, c, y .



el bucle representa al camino cerrado no elemental $z, c, y, d, x, a, y, b, z$.



Los bucles corresponden a los circuitos elementales $d, a, (d)$; $b, c (b)$ y el camino cerrado restante al no elemental $x, a, y, b, z, c, y, d, x$.



sólo uno de los bucles corresponde a un circuito elemental de G .

En cuanto a procedimientos para determinar no solamente circuitos (ciclos) sino también caminos (cadenas) diremos, de acuerdo con las referencias leídas, que :

- en 1966 Cartwright y Gleason (5) propusieron, para hallar caminos elementales, un método que usa la noción de digrafo adjunto y que puede adaptarse al caso de digrafos valuados. (ver (30)).
- Gorškov y Kirpičnikov (12) propusieron, para determinar todos los "paths" de un digrafo, un algoritmo que se apoya en una condición necesaria y suficiente para que cierto elemento de una matriz potencia, sea no nulo.
- en (6) se consideran digrafos sin circuitos y se estudia la generación de caminos elementales que no son subcaminos propios de otro elemental y la de los elementales cuya sucesión definidora no es subsucesión propia de otra que también define un camino elemental.
- en (48) se determinan los "simple paths" entre dos vértices en el caso dirigido y en el no dirigido.
- en (43) se propone un algoritmo para hallar todos los caminos elementales entre dos vértices prefijados. El método en cuestión está basado en otro de Read y Tarjan (33) que es a su vez adaptable para determinar algunas otras clases de subgrafos.
- Fratta y Montanari (10) caracterizaron y determinaron, tanto para el caso dirigido como para el no dirigido los "simple paths" considerando, en un álgebra particular, sistemas de ecuaciones lineales y recurriendo a técnicas de eliminación análogas a las del método de Gauss.
- la estructura algebraica introducida por Hulme (15) permite estudiar además del ya citado algoritmo de Fratta y Montanari el de Martelli (28) para hallar conjuntos minimales de aristas que intersectan todas las cadenas de extremos prefijados. Se muestra que ambas cuestiones están ligadas por dualidad.
- en (2) se estudia la determinación de cadenas elementales maximales, desde cierto vértice inicial prefijado y se da un algoritmo para el caso de configuraciones planares.
- Ordin (31) da un método para identificar todos los "paths" de redes arbitrarias.

- en (46) se dan dos algoritmos para determinar un "elementary path" entre pares de vértices prefijados y se muestra que la dificultad del problema está relacionada con la de determinar caminos elementales minimales, en redes que admiten ciclos negativos.
- Iwano (17) mejora las cotas del tiempo de procesamiento de un método de Goldberg, Plotkin y Vaidya para determinar cadenas y caminos, vértices disjuntos, maximales

Otros procedimientos constructivos para hallar los caminos que nos ocupan son los propuestos, respectivamente, por Gill, por Kaufmann-Malgrange y por Roy.

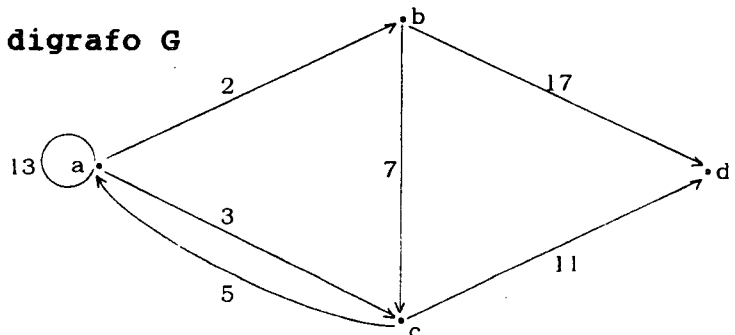
Gill (11) propuso asignar a los arcos de un multidigrafo valores primos distintos dos a dos, representar dicha configuración valuada por una matriz T y calcular sus potencias en forma similar a la que es habitual pero "sin efectuar las sumas".

De tal forma, los elementos no nulos de T^r , $r \geq 1$, son los valores que se obtienen multiplicando los que tienen los arcos que componen los distintos caminos de longitud r . En particular los de su diagonal principal corresponden a caminos cerrados de longitud r .

Por lo tanto y puesto que todo r -camino no elemental contiene un h -camino cerrado, $1 \leq h < r$, para determinar sólo caminos elementales de longitud r bastará anular en T^r todos aquellos valores que son divisibles por números que aparecen en la diagonal principal de alguna T^h , con $1 \leq h < r$.

Con los valores no nulos restantes y por la unicidad de la descomposición de un número en sus factores primos será factible determinar los caminos en cuestión.

Aplicándolo al siguiente digrafo G



tendremos

$$T = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 3 & . \\ . & . & 7 & 17 \\ 5 & . & . & 11 \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \quad T^2 = \begin{bmatrix} 169+15 & 26 & 39+14 & 34+33 \\ 35 & . & . & 77 \\ 65 & 10 & 15 & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Todos los valores no nulos de T^2 representan caminos de longitud dos. En particular, 169 corresponde al bucle recorrido dos veces, 15 a los caminos cerrados $a,3,c,5,a$; $c,5,a,3,c$ y 10 a la sucesión $c,5,a,2,b$.

Anulando las componentes de T^2 divisibles por 13 se tiene :

$$T \cdot T^{[2]} = \begin{bmatrix} 195+70 & 30 & 182+45 & 442+429+154 \\ . & 70 & 105 & . \\ 75 & . & 70 & 170+165 \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Eliminando de la matriz anterior los valores divisibles por 13 o por 15 se obtiene

$$T^{[3]} = \begin{bmatrix} 70 & . & . & 154 \\ . & 70 & . & . \\ . & . & 70 & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Los elementos no nulos corresponden a los caminos elementales de longitud tres. En nuestro caso no los hay de longitud cuatro.

El método que Kaufmann y Malgrange (19) (ver también (20), (21)) denominan "multiplicación latina" refleja en términos matriciales la operación "concatenación de caminos" y permite enumerar aquellos de determinada longitud que satisfacen restricciones prefijadas : ser elementales, ser simples, etc.

El procedimiento está fundado en el habitual producto de matrices y lleva a determinar matrices que contienen las sucesiones de vértices que determinan los caminos buscados.

En particular, para hallar los elementales se prohíbe la repetición de vértices, en las sucesiones respectivas, excepto que sean el primero y el último de la sucesión considerada.

Más precisamente, se construye la matriz $M = (m_{i,j})$ poniendo $m_{i,j} = 1$ si hay arco (i,j) y $m_{i,j} = 0$ en caso contrario.

En $M^{[2]}$ cada componente $m_{i,j}^{[2]}$ contiene todas las ternas i,k,j de elementos $i \neq k \neq j$ tales que $m_{i,k} \neq 0$ y $m_{k,j} \neq 0$ o bien es cero, si tales ternas no existen.

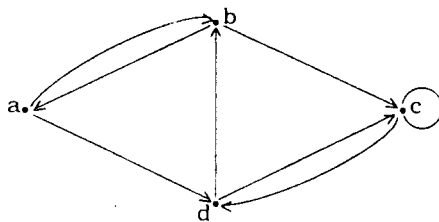
En forma similar se definen las potencias sucesivas.

Nótese que ahora, a diferencia de lo indicado en pág. 11, la asociatividad de la operación que estamos considerando permite poner $M^{[k]} = M^{[j]} \cdot M^{[k-j]}$, cualquiera sea $1 \leq j < k$.

En (19) (20) (21) se da una formulación levemente diferente del procedimiento indicado, considerando una matriz M' cuyos elementos responden a la siguiente definición :

$$m'_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } m_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Ilustraremos este método aplicándolo al siguiente ejemplo.



$$M = \begin{bmatrix} . & ab & . & ad \\ ba & . & bc & . \\ . & . & cc & cd \\ . & db & dc & . \end{bmatrix} \quad M' = \begin{bmatrix} . & b & . & d \\ a & . & c & . \\ . & . & c & d \\ . & b & c & . \end{bmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{bmatrix} aba & adb & abc+adc & . \\ . & bab & . & bad+bcd \\ . & cdb & cdc & . \\ dba & . & dbc & dcd \end{bmatrix}$$

$$M^{[3]} = \begin{bmatrix} adba & . & adbc & abcd \\ . & badb+bcdb & badc & . \\ cdba & . & cdbc & . \\ . & . & . & dbad+dbcd \end{bmatrix}$$

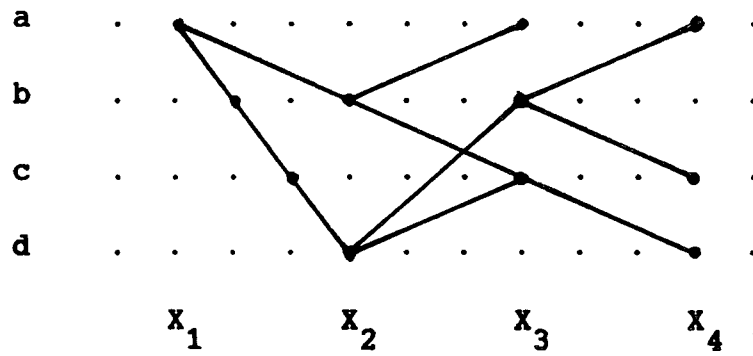
La validez de los resultados obtenidos es fácilmente verificada en el esquema dado.

Por otra parte, para determinar en un digrafo G de orden n sus caminos elementales de vértice inicial x_i , Roy propone ((37) Ch. III) la construcción de un digrafo asociado que denomina "desarrollo elemental de G a partir de x_i " y que es, en esencia un n -partido de vértices x_{hj} , $1 \leq h \leq n$; $1 \leq j \leq n$ y de arcos $(x_{hj}, x_{(h+1)k})$ si y solamente si (x_j, x_k) es el h -ésimo arco de algún camino elemental en G , con vértice inicial x_i .

El digrafo así construido se puede representar en una tabla tal que en su casilla de fila p y columna q se indican los vértices que son, en el n -partido, precedentes inmediatos del vértice x_p . Dicha tabla facilita el manejo de la información y permite analizar algunos otros problemas de transitabilidad.

En (34) se da además, un algoritmo para la construcción de la tabla y otro, para la determinación de los caminos elementales de vértice inicial prefijado. Este último contempla la necesidad de rechazar, quizás, elecciones aceptadas previamente.

En particular, este método aplicado al digrafo anterior nos llevaría al siguiente "desarrollo elemental a partir de a ".



Las "poligonales" indicadas en él, corresponden respectivamente a los caminos elementales a,b,a ; a,b,c,d ; a,d,b,a ; a,d,b,c ; a,d,c.

Bibliografia :

- 1 Ali, A.A.: *The number of paths on a graph.*
Rev. Fac. Cienc. Univ. Lisboa. XIV (1971-72), 21/38.
M.R. 51 # 5388 ; Zb. 248 # 05125.
- 2 Anderson, R. and Mayr, E.W.: *Parallelism and the maximal path problem.* Inf. Process. Lett. 24 (1987), 121/126.
M.R. 88d # 68031 ; Zb. 637 # 68079.
- 3 Bermond, J.C. and Thomassen, C.: *Cycles in digraphs, a survey.* J. Graph Theory 5 (1981), 1/43.
M.R. 82k # 05053 ; Zb. 458 # 05035.
- 4 Biess, G., Janicke, W. und Meissler, E.G.: *Ein Algorithmus zur Bestimmung aller Elementarkreise eines gerichteten Graphen.* Wiss. Z. Techn. Hochsch. Leuna-Merschung 19 (1977), 103/111.
M.R. 56 # 8413 ; Zb. 346 # 68022.
- 5 Cartwright, D. and Gleason, T. : *The numbers of paths and cycles in a digraph.* Psychometrika 31 (1966), 179/199.
M.R. 33 # 5377 ; Zb. 143 pg. 437.
- 6 Chaty, G. et Chein, M.: *Bases de chemins et indices de recouvrement dans les graphes sans circuits.*
Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle (C.E.R.O.) 15 Nro.3 (1973), 287/307.
- 7 Chen, I-Ngo.: *A node elimination method for finding all simple cycles in a directed graph.* Proc. Sixth South. Conf. on Combinat, Graph Theory and Computing. (Florida, Boca Raton 1975). Congressus Numerantium XIV (1975), 147/160.
M.R. 53 # 2732 ; Zb. 319 # 05113.
- 8 Dong, W.Q., Shao, J.Y. and Dong, Ch.F.: *On the exponents of primitive digraphs with the shortest elementary circuit length.* Linear Algebra Appl. 104 (1988), 1/27.
M.R. 89i # 05127 ; Zb. 649 # 05031.

- 9 Doreian, P.: *Mathematics and the study of social relations*
Weidenfeld - Nicolson. (1970).
*Las matemáticas y el estudio de las relaciones
sociales.* Edit. Vicens-Vives 1973.
- 10 Fratta, L. and Montanari, U.: *A vertex elimination algorithm
for enumerating all simple paths in a graph.*
Networks 5 (1975), 151/177. M.R. 51 # 7936; Zb. 336 # 05115
- 11 Gill, A.: *Analysis of nets by numerical methods.*
J. Assoc. Comp. Mach. 7 (1960), 251/254.
- 12 Gorškov, A.F. and Kirpičnikov, V.M.: *An efficient algorithm
for selecting paths of a graph. (en ruso).*
Izv. Vyss. Ucehn. Zaved Elektromehanika 8 (1970), 857/860.
M.R. 44 # 116.
- 13 Harary, F., Norman, R.Z. and Cartwright, D.: *Structural
models..* J. Wiley & Sons Inc.(1965).
- 14 Harary, F. and Manvel, B. : *On the number of cycles in a
graph.* Mat.Casopis.Slovensk. Akad. Vied. 21 (1971), 55/63.
M.R. 46 # 8905 ; Zb. 209 pg. 554.
- 15 Hulme, B.L.: *A lattice algebra for finding simple paths and
cuts in a graph.* Proc. Sixth South. Conf. on Combinat, Graph
Theory and Computing. (Florida, Boca Raton 1975).
Congressus Numerantium XIV (1975), 419/428.
M.R. 53 # 5368 ; Zb. 323 # 05123.
- 16 Itai, A. and Rodeh, M.: *Finding a minimum circuit in a graph*
SIAM J. Comput. 7 (1978), 413/423. M.R. 80g # 68088 ;
Zb. 386 # 68064.
- 17 Iwano, K.: *An improvement of Goldberg, Plotkin and Vaidya's
maximal node-disjoint paths algorithm.*
Inform. Process. Lett. 32 (1989), 25/27. M.R. 91a # 68130 ;
Zb. 678 # 68039.
- 18 Johnson, D.B.: *Finding all the elementary circuits of a di-
rected graph.* SIAM J. Comput. 4 (1975), 77/84.
M.R. 53 # 2010 ; Zb. 275 # 05112.

- 19 Kaufmann, A. et Malgrange Y.: *Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe.*
R.F.R.O. 7, Nro.26 (1963), 61/73.
- 20 Kaufmann, A.: *Introduction à la combinatoire en vue des applications.* Dunod (1968).
Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones. C.E.C.S.A. 1971.
- 21 Kaufmann, A.: *Méthodes et modèles de la recherche operationnelle. (Tome 2.).* Dunod (1972- 2da. edit.).
Métodos y modelos de la programacion dinámica C.E.C.S.A. (1966).
- 22 Loizou, G. and Thanisch, P.: *Enumerating the cycles of a digraph, a new preprocessing strategy.*
Inform. Sci. 27 (1982), 163/182. M.R. 84c # 68058.
- 23 Luce, R.D. and Perry, A.D.: *A method of matrix analysis of group structure.* Psychometrika 14 (1949), 95/116.
- 24 Marcu, D.: *Note on the elementary paths of a digraph.*
Bul. Univ. Brasov Ser. C 23 (1981), 5/6. M.R. 85d # 05126.
- 25 Marcu, D.: *Some results concerning the even cycles of a connected digraph.* Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 26 (1981) 24/28. Zb.479 # 05032.
- 26 Marcu, D.: *On the even elementary circuits and cycles of a graph.* Bul. Inst. Politeh. Bucur. 44 (1988), 21/26.
M.R. 83m # 05069. Zb. 509 # 05049.
- 27 Marcu, D.: *Finding the circuits of a digraph.*
Bul. Inst. Politeh. Bucuresti Ser. Construc. Mas. 51 (1989) 21/25. M.R. 91c # 05173.
- 28 Martelli, A.: *An application of regular algebra to the enumeration of cut sets in a graph.* (Proc. IFIP, Stockholm, 1974) Inform. Proces. (1974), 511/515. Zb. 297 # 05118.
- 29 Mateti, P. and Deo, N.: *On algorithms for finding all circuits of a graph.* UIUCDCS-R-73-585, Urbana, Univ. Illinois Dept. of Computer Science (1973), 36 pág. Zb. 297 # 05136.

- 30 Mateti, P. and Deo, N.: *On algorithms for enumerating all circuits of a graph.* SIAM J. Comput. 5 (1976), 90/99. M.R. 52 # 16106 ; Zb. 331 # 05115.
- 31 Ordin, V.V.: *The method of Markov iterations for finding paths in a network of general formm (en ruso).* Avtomat. i Telemekh. (1987), 183/185. M.R. 88c # 90056 ; Zb.. 632 # 90085.
- 32 Parthasarathy, K.R.: *Enumeration of paths in digraphs.* Psychometrika 29 (1964),153/165. M.R. 29 # 6488 ; Zb.142 pg.416.
- 33 Read, R.C. and Tarjan, R.E.: *Bounds on backtrack algorithms for listing cycles, paths and spanning trees.* Networks 5 (1975), 237/252. M.R. 53 # 5313; Zb. 316 # 05125
- 34 Richards, D. and Liestman, A.L.: *Finding cycles of a given length. Cycles in graphs* (Burnaby B.C. 1982) Ann. Discrete Math. 27 (1985), 249/255. M.R. 87e # 05097; Zb. 585 # 05014
- 35 Ross, I.C. and Harary, F.: *On the determination of redundancies in sociometrics chains.* Psychometrika 17 (1952) 195/208
- 36 Roy, B.: *Transitivité et connexité.* C.R.Ac.Sc.Paris 249 (1959), 216/218.
- 37 Roy, B.: *Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnement.* Metra Nro. 1 - Serie Speciale - (1962).
- 38 Syslo, M.: *The elementary circuits of a graph.* Commun. ACM 16 (1973), 632/633.
- 39 Szwarcfiter, J.L. and Lauer, P.E.: *A search strategy for the elementary cycles of a directed graph.* Nordisk. Tidskr. Infor. (BIT) 16 (1976), 192/204. M.R. 55 # 12566 ; Zb. 331 # 68025.
- 40 Tarjan, R.: *Enumeration of the elementary circuits of a directed graph.* SIAM J. Comput. 2 (1973), 211/216. M.R. 48 # 3795 ; Zb. 274 # 05106.

- 41 Thomassen, C.: *Disjoints cycles in digraphs.*
Combinatorica 3 (1983), 393/396 . M.R. 85e # 05087 ;
Zb. 527 # 05036.
- 42 Tiernan, J.C.: *An efficient search algorithm to find the elementary circuits of a graph.* Comm. ACM 13 (1970) 722/726
M.R.42 # 7427 ; Zb. 225 # 94027.
- 43 Tran, D.A., Tsukiyama, S., Shirakawa, I. and Ozaki, H.:
An algorithm for generating all the directed paths and its application. Inf. Proc. Japan 16 (1976), 31/35.
M.R. 57 # 1964 ; Zb. 354 # 05034.
- 44 Tsukiyama, S., Shirakawa, I. and Ozaki, H.: *An algorithm for generating the cycles of a digraph.*
Electron Commun. Japan 58 (1975), 8/15. M.R. 58 # 25102.
- 45 Tsukiyama, S., Shirakawa, I. and Ozaki, H.: *A survey : generating all the cycles of a digraph.*
2nd. USA-Japan Comput. Conf. Proc. Tokyo 1975. AFIPS Press (1975), 92/96. M.R. 58 # 25103.
- 46 Tung, Ch.T., Chan, G.H. and Chew, K.L.: *Finding a minimal ratio elementary paths in a network.* Asia-Pacific J. Oper. Res. 4 (1987), 151/157. M.R. 88k # 90070
- 47 Warshall, S.: *A theorem on boolean matrices.*
J.Assoc.Comp.Mach. 9 (1962), 11/13. M.R. 26 # 7173.
- 48 Weinblatt, H.: *A new search algorithm for finding the simple cycles of a finite directed graph.*
J. Assoc. Comput. Mach. 19 (1972), 43/56. Zb. 229 # 68004.
- 49 Worrell, R.B. and Hulme, B.L. : *Finding simple paths in a graph by symbolic manipulation of boolean equations.*
Proc. Sixth South. Conf. on Combinat. Graph Theory and Computing. (Florida, Boca Raton 1975). Congressus Numerantium XIV (1975), 627/638. M.R. 53 # 12073 ; Zb. 347 # 68032.

